

Решение варианта 1

1. (15 баллов). На равноплечных рычажных весах уравновесили 1 кг льда. Определите, какую массу должен иметь дополнительный свинцовый груз, который нужно положить на одну из чашек весов, чтобы восстановить равновесие после того, как лед растает. Температура окружающего воздуха близка к температуре плавления льда. Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$, воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность воздуха при нормальном атмосферном давлении и температуре плавления льда $\rho_{\text{воз}} = 1,20 \text{ кг/м}^3$.

Возможное решение: При таянии льда объем вещества уменьшается, а значит, уменьшается и сила Архимеда, действующая на вещество в воздухе. Уменьшение силы Архимеда нужно компенсировать появлением равнодействующей сил тяжести и Архимеда, действующих на дополнительный груз. Учитывая, что плотность материала груза в случае, если груз сделан из металла, существенно больше плотности воды, пренебрежем силой Архимеда, действующей на груз. Тогда масса дополнительного груза рассчитывается как

$$m = \rho_{\text{возд}} M \left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right) \approx 0,13 \text{ г}$$

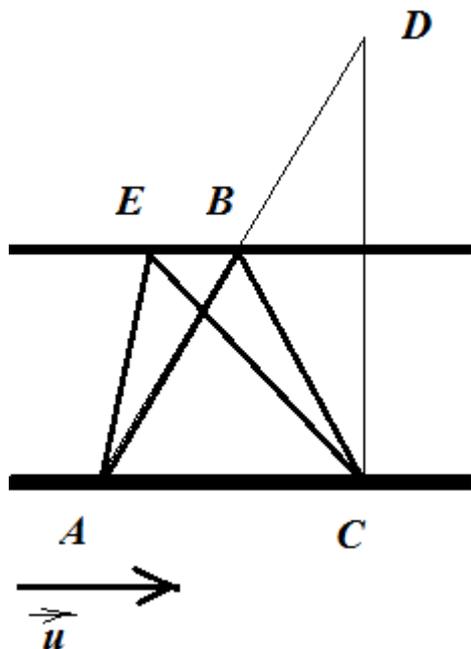
Ответ: $m = \rho_{\text{возд}} M \left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right) \approx 0,13 \text{ г}$

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Указано, что при таянии льда объем вещества уменьшается	2
Указано, что при таянии льда уменьшается сила Архимеда, действующая на вещество в воздухе	2
Указано, что на груз тоже действует сила Архимеда, обсужден вопрос пренебрежения ей	2
Записаны условия равновесия весов в обоих случаях	4
Записано выражение для массы дополнительного груза	3
Рассчитано значение массы	2
Всего баллов	15

2. (15 баллов). Автомобиль движется со скоростью u по дороге, параллельной стене и проходящей на расстоянии L от нее. Автомобиль издает короткий гудок. Через какое минимальное время водитель услышит эхо, отраженное стеной? Скорость звука в воздухе равна V .

Возможное решение: Испущенный автомобилем звук распространяется изотропно. Отраженный от стены сигнал также распространяется изотропно. Поэтому эхо придет к водителю по огромному количеству траекторий, минимальное время прихода сигнала будет определяться кратчайшей траекторией распространения сигнала. Покажем, что кратчайшей траекторией распространения сигнала будет ломаная ABC , а любая другая, например, AEC , будет более протяженной. Решение этой геометрической задачи видно из чертежа, $AB = BD = BC$, AD – отрезок прямой, расстояние по прямой – кратчайшее между двумя точками. За искомый промежуток времени τ автомобиль пройдет расстояние



от стены сигнал также распространяется изотропно. Поэтому эхо придет к водителю по огромному количеству траекторий, минимальное время прихода сигнала будет определяться кратчайшей траекторией распространения сигнала. Покажем, что кратчайшей траекторией распространения сигнала будет ломаная ABC , а любая другая, например, AEC , будет более протяженной. Решение этой геометрической задачи видно из чертежа, $AB = BD = BC$, AD – отрезок прямой, расстояние по прямой – кратчайшее между двумя точками. За искомый промежуток времени τ автомобиль пройдет расстояние

$$AC = u\tau .$$

Звук за это же время пройдет

$$AB + BC = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{V\tau}{2}\right)^2 + L^2}$$

Из чертежа также видно, что

$$\left(\frac{u\tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{V\tau}{2}\right)^2 = L^2$$

Окончательно

$$\tau = \frac{2L}{\sqrt{V^2 - u^2}} .$$

Ответ: $\tau = \frac{2L}{\sqrt{V^2 - u^2}} .$

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Определено кратчайшее расстояние	5

Получено выражение, связывающее элементы траекторий звука и автомобиля	5
Получено выражение для минимального времени распространения эха	2
Всего баллов	15

3. (20 баллов). Юному естествоиспытателю удалось приобрести электроплитку, электрическое сопротивление которой не зависит от ее температуры. Исследователь включил плитку в сеть с напряжением $U_1 = 55$ В, она нагрелась до температуры 55 °С. Затем он включил ее в сеть с напряжением $U_2 = 110$ В, плитка нагрелась до температуры 110 °С. До какой температуры нагреется плитка при включении ее в сеть напряжением 220 В? Температура окружающей среды постоянна. Скорость отдачи тепла пропорциональна разности температур.

Возможное решение: Когда при включении плитки в сеть температура устанавливается, вся мощность, выделяемая плиткой, рассеивается в окружающую среду. Получаем три уравнения баланса мощностей:

$$\frac{U_1^2}{R} = k(t_1 - t_0)$$

$$\frac{U_2^2}{R} = k(t_2 - t_0)$$

$$\frac{U_3^2}{R} = k(t_3 - t_0)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$$

$$t_0 = \frac{U_2^2 t_1 - U_1^2 t_2}{U_2^2 - U_1^2}$$

Разделив третье уравнение на второе, получим

$$\frac{U_3^2}{U_2^2} = \frac{t_3 - t_0}{t_2 - t_0}$$

$$t_3 = \frac{U_3^2(t_2 - t_0) + U_2^2 t_0}{U_2^2} = \frac{U_3^2}{U_2^2} t_2 - \frac{U_2^2 t_1 - U_1^2 t_2}{U_2^2 - U_1^2} \left(\frac{U_3^2}{U_2^2} - 1 \right) = 286 \text{ °C}$$

Ответ: $t_3 = \frac{U_3^2}{U_2^2} t_2 - \frac{U_2^2 t_1 - U_1^2 t_2}{U_2^2 - U_1^2} \left(\frac{U_3^2}{U_2^2} - 1 \right) = 286 \text{ °C}$

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записаны три уравнения баланса мощностей	9
Получено выражение для t_0	4
Получено выражение для искомой температуры	4
Получено значение искомой температуры	3
Всего баллов	20

4. (20 баллов). Точечный источник света движется с постоянной скоростью V вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Определите среднюю скорость изображения источника при движении самого источника между точками, одна из которых находится на расстоянии $1,5 F$, а другая – на расстоянии $3F$ от линзы.

Возможное решение: Время движения источника света равно

$$\tau = \frac{1,5F}{V}.$$

Воспользовавшись формулой тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

получим, что, когда источник находился на расстоянии $1,5 F$ от линзы, изображение находилось на расстоянии $3F$ от линзы, а когда источник находился на расстоянии $3F$ от линзы, изображение находилось на расстоянии $1,5 F$ от линзы. Это значит, что средняя скорость изображения равна V .

Ответ: средняя скорость изображения равна V .

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Определено время движения	4
Записаны выражения для вычисления начальной и конечной точек траектории изображения	12
Записано выражение для средней скорости изображения	4
Всего баллов	20

Решение варианта 2

1. (15 баллов). Какой должна быть плотность жидкости, не смешивающейся с водой, чтобы деревянная пробка плотностью 600 кг/м^3 плавала бы наполовину погруженной в каждую из жидкостей? Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Возможное решение: Из закона Паскаля следует, что суммарная сила Архимеда равна сумме сил Архимеда, действующих на части тела, погруженные в "свои" жидкости. Условие равновесия тела может быть записано в виде

$$\rho_{\text{ж}} g \frac{V}{2} + \rho_{\text{в}} g \frac{V}{2} = \rho_{\text{т}} g V.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\rho_{\text{ж}} = 2\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{в}} = 200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho_{\text{ж}} = 2\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{в}} = 200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Прокомментировано разбиение суммарной силы Архимеда на две части	2
Записано условие равновесия тела	4
Получено решение в общем виде	3
Получено значение плотности жидкости	3
Записано выражение для массы дополнительного груза	3
Всего баллов	15

2. (15 баллов). Охотник произвел два выстрела с интервалом времени $\tau = 2 \text{ с}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Скорость пули $V = 400 \text{ м/с}$. Через какое время пули окажутся на одинаковой высоте?

Возможное решение: В тот момент, когда вылетает вторая пуля, первая окажется на высоте

$$h = V\tau \sin \alpha - \frac{g\tau^2}{2}$$

Вертикальные проекции скоростей пуль в момент вылета второй пули

$$V_{y1} = V \sin \alpha - g\tau$$

$$V_{y2} = V \sin \alpha .$$

Вертикальная проекция относительной скорости второй пули относительно первой

$$V_{y21} = g\tau .$$

Расстояние по вертикали между пулями h , вертикальная проекция относительной скорости постоянна, поэтому на одной высоте пули окажутся через время

$$t = \frac{h}{g\tau} = \frac{V \sin \alpha}{g} - \frac{\tau}{2} \approx 27,9 \text{ с} .$$

Ответ: $t = \frac{h}{g\tau} = \frac{V \sin \alpha}{g} - \frac{\tau}{2} \approx 27,9 \text{ с} .$

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Найдена высота подъема первой пули в момент вылета второй	3
Записаны вертикальные проекции скоростей пуль	4
Найдена вертикальная проекция относительной скорости	3
Получено решение в общем виде	3
Рассчитано искомое время	2
Всего баллов	15

3. (20 баллов). Юному естествоиспытателю удалось приобрести электроплитку, электрическое сопротивление которой не зависит от ее температуры. Исследователь включил плитку в сеть с напряжением $U_1 = 330 \text{ В}$, она нагрелась до температуры $330 \text{ }^\circ\text{С}$. Затем он включил ее в сеть с напряжением $U_2 = 220 \text{ В}$, плитка нагрелась до температуры $220 \text{ }^\circ\text{С}$. До какой температуры нагреется плитка при включении ее в сеть напряжением 110 В ? Температура окружающей среды постоянна. Скорость отдачи тепла пропорциональна разности температур.

Возможное решение: Когда при включении плитки в сеть температура устанавливается, вся мощность, выделяемая плиткой, рассеивается в окружающую среду. Получаем три уравнения баланса мощностей:

$$\frac{U_1^2}{R} = k(t_1 - t_0)$$

$$\frac{U_2^2}{R} = k(t_2 - t_0)$$

$$\frac{U_3^2}{R} = k(t_3 - t_0)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$$

$$t_0 = \frac{U_2^2 t_1 - U_1^2 t_2}{U_2^2 - U_1^2}$$

Разделив третье уравнение на второе, получим

$$\frac{U_3^2}{U_2^2} = \frac{t_3 - t_0}{t_2 - t_0}$$

$$t_3 = \frac{U_3^2(t_2 - t_0) + U_2^2 t_0}{U_2^2} = \frac{U_3^2}{U_2^2} t_2 - \frac{U_2^2 t_1 - U_1^2 t_2}{U_2^2 - U_1^2} \left(\frac{U_3^2}{U_2^2} - 1 \right) = 154 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Ответ: $t_3 = \frac{U_3^2}{U_2^2} t_2 - \frac{U_2^2 t_1 - U_1^2 t_2}{U_2^2 - U_1^2} \left(\frac{U_3^2}{U_2^2} - 1 \right) = 154 \text{ } ^\circ\text{C}$

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записаны три уравнения баланса мощностей	9
Получено выражение для t_0	4
Получено выражение для искомой температуры	4
Получено значение искомой температуры	3
Всего баллов	20

4. (20 баллов). Точечный источник света движется главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Изображение точечного источника света движется с постоянной скоростью V . Определите среднюю скорость источника при движении изображения источника между точками, одна из которых находится на расстоянии $1,5 F$, а другая – на расстоянии $3F$ от линзы.

Возможное решение: Время движения изображения источника света равно

$$\tau = \frac{1,5F}{V}.$$

Воспользовавшись формулой тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

получим, что, когда изображение источника находился на расстоянии $1,5 F$ от линзы, сам источник находился на расстоянии $3F$ от линзы, а когда изображение источника находилось на расстоянии $3F$ от линзы, сам источник находился на расстоянии $1,5 F$ от линзы. Это значит, что средняя скорость изображения равна V .

Ответ: средняя скорость изображения равна V .

Критерии оценивания решения:

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Определено время движения	4
Записаны выражения для вычисления начальной и конечной точек траектории изображения	12
Записано выражение для средней скорости изображения	4
Всего баллов	20