Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый автомобиль проехал половину пути, второй проехал $26\frac{1}{4}$ км, а когда второй проехал половину пути, первый проехал $31\frac{1}{5}$ км. Обогнав первый автомобиль, второй прибыл в пункт B, сразу повернул обратно и, проехав 2 км, встретился с первым автомобилем. Найдите расстояние между пунктами A и B. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{8x+5}+2\{x\}=2x+2$. Здесь $\{x\}-$ дробная часть числа x, т.е. $\{x\}=x-[x]$. В ответ запишите сумму всех решений. (5 баллов)

3. Найдите наибольшее целое число a, при котором выражение

$$a^2-15a-(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+2)(\operatorname{tg}x+5)(\operatorname{tg}x+8)$$

меньше 35 при любом значении $x\in(-\pi/2\,;\,\pi/2)$. (6 баллов)

4. Даны шесть носков, все разной окраски и легко растяжимы. Выворачивать их наизнанку нельзя. Сколькими способами можно надеть по 3 носка на каждую ногу, учитывая какой надевать раньше, какой позже? (12 баллов)

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3-2t^2-9t-1=0$. Найти $\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{x\,y}{z}$. (12 баллов)

6. На плоскости xOy прямые $y=3x-3$ и $x=-1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через точку $M(1;2)$, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? (12 баллов)

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB=4$ и $BC=3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE=OF$. Найдите квадрат медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B. (16 баллов)

8. Укажите наименьшее целое значение a, при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{y}{a-\sqrt{x}-1}=4,\\ y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}.\end{cases}$$

(16 баллов)

9. Основанием пирамиды TABCD является равнобедренная трапеция ABCD, средняя линия которой равна $5\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции ABCD, на которые ее делит средняя линия, равно 7 : 13. Все боковые грани пирамиды TABCD наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды TAKND, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, AD – большее основание трапеции ABCD. (16 баллов)

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

11 класс

Вариант № 2

1. Группу школьников, направлявшихся в школьный лагерь, планировалось рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако, оказалось, что при этом не удалось посадить трех школьников. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все школьники сели поровну. Сколько школьников было в группе, если известно, что для перевозки школьников было выделено не более 18 автобусов, и в каждый автобус помещается не более 36 человек.
Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$x^2 - xy - 6y^2 - 11 = 0$. Для каждой найденной пары (x, y) вычислите произведение xy. В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

3. Пусть $g(x)=\dfrac{2}{x^2-8x+17}$. Найдите все возможные значения параметра a, при которых неравенство $a^2+6a+\dfrac{727}{145}\le g(g^4(x))\le 10a^2+29a+2$ выполняется при всех действительных x. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями параметра a. (6 баллов)

4. Сколькими способами можно начертить линию $x\sin\sqrt{16-x^2-y^2}=0$ без отрывов и повторов, т.е. не отрывая карандаша и не проводя более одного раза по одной и той же линии? (12 баллов)

5. Для скольких двузначных натуральных чисел n верны ровно два из этих трех утверждений: (А) n нечетно; (Б) n не делится на 3; (В) n делится на 5? (12 баллов)

6. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y=2|x|-x+1$, а прямая AB проходит через точку $M(0;2)$? (16 баллов)

7. В треугольнике ABC угол A равен 45°, угол B равен 60°, биссектрисы AE и CF пересекаются в точке O, причем $OE=\sqrt{3}/3$. Найдите площадь треугольника AEF. Результат округлите до десятых (все промежуточные вычисления проводить точно). (16 баллов)

8. Найдите все целые значение параметра a, при которых система имеет хотя бы одно решение $\begin{cases} y-2=x(x+2), \\ x^2+a^2+2x=y(2a-y). \end{cases}$ В ответе укажите сумму найденных значений параметра a. (16 баллов)

9. Основанием пирамиды TABCD является равнобедренная трапеция ABCD, длина большего основания AD которой равна $12\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции ABCD, на которые ее делит средняя линия, равно 5 : 7. Все боковые грани пирамиды TABCD наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды SAKND, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, точка S принадлежит ребру TD, причем TS : SD = 1 : 2. (20 баллов)