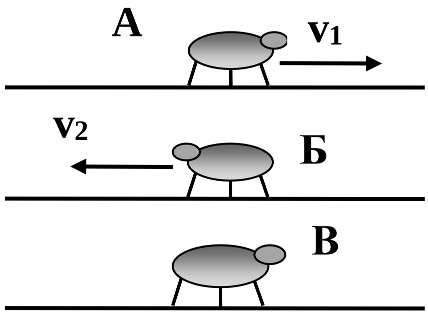
Решение варианта 11

1. *(10 баллов)* Три муравья находятся на трех параллельных прямых прутиках, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга (см. рис.). Муравьи одновременно начинают двигаться. Муравей А – вправо со скоростью v_1 = 0,1 см/с, муравей Б – влево со скоростью v_2 = 0,2 см/с. С какой скоростью и в какую сторону должен двигаться муравей В, чтобы он все время находился на одной прямой с двумя другими муравьями?



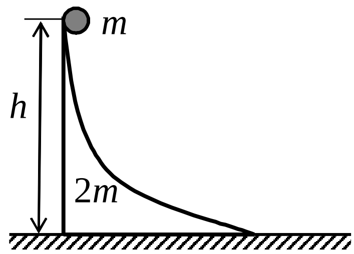
Решение

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью $v_{\text{пер}} = v_2$. В этой системе отсчета муравей Б неподвижен, а скоростью муравья А равна $v_{\text{Аотн}} = v_1 + v_2$ и направлена вправо. Чтобы все три муравья находились на одной прямой, скорость муравья В в движущейся системе отсчета должна быть равна по модулю $v_{\text{Вотн}} = v_1 + v_2$ и направлена влево.

Тогда в неподвижной системе отсчета скорость муравья В направлена влево и равна $v_{\text{В}} = v_{\text{Вотн}} + v_{\text{пер}} = v_1 + 2v_2 = 0{,}5$ см/с.

Ответ. Скорость муравья В направлена влево и равна $v_{\text{В}} = v_1 + 2v_2 = 0{,}5$ см/с.

2. *(10 баллов)* На высоте h гладкого незакрепленного неподвижного клина массой $2m$ поместили небольшое тело массой m (см. рис.). Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности, его наклонная грань плавно переходит в горизонталь. Тело и клин отпускают. Какой импульс приобретет тело, соскользнув с клина?



Решение

После соскальзывания тела импульсы тела и клина противоположны по направлению и одинаковы по величине, т.к. импульс системы сохраняется по горизонтали. Обозначим импульс клина p и запишем закон сохранения энергии.

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{4m} = 2mgh. \Rightarrow \; p = 2m\sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

Ответ. $p = 2m\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$.

3. *(12 баллов)* В цилиндрическом сосуде под поршнем находится влажный воздух. Воздух при неизменной температуре сжимают, уменьшая его объем в n = 10 раз. При этом 80% водяного пара, содержащегося в воздухе, сконденсировалось. Какова была первоначальная влажность воздуха? Объемом жидкости в конечном состоянии пренебречь.

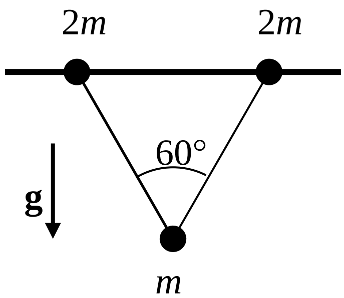
Решение

Пусть V – начальный объем сосуда, T – абсолютная температура воздуха, ν – первоначальное количество водяного пара содержащегося в воздухе, φ – первоначальная влажность воздуха, $p_{\text{н}}$ –

давление насыщенного пара при температуре T. Тогда уравнения состояния пара до и после сжатия имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi P_н V = \nu RT, \\ P_н \dfrac{V}{n} = (1-x)\nu RT. \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{n(1-x)} = \frac{1}{10\cdot(1-0{,}8)} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Ответ. $\varphi = \dfrac{1}{n(1-x)} = 0{,}5 = 50\%$.



4. *(16 баллов)* Две одинаковые бусинки массами $2m$ каждая могут двигаться без трения по гладкому горизонтальному стержню. Они связаны друг с другом куском легкой и нерастяжимой нити, к середине которой привязана третья, такого же радиуса бусинка, как и первые две, но массы m. Первоначально бусинки на стержне удерживают, куски нити при этом составляют друг с другом угол 60° (см. рис.). Бусинки одновременно отпускают. Найдите ускорения бусинок сразу после этого.

Решение

Бусинки 1 и 2 (см. рис. 1) движутся горизонтально, а бусинка 3 всегда вертикально.

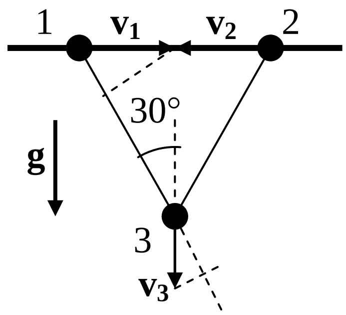


Рис. 1.

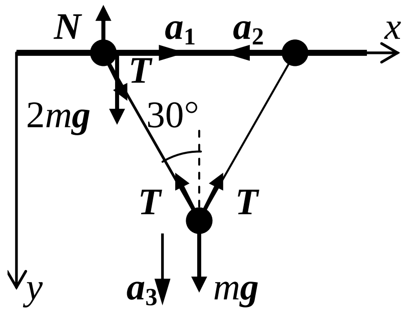


Рис. 2.

В силу симметрии скорости бусинок 1 и 2, а также их ускорения в некоторый момент времени t будут равны между собой: $v_1 = v_2$, $a_1 = a_2$. Рассмотрим малый момент времени t в самом начале движения. Тогда $v_1 = a_1 t$, $v_2 = a_2 t$ и $v_3 = a_3 t$. Для этого момента времени запишем условие нерастяжимости нити: $v_1 \cos 60^\circ = v_3 \cos 30^\circ$,

$\Rightarrow v_1 = v_3\sqrt{3}$, $\Rightarrow a_1 = a_3\sqrt{3}$ (уравнение связи).

Расставим силы, действующие на бусинки 1 и 3 (рис. 2), и запишем уравнения динамики. С учетом уравнения связи, получим следующую систему.

$$\begin{cases} x: T\cos 60^\circ = 2ma_1, \\ y: mg - 2T\cos 30^\circ = ma_3, \\ a_1 = a_3\sqrt{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}T = 2ma_1, \\ mg - 2T\dfrac{\sqrt{3}}{2} = ma_3, \\ a_1 = a_3\sqrt{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dfrac{g\sqrt{3}}{13}, \\ a_3 = \dfrac{g}{13}. \end{cases}$$

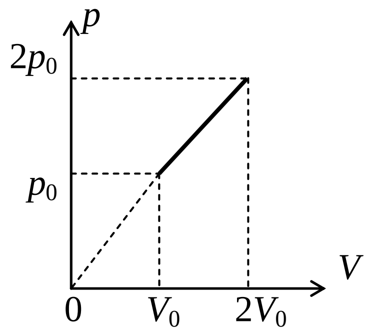
Ответ. $a_1 = a_2 = \dfrac{g\sqrt{3}}{13} = 1{,}3$ м/с^2; $a_3 = \dfrac{g}{13} = 0{,}75$ м/с^2.

Замечание. *За отсутствие числового ответа в этой задаче баллы не снижаются.*

5. *(16 баллов)* Неизменная масса идеального одноатомного газа за интервал времени $[0,t_0]$ совершает термодинамический процесс, в котором давление и абсолютная температура газа изменяются как функции времени t по законам: $p(t) = \dfrac{p_0}{t_0}(t + t_0)$ и $T(t) = \dfrac{T_0}{t_0^2}(t + t_0)^2$, где p_0, T_0 и t_0 – постоянные величины. Какую работу совершает газ в этом процессе за интервал времени $[0,t_0]$, если его внутренняя энергия в начальный момент времени $t = 0$ равна $U_0 = 100$ Дж.

Решение

Пользуясь уравнением Мендеева-Клапейрона, найдем $V(t)$: $V(t) = \dfrac{V_0}{t_0}(t + t_0)$, где $V_0 = \dfrac{\nu R T_0}{p_0}$, ν - количество идеального газа, участвующего в процессе. Можно заметить, что для данного процесса $\dfrac{p(t)}{V(t)} = \dfrac{p_0}{V_0} = \dfrac{p_0^2}{\nu R T_0} = const$.



Поэтому график процесса – прямая, выходящая из начала координат, при этом $p(0) = p_0$, $V(0) = V_0$ и $T(0) = T_0$, $p(t_0) = 2p_0$, $V(t_0) = 2V_0$. График процесса изображен на рисунке.

$$A = \frac{1}{2}(p_0 + 2p_0)V_0 = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}\nu R T_0 = U_0 = 100 \text{ Дж.}$$

Ответ. $A = U_0 = 100$ Дж.

6. *(16 баллов)* Две плоские прямоугольные металлические пластины размерами $a\times b$, удерживают параллельно друг другу на расстоянии d ($d<<a$, $d<<b$). Первую пластину, масса которой m, заряжают зарядом $+q$, а вторую – массой $2m$, зарядом$-2q$. Через какое время пластины столкнутся, если их отпустить? Пластины находятся в вакууме, силами тяготения пластин и окружающих их тел пренебречь.

Решение

Поле, создаваемое пластинами, однородное, поэтому пластины притягиваются с постоянной силой F.

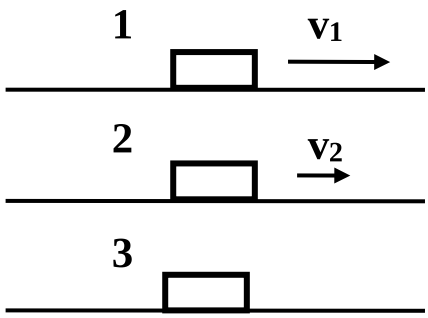
$$F = q_1 E_2 = q \cdot \frac{2q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{\varepsilon_0 ab}.$$

Тогда ускорения пластин равны $a_1 = \frac{F}{m}$, $a_2 = \frac{F}{2m}$. $d = \frac{a_1 t^2}{2} + \frac{a_2 t^2}{2}$. $\Rightarrow$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1 + a_2}} = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 abdm}{3q^2}}.$$

Ответ. $t = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 abdm}{3q^2}} = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 abdm}{3}}$.

Решение варианта 12



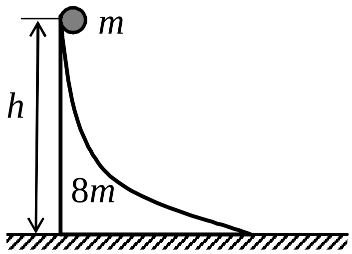
1. *(10 баллов)* Три автомобиля движутся по трем прямым параллельным автотрассам, расположенным на одинаковых расстояниях друг от друга (см. рис.). В момент, когда автомобили поравнялись, автомобиль 1 двигался вправо со скоростью v_1 = 80 км/ч, автомобиль 2 – тоже вправо, но со скоростью v_2 = 30 км/ч. С какой скоростью и в каком направлении должен ехать автомобиль 3, чтобы в процессе дальнейшего движения находиться на одной прямой с двумя другими автомобилями?

Решение

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью $v_{\text{пер}} = v_2$. В этой системе отсчета автомобиль 2 неподвижен, а скоростью автомобиля 1 равна $v_{1\text{отн}} = v_1 - v_2 = 50$ км/ч и направлена вправо. Чтобы все три автомобиля находились на одной прямой, скорость автомобиля 3 в движущейся системе отсчета должна быть равна по модулю $v_{3\text{отн}} = v_1 - v_2 = 50$ км/ч и направлена влево.

Т.к $v_{3\text{отн}} > v_2$, то, в неподвижной системе отсчета скорость автомобиля 3 направлена влево и равна $v_3 = v_{3\text{отн}} + (-v_{\text{пер}}) = v_1 - 2v_2 = 20$ км/ч.

Ответ. Скорость автомобиля 3 направлена влево и равна $v_{\text{В}} = v_1 - 2v_2 = 20$ км/ч.



2. *(10 баллов)* На высоте h гладкого незакрепленного неподвижного клина массой $8m$ поместили небольшое тело массой m (см. рис.). Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности, его наклонная грань плавно переходит в горизонталь. Тело и клин отпускают. Какой импульс приобретет клин, после того, как с него соскользнет тело?

Решение

После соскальзывания тела импульсы тела и клина противоположны по направлению и одинаковы по величине, т.к. импульс системы сохраняется по горизонтали. Обозначим импульс клина p и запишем закон сохранения энергии.

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{18m} = 2mgh. \Rightarrow \; p = \frac{4}{3}m\sqrt{gh}.$$

Ответ. $p = \frac{4}{3}m\sqrt{gh}$.

3. *(12 баллов)* В цилиндрическом сосуде под поршнем находится воздух с относительной влажностью φ = 40%. Воздух при неизменной температуре сжимают. Во сколько раз нужно уменьшить объём сосуда, чтобы 75% водяного пара, содержащегося в воздухе, сконденсировалось? Объемом жидкости в конечном состоянии пренебречь.

Решение

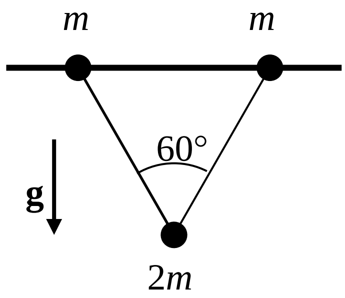
Пусть V – начальный объем сосуда, T – абсолютная температура воздуха, ν – первоначальное количество водяного пара содержащегося в воздухе, φ – первоначальная влажность воздуха, $p_{\text{н}}$ –

давление насыщенного пара при температуре T. Тогда уравнения состояния пара до и после сжатия имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi P_н V = \nu RT, \\ P_н \dfrac{V}{n} = (1-x)\nu RT. \end{cases} \Rightarrow n = \frac{1}{\varphi(1-x)} = \frac{1}{0,4\cdot(1-0,75)} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Ответ. В $n = \dfrac{1}{\varphi(1-x)} = 10$ раз.

4. *(16 баллов)* Две одинаковые бусинки массы m могут двигаться без трения по гладкому горизонтальному стержню. Они связаны друг с другом куском легкой и нерастяжимой нити, к середине которой привязана третья, такого же радиуса бусинка, как и первые две, но массы $2m$. Первоначально бусинки на стержне удерживают, куски нити при этом составляют друг с другом угол 60° (рис. 2). Бусинки одновременно отпускают. Найдите ускорение бусинок сразу после этого.



Решение

Бусинки 1 и 2 (см. рис. 1) движутся горизонтально, а бусинка 3 всегда вертикально.

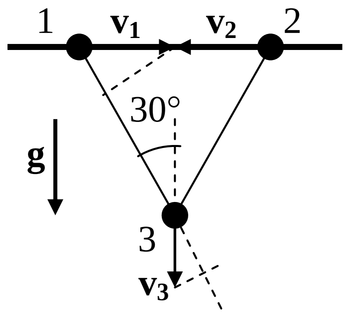


Рис. 1.

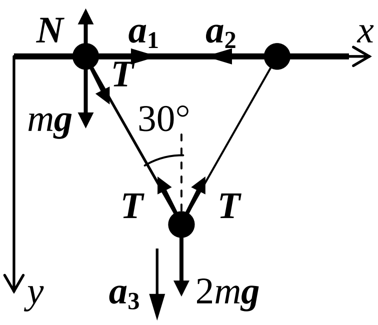


Рис. 2.

В силу симметрии скорости бусинок 1 и 2, а также их ускорения в некоторый момент времени t будут равны между собой: $v_1 = v_2$, $a_1 = a_2$.

Рассмотрим малый момент времени t в самом начале движения.

Тогда $v_1 = a_1 t$, $v_2 = a_2 t$ и $v_3 = a_3 t$.

Для этого момента времени запишем условие нерастяжимости нити: $v_1 \cos 60^\circ = v_3 \cos 30^\circ$, $\Rightarrow$ $v_1 = v_3\sqrt{3}$, $\Rightarrow$ $a_1 = a_3\sqrt{3}$ (уравнение связи).

Расставим силы, действующие на бусинки 1 и 3 (рис. 2), и запишем уравнения динамики. С учетом уравнения связи, получим следующую систему.

$$\begin{cases} x: T\cos 60^\circ = ma_1, \\ y: 2mg - 2T\cos 30^\circ = 2ma_3, \\ a_1 = a_3\sqrt{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}T = ma_1, \\ 2mg - 2T\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2ma_3, \\ a_1 = a_3\sqrt{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dfrac{g\sqrt{3}}{4}, \\ a_3 = \dfrac{g}{4}. \end{cases}$$

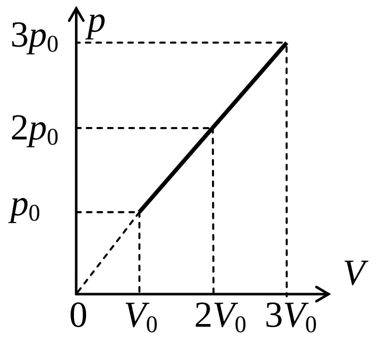
Ответ. $a_1 = a_2 = \dfrac{g\sqrt{3}}{4} = 4,24$ м/с^2; $a_3 = \dfrac{g}{4} = 2,45$ м/с^2.

Замечание. *За отсутствие числового ответа в этой задаче баллы не снижаются.*

5. *(16 баллов)* Неизменная масса идеального одноатомного газа за интервал времени $[0,2t_0]$ совершает термодинамический процесс, в котором объем и абсолютная температура газа изменяются как функции времени t по законам: $V(t) = \dfrac{V_0}{t_0}(t+t_0)$ и $T(t) = \dfrac{T_0}{t_0^2}(t+t_0)^2$, где V_0, T_0 и t_0 – постоянные величины. Какую работу совершает газ в этом процессе за интервал времени $[t_0,2t_0]$, если изменение его внутренней энергии за интервал времени $[0, t_0]$ равно $\Delta U = 900$ Дж.

Решение

Пользуясь уравнением Мендеева-Клапейрона, найдем $p(t)$: $p(t) = \dfrac{p_0}{t_0}(t+t_0)$, где $p_0 = \dfrac{\nu R T_0}{V_0}$, ν - количество идеального газа, участвующего в процессе. Можно заметить, что для данного процесса $\dfrac{p(t)}{V(t)} = \dfrac{p_0}{V_0} = \dfrac{\nu R T_0}{V_0^2} = const$. Поэтому график процесса – прямая, выходящая из начала координат, при этом $p(0) = p_0$, $V(0) = V_0$ и $T(0) = T_0$,



$p(t_0) = 2p_0, V(t_0) = 2V_0$, $p(2t_0) = 3p_0$, $V(2t_0) = 3V_0$. График процесса изображен на рисунке.

Работа за интервал времени $[t_0,2t_0]$ равна $A = \dfrac{1}{2}(2p_0 + 3p_0)V_0 = \dfrac{5}{2}p_0V_0 = \dfrac{5}{2}\nu R T_0$.

Изменение внутренней энергии за интервал $[0,t_0]$ равно $\Delta U = \dfrac{3}{2}\nu R(4T_0 - T_0) = \dfrac{9}{2}\nu R T_0$.

Тогда $\dfrac{A}{\Delta U} = \dfrac{5}{9}$. $\Rightarrow$ $A = \dfrac{5}{9}\Delta U = 500$ Дж.

Ответ. $A = \dfrac{5}{9}\Delta U = 500$ Дж.

6. *(16 баллов*) Две плоские прямоугольные металлические пластины размерами $a \times b$, удерживают параллельно друг другу на расстоянии d ($d \ll a$, $d \ll b$). Первую пластину массой m заряжают зарядом, поверхностная плотность которого равна $-\sigma$, а вторую массой $2m$ – зарядом, поверхностная плотность которого $+4\sigma$. Через какое время пластины столкнутся, если их отпустить? Пластины находятся в вакууме, силами тяготения пластин и окружающих их тел пренебречь.

Решение

Поле, создаваемое пластинами, однородное, поэтому пластины притягиваются с постоянной силой F.

$$F = |q_1| E_2 = \sigma S \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma^2 ab}{\varepsilon_0}$$

Тогда ускорения пластин равны $a_1 = \dfrac{F}{m}$, $a_2 = \dfrac{F}{2m}$. $d = \dfrac{a_1 t^2}{2} + \dfrac{a_2 t^2}{2}$. $\Rightarrow$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1 + a_2}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 dm}{3\sigma^2 ab}}.$$

Ответ. $t = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 dm}{3\sigma^2 ab}} = \dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 dm}{3ab}}$.