10 класс

Вариант 1

1. (**2 балла**) Найти все числа *x*, *y*, при которых верно равенство

$$4x^2-4xy\sqrt{5}+6y^2+2y\sqrt{7}-\frac{2y}{\sqrt{7}}+\frac{43}{7}=1.$$

2. **(3 балла)** Пусть две последовательности чисел $(x_0,x_1,\ldots,x_{2010})$, $(y_0,y_1,\ldots,y_{2010})$ составлены по следующим правилам:

а) $x_0=3,\ x_1=\frac{1}{2},\ y_0=1,\ y_1=\frac{1}{6},$

б) $x_{i+1}=x_{i-1}+5x_i$ и $y_{i+1}=y_{i-1}-5y_i$ для $i=1,\ldots,2009$.

Вычислить величину $x_{2010}y_{2009}+x_{2009}y_{2010}$.

3. **(3 балла)** Найти все решения неравенства $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geq 0$, лежащие в интервале $\left(-\frac{83}{20};0\right)$.

4. **(4 балла)** В параллелограмме со сторонами 3 и 5 проведены биссектрисы четырех внутренних углов. Найти отношение площади четырехугольника, образовавшегося при пересечении биссектрис, к площади параллелограмма.

5. (**5 баллов**) Найти все решения системы уравнений $\begin{cases}\frac{x^3}{y^2}+\frac{y}{x}=5\\ \frac{8y}{x^2}-\frac{x}{y}=1\end{cases}$.

6. **(5 баллов)** На числовой прямой отложены точки с координатами $a_k=k\cdot\sqrt{3}$, k=1,2,3,… Вправо от точки 0, откладывается отрезок, длина которого меняется, причем каждый следующий раз отрезок откладывается от конца предыдущего отрезка. Начальная длина отрезка равна 1. Если отрезок, отложенный в очередной раз, закрывает менее 7 точек a_k, то длина отрезка увеличивается на 1, если более 7 точек – уменьшается на 1, если же отрезок закрывает ровно 7 точек a_k, то его длина остается прежней. Верно ли, что, начиная с некоторого момента времени, длина откладываемого отрезка будет постоянной? Ответ обосновать.

Вариант 2

1. (**2 балла**) Найти все числа x, y, при которых верно равенство

$$4x^2+4xy\sqrt{7}+8y^2+2y\sqrt{3}-\frac{2y}{\sqrt{3}}+\frac{7}{3}=1.$$

2. **(3 балла)** Пусть две последовательности чисел $(x_0,x_1,\ldots,x_{2009})$, $(y_0,y_1,\ldots,y_{2009})$ составлены по следующим правилам:

а) $x_0=12,\ x_1=\frac{1}{3},\ y_0=4,\ y_1=\frac{1}{18}$,

б) $x_{i+1}=x_{i-1}+4x_i$ и $y_{i+1}=y_{i-1}-4y_i$ для $i=1,\ldots,2008$.

Вычислить величину $x_{2009}y_{2008}+x_{2008}y_{2009}$.

3. **(3 балла)** Найти все решения неравенства $\cos 5+2x+x^2<0$, лежащие в промежутке $\left[-2;-\frac{37}{125}\right]$.

4. **(4 балла)** В параллелограмме со сторонами 4 и 7 проведены биссектрисы четырех внутренних углов. Найти отношение площади четырехугольника, образовавшегося при пересечении биссектрис, к площади параллелограмма.

5. (**5 баллов**) Найти все решения системы уравнений $\begin{cases}\frac{y^3}{x^2}+\frac{x}{y}=1\\ \frac{2x}{y^2}+\frac{4y}{x}=1\end{cases}$.

6. **(5 баллов)** На числовой прямой отложены точки с координатами $a_k=k\cdot\sqrt{2}$, k=1,2,3,… Вправо от точки 0, откладывается отрезок, длина которого меняется, причем каждый следующий раз отрезок откладывается от конца предыдущего отрезка. Начальная длина отрезка равна 1. Если отрезок, отложенный в очередной раз, закрывает менее 5 точек a_k, то длина отрезка увеличивается на 1, если более 5 точек – уменьшается на 1, если же отрезок закрывает ровно 5 точек a_k, то его длина остается прежней. Верно ли, что, начиная с некоторого момента времени, длина откладываемого отрезка будет постоянной? Ответ обосновать.