

## Второй (очный) этап академического соревнования

### Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

#### 11 класс

#### Вариант № 1

1. Четыре лифта небоскреба, отличающиеся цветовой гаммой (красный, синий, зеленый и желтый) движутся в разных направлениях и с разной, но постоянной скоростью. Наблюдая за лифтами, некто включил секундомер, и, глядя на его показания, стал записывать: 36-я секунда – красный лифт догнал синий (двигаясь с ним в одном направлении). 42-я секунда – красный лифт разминулся с зеленым (двигаясь в разных направлениях), 48-я секунда – красный лифт разминулся с желтым, 51-я секунда – желтый лифт разминулся с синим, 54-я секунда – желтый лифт догнал зеленый лифт. На какой секунде от начала отсчета зеленый лифт разминется с синим, если за период наблюдения лифты не останавливались и не меняли направления движения? (12 баллов)

$$\frac{3f(1) + 6f(0) - f(-1)}{f(0) - f(-2)}$$

2. Найдите наименьшее значение выражения  $\frac{3f(1) + 6f(0) - f(-1)}{f(0) - f(-2)}$ , если  $f(x) = ax^2 + bx + c$  – произвольная квадратичная функция, удовлетворяющая условию  $b > 2a$  и принимающая неотрицательные значения при всех действительных  $x$ . (12 баллов)

3. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых число  $2^{10} + 2^{13} + 2^{14} + 3 \cdot 2^n$  является квадратом натурального числа. (16 баллов)

4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Известно, что центры вписанной в треугольник  $ABD$  и описанной около треугольника  $ABC$  совпадают. Найдите  $CD$ , если  $AC = \sqrt{5} + 1$ . Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при котором для любого значения параметра  $a \in [-2; 1]$  неравенство  $a^2 + b^2 - \sin^2 2x - 2(a + b)\cos 2x - 2 > 0$  не выполняется хотя бы для одного значения  $x$ . (20 баллов)

6. Основанием пирамиды  $TABCD$  является ромб  $ABCD$ . Высота пирамиды  $TK$  равна 1, точка  $K$  лежит на прямой, содержащей диагональ основания  $AC$ , причем  $KC = KA + AC$ . Боковое ребро  $TC$  равно  $2\sqrt{2}$ , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите длину стороны основания и угол между боковым ребром  $TA$  и плоскостью боковой грани  $TCD$ . (20 баллов)

## Второй (очный) этап академического соревнования

### Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

11 класс

#### Вариант № 13

1. Цех выпускает трансформаторы видов А и В. На один трансформатор вида А расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на трансформатор вида В – 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации трансформатора вида А прибыль составляет 12 тысяч рублей, вида В – 10 тысяч рублей. Сменный фонд железа составляет 481 кг, проволоки – 301 кг. Сколько трансформаторов видов А и В нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? Чему будет равна при этом наибольшая прибыль? (12 баллов)

2. Решите неравенство  $(5 - \cos 2(x + y) + 4 \sin(x + y)) \log_2(3^x + 3^{-x}) \leq 2$ . (12 баллов)

3. Петя задумал пять чисел. На доске он написал их попарные суммы: 7, 9, 12, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 29. Какие числа задумал Петя? (16 баллов)

4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Известно, что центры вписанной в треугольник  $ABD$  и описанной около треугольника  $ABC$  совпадают. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $CD = 4$ . Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при котором для любого значения параметра  $a \in [-1; 2]$  неравенство  $\operatorname{tg}^2 x + 4(a + b) \operatorname{tg} x + a^2 + b^2 - 18 < 0$  выполняется при каждом  $x \in [-\pi/4; \pi/4]$ . (20 баллов)

6. Основанием пирамиды  $TABCD$  является ромб  $ABCD$ . Высота пирамиды  $TK$  равна 5, точка  $K$  лежит на прямой, содержащей диагональ основания  $AC$ , причем  $KC = KA + AC$ . Боковое ребро  $TC$  равно  $6\sqrt{5}$ , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите длину стороны основания и угол между стороной основания  $AB$  и боковой гранью  $TBC$ . (20 баллов)