11 класс (решения)
Вариант 1

1. **(2 балла)** В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 26 красных, 31 синяя и 16 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

Решение:

Нетрудно заметить, что в результате изменений, которые может претерпеть исходная популяция амёб, не меняются чётности модулей разностей чисел амёб различного вида.

Пусть n_1, n_2 и n_3 числа красных, синих и жёлтых амёб в исходной популяции соответственно, а $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{1,3}$ и $\varepsilon_{2,3}$ - индикаторы нечётности $|n_1 - n_2|$, $|n_1 - n_3|$ и $|n_2 - n_3|$ соответственно.

В рассматриваемом случае $\varepsilon_{1,2} = 1$, $\varepsilon_{1,3} = 0$ и $\varepsilon_{2,3} = 1$. Следовательно, если популяция выродится в единственную особь, то особь будет синей.

Ответ: синяя.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}.$$

Решение:

По определению целой части числа имеем систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{5+6x}{8} \geq \dfrac{15x-7}{5} \\ \dfrac{5+6x}{8} < \dfrac{15x-7}{5} + 1 \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств

$$\begin{cases} x \le \dfrac{9}{10} \\ x > \dfrac{41}{90} \end{cases}$$

$$x \in \left(\frac{41}{90}; \frac{9}{10} \right]$$

Теперь осталось в этом интервале найти те значения x, для которых число $\frac{15x-7}{5}$ является целым (это ограничение следует из определения целой части).

Пусть $\frac{15x-7}{5} = m \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = \frac{5m+7}{15}$, и получаем систему неравенств

$$\frac{41}{90} < \frac{5m+7}{15} \le \frac{9}{10}$$

или

$$-\frac{1}{42} < 5m \le \frac{13}{2},$$

которой удовлетворяет только два целых числа: $m = 0, m = 1$.

Ответ: $x = \frac{7}{15}; x = \frac{4}{5}$

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right) = x$, если известно, что $f\left(x\right) = x^2 - 4x - 5$.

Решение:

Очевидно, что часть решений уравнения $f\left(f\left(x\right)\right) = x$ можно найти, решив более простое уравнение $f\left(x\right) = x$, которое в данном случае имеет вид:

$$x^2 - 4x - 5 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(5 \pm 3\sqrt{5}\right).$$

Так как корни многочлена $f\left(x\right) - x = x^2 - 5x - 5$ являются корнями многочлена $f\left(f\left(x\right)\right) - x = x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 55x + 40$, то первый многочлен делит второй. Результат деления есть $x^2 - 3x - 8$.Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x-5=0 \\ x^2-3x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(5\pm 3\sqrt{5}\right) \\ \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{41}) \end{array}\right..$$

Ответ: $\frac{1}{2}\left(5\pm 3\sqrt{5}\right)$, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{41})$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2\left(y-x\right)=\log_8\left(9y-15x\right) \\ x^2+y^2=15 \end{cases}.$$

Решение:

Справедливы следующие равносильные преобразования:

$$\begin{cases} y-x>0 \\ 9y-15x>0 \\ \left(y-x\right)^3=9y-15x \\ x^2+y^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ \left(y-x\right)^3=9y-15x \\ \left(y-x\right)^2=15-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ \left(y-x\right)^3=9y-15x \\ \left(y-x\right)^3=\left(15-2xy\right)\left(y-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y-x>0 \\ \left(y-x\right)^3=9y-15x \\ 9y-15x=15y-15x-2xy^2+2x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ \left(y-x\right)^3=9y-15x \\ 2xy\left(y-x\right)=6y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x^3=15x \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x>0 \\ \left(y-x\right)^3=9\left(y-x\right)-6x \\ 2x\left(y-x\right)=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{15} \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x>0 \\ \left(y-x\right)^3=9\left(y-x\right)-\dfrac{18}{y-x} \\ x=\dfrac{3}{y-x} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

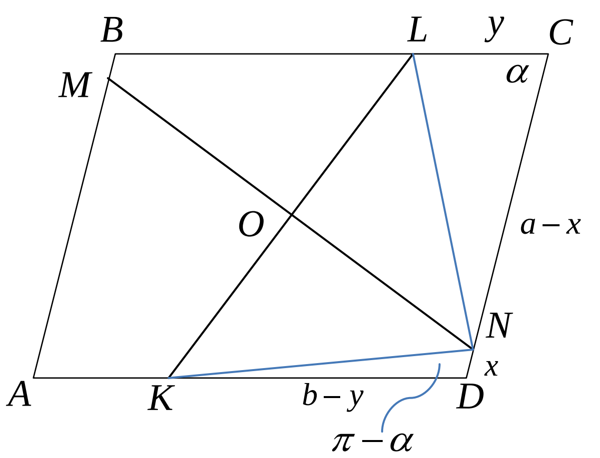
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{15} \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^4-9(y-x)^2+18=0 \\ x=\dfrac{3}{y-x} \end{cases} \end{array}\right.$$

В результате решения полученного биквадратного уравнения относительно $y-x$ после несложных преобразований можно получить ответ.

Ответ: $\left\{\left(-\sqrt{15};0\right);\left(\sqrt{\frac{3}{2}};3\sqrt{\frac{3}{2}}\right);\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)\right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 3, а угол между ними – $\arccos\frac{5}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Решение:



Пусть в параллелограмме $ABCD$ $|AB|=|CD|=a$, $|AD|=|BC|=b$, $\angle BAC=\alpha=\arccos c$.

Очевидно, что $\cos\alpha=c$, а $\cos(\pi-\alpha)=-c$.

Обозначим $|DN|=x$, $|LC|=y$.

От противного можно показать, что взаимно перпендикулярные прямые MN и KL, указанные в условии задачи, должны проходить через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

Очевидно равенство: $\triangle KON=\triangle LON$.

Из него и из равенства площадей, $S_{KOND}=S_{LONC}$, следует совпадение площадей, $S_{\triangle KND}=S_{\triangle LNC}$. Последний факт влечёт справедливость равенства $\frac{1}{2}(a-x)y\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(b-y)x\cdot\sin(\pi-\alpha)$, из которого следует соотношение

$$y=\frac{b}{a}x\,. \qquad (1)$$

На основании равенства $|KN|=|LN|$ и теоремы косинусов можно записать уравнение

$$(a-x)^2+y^2-2(a-x)y\cdot\cos\alpha=(b-y)^2+x^2-2(b-y)x\cdot\cos(\pi-\alpha),$$

из которого и из (1), в свою очередь, следует уравнение

$$\frac{4bc}{a}x^2-\left(2a-\frac{2b^2}{a}+4bc\right)x+a^2-b^2=0\,. \qquad (2)$$

При $a=2$, $b=3$ и $c=\frac{5}{16}$ решениями (2) являются $x=-2$ и $x=\frac{4}{3}$. Первое отсеивается из геометрических соображений. Соответствующее значение $y=2$.

Ответ: $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{3}$, 2 и 1.

6. **(5 баллов)** Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении n^2 при $n=1,2,3,\ldots$ ($a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=9,\ a_4=1,\ a_5=2,\ldots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству

$$10^k\sqrt{b}\le n<10^k\sqrt{b+1},$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b, поскольку

$$10^{2k}b=\overline{b\underbrace{0\ldots0}_{2k}}\le n^2\le\overline{b\underbrace{9\ldots9}_{2k}}=10^{2k}(b+1)-1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[10^k\sqrt{b};10^k\sqrt{b+1}\right)$ неограниченно возрастает (т.к. $\sqrt{b+1}-\sqrt{b}>0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, …, девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Вариант 2

1. **(2 балла)** В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 47 красных, 40 синих и 53 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

Решение:

Нетрудно заметить, что в результате изменений, которые может претерпеть исходная популяция амёб, не меняются чётности модулей разностей чисел амёб различного вида.

Пусть n_1, n_2 и n_3 числа красных, синих и жёлтых амёб в исходной популяции соответственно, а $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{1,3}$ и $\varepsilon_{2,3}$ - индикаторы нечётности $|n_1 - n_2|$, $|n_1 - n_3|$ и $|n_2 - n_3|$ соответственно.

В рассматриваемом случае $\varepsilon_{1,2} = 1$, $\varepsilon_{1,3} = 0$ и $\varepsilon_{2,3} = 1$. Следовательно, если популяция выродится в единственную особь, то особь будет синей.

Ответ: синяя.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{9x-4}{6}\right] = \frac{12x+7}{4}.$$

Решение:

По определению целой части числа имеем систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{9x-4}{6} \geq \dfrac{12x+7}{4} \\ \dfrac{9x-4}{6} < \dfrac{12x+7}{4} + 1 \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{29}{18} \\ x > -\dfrac{41}{18} \end{cases}$$

$$x \in \left(-\frac{41}{18}; -\frac{29}{18}\right]$$

Теперь осталось в этом интервале найти те значения x, для которых число $\dfrac{12x+7}{4}$ является целым (это ограничение следует из определения целой части).

Пусть $\dfrac{12x+7}{4} = m \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = \dfrac{4m-7}{12}$, и получаем систему неравенств

$$-\frac{41}{18} < \frac{4m-7}{12} \le -\frac{29}{18}$$

или

$$-\frac{61}{12} < m \le -\frac{37}{12},$$

которой удовлетворяет только два целых числа: $m = -4, m = -5$.

Ответ: $x = -\dfrac{9}{4}; x = -\dfrac{23}{12}$.

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right) = x$, если известно, что $f\left(x\right) = x^2 + 2x - 4$.

Решение:

Очевидно, что часть решений уравнения $f\left(f\left(x\right)\right) = x$ можно найти, решив более простое уравнение $f\left(x\right) = x$, которое в данном случае имеет вид:

$$x^2 + 2x - 4 = x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{17}).$$

Так как корни многочлена $f\left(x\right) - x = x^2 + 2x - 5$ являются корнями многочлена $f\left(f\left(x\right)\right) - x = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 13x + 4$, то первый многочлен делит второй. Результат деления есть $x^2 + 3x - 1$.Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x-5=0 \\ x^2+3x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17}) \\ \frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{13}) \end{array}\right. .$$

Ответ: $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17})$, $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{13})$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(y-x)=\log_8(19y-13x) \\ x^2+y^2=13 \end{cases}.$$

Решение:

Справедливы следующие равносильные преобразования:

$$\begin{cases} y-x>0 \\ 19y-13x>0 \\ (y-x)^3=19y-13x \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^3=19y-13x \\ (y-x)^2=13-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^3=19y-13x \\ (y-x)^3=(13-2xy)(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^3=19y-13x \\ 19y-13x=13y-13x-2xy^2+2x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^3=19y-13x \\ 2xy(y-x)=3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x^3=13x \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^3=19(y-x)+6x \\ 2x(y-x)=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^3=9(y-x)+\dfrac{3}{y-x} \\ x=\dfrac{3}{2(y-x)} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

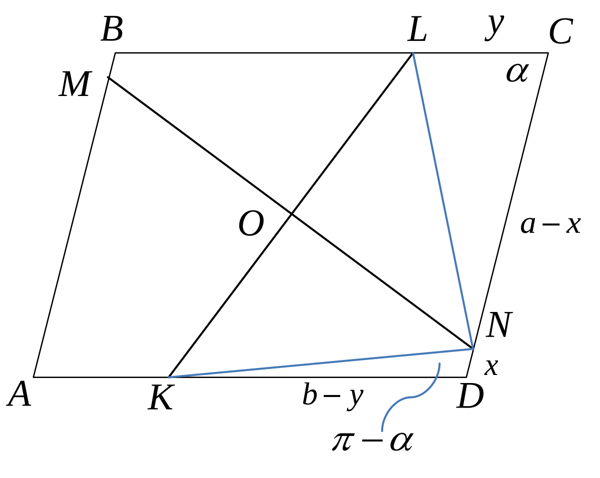
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x>0 \\ (y-x)^4-9(y-x)^2+3=0 \\ x=\dfrac{3}{2(y-x)} \end{cases} \end{array}\right.$$

В результате решения полученного биквадратного уравнения относительно $y-x$ после несложных преобразований можно получить ответ.

Ответ: $\left\{\left(-\sqrt{13};0\right);(-3;-2);\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 5 и 13, а угол между ними – $\arccos\dfrac{6}{13}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Решение:



Пусть в параллелограмме $ABCD$ $|AB|=|CD|=a$, $|AD|=|BC|=b$, $\angle BAC=\alpha=\arccos c$.

Очевидно, что $\cos\alpha=c$, а $\cos(\pi-\alpha)=-c$.

Обозначим $|DN|=x$, $|LC|=y$.

От противного можно показать, что взаимно перпендикулярные прямые MN и KL, указанные в условии задачи, должны проходить через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

Очевидно равенство: $\triangle KON=\triangle LON$.

Из него и из равенства площадей, $S_{KOND}=S_{LONC}$, следует совпадение площадей, $S_{\triangle KND}=S_{\triangle LNC}$. Последний факт влечёт справедливость равенства $\frac{1}{2}(a-x)y\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(b-y)x\cdot\sin(\pi-\alpha)$, из которого следует соотношение

$$y=\frac{b}{a}x. \qquad (1)$$

На основании равенства $|KN|=|LN|$ и теоремы косинусов можно записать уравнение

$$(a-x)^2+y^2-2(a-x)y\cdot\cos\alpha=(b-y)^2+x^2-2(b-y)x\cdot\cos(\pi-\alpha),$$

из которого и из (1), в свою очередь, следует уравнение

$$\frac{4bc}{a}x^2-\left(2a-\frac{2b^2}{a}+4bc\right)x+a^2-b^2=0. \qquad (2)$$

При $a=5$, $b=13$ и $c=\frac{6}{13}$ решениями (2) являются $x=-10$ и $x=3$. Первое отсеивается из геометрических соображений. Соответствующее значение $y=\frac{39}{5}$.

Ответ: 3 и 2, $\frac{39}{5}$ и $\frac{26}{5}$.

6. **(5 баллов)** Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении $\left[\sqrt{n}\right]$ при $n=1,2,3,\ldots$ ($a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=2,\ a_5=2,\ldots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству

$$10^{2k}\cdot b^2\le n<10^{2k}(b+1)^2,$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b, поскольку

$$10^k b=\overline{b\underbrace{0\ldots0}_{k}}\le\sqrt{n}\le\overline{b\underbrace{9\ldots9}_{k}}=10^k(b+1)-1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[10^{2k}b^2;\ 10^{2k}(b+1)^2\right)$ неограниченно возрастает (т.к. $(b+1)^2-b^2>0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, …, девяток. Поэтому она не может быть периодической.