Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 1

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами только по информатике стали 12 человек, только по математике – 8, по информатике или математике – 40, по математике и физике – 7, по математике и информатике – 10, по физике и информатике – 11, хотя бы по одному из трех предметов – 51. Сколько школьников стали призерами по физике? (8 баллов)

2. Решите уравнение $x^2+y^2+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=2|x+y|-2xy$. (8 баллов)

3. Сколько процентов составляет сумма шести последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с пятого от суммы ее начальных шести членов, если отношение пятого члена арифметической прогрессии к десятому ее члену равно 31? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}=\cos x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{8(x^3+27)\sqrt{x^2+8x+16}}{(x^2-3x+9)(x^2+7x+12)}\geq x+3$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{108}\left(14\cos 2x+28\sin x+15\right)\right)$.

(10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса 3, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию AC, равна 1,5. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB=2\sqrt{3}$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y=x+2|x|$, а прямая AB проходит через точку $M(0;1)$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения *a*, при которых уравнение

$$\left(x^2+8x-9+\left(\frac{|x+4|}{x+4}+\frac{|x|}{x}+a\right)^2\right)\sqrt{5(x+7)-7(a+2)}=0$$

имеет ровно три различных решения, и решите его при каждом *a*. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $4\sqrt{2}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN = 3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно $\sqrt{4/7}$. (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 4

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами только по информатике стали 10 человек, только по математике – 7, по информатике или математике – 39, по математике и физике – 8, по математике и информатике – 11, по физике и информатике – 9, хотя бы по одному из трех предметов – 51. Сколько школьников стали призерами по физике? (8 баллов)

2. Решите уравнение $4x^2+y^2+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=4|2x-y|+4xy$. (8 баллов)

3. Сколько процентов составляет сумма восьми последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с шестого от суммы ее начальных восьми членов, если отношение седьмого члена арифметической прогрессии к десятому ее члену равно 5?

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x}=\sin x+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{6(x^3-8)\sqrt{x^2+6x+9}}{(x^2+2x+4)(x^2+x-6)}\geq x-2.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{9}(\cos 2x-2\sin x)\right).$ (10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса $4\sqrt{2}$, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию AC, равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB=8$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y=x-3|x|$, а прямая AB проходит через точку $M(0;-1)$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2+2x-24+\left(\frac{|x+1|}{x+1}+\frac{|x-3|}{x-3}+a\right)^2\right)\sqrt{5(x+4)-7(a+2)}=0$$

имеет ровно три различных решения, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 8, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN = 3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно $2/3$. (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 5

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами по математике стали 29 человек, по физике – 30, по информатике – 31, по всем трем предметам – 4, по математике или физике – 50, по математике или информатике – 49, по физике или информатике – 51. Сколько школьников стали призерами хотя бы по одному из трех предметов? (8 баллов)

2. Решите уравнение $x^2+y^2+1+\sqrt{xy-6}=2|x-y|+2xy$. (8 баллов)

3. Найдите отношение шестнадцатого члена арифметической прогрессии к одиннадцатому ее члену, если сумма шести последовательных членов этой прогрессии, начиная с пятого составляет 40% суммы ее начальных шести членов. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}=\cos x+\dfrac{\sqrt{3}\cos^2 x}{\sin x}$. (8 баллов)

5.Решите неравенство $\dfrac{3(4x-x^2-16)(x^2+6x+8)}{(x^3+64)\sqrt{x^2+4x+4}}\le x^2+x-3$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{54}\left(30+14\cos x-7\cos 2x\right)\right)$. (10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса 3, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию BC, равна 1,5. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB=3\sqrt{2}$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если O - начало координат, координаты вершин A и B удовлетворяют уравнению $y+2|y|-x=0$, а прямая AB проходит через точку $M(1;0)$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2-2x-24+\left(\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-5|}{x-5}+a\right)^2\right)\sqrt{a-7x+32}=0$$

имеет ровно два различных решения, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $2\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно 1. (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 8

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами по математике стали 30 человек, по физике – 31, по информатике – 32, по всем трем предметам – 4, по математике или физике – 52, по математике или информатике – 51, по физике или информатике – 53. Сколько школьников стали призерами хотя бы по одному из трех предметов? (8 баллов)

2. Решите уравнение $x^2+y^2+4+\sqrt{xy-48}=4|x-y|+2xy$. (8 баллов)

3. Найдите отношение сорокового члена арифметической прогрессии к четырнадцатому ее члену, если сумма восьми последовательных членов этой прогрессии, начиная с шестого составляет 20% суммы ее начальных восьми членов. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x}=\sqrt{3}\sin x+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{2(5x-x^2-25)(2x^2+17x+35)}{(x^3+125)\sqrt{4x^2+28x+49}}\le x^2+3x-2$.

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{9}\left(4{,}5-2\cos x+\cos 2x\right)\right).$$ (10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса $4\sqrt{2}$, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию BC, равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB=8$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если O - начало координат, координаты вершин A и B удовлетворяют уравнению $3|y|-y+x=0$, а прямая ABпроходит через точку $M(-1;0)$? (12 баллов)

9. Укажите все значения *a*, при которых уравнение

$$\left(x^2-4x-21+\left(\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x-6|}{x-6}+a\right)^2\right)\sqrt{a-7x+39}=0$$

имеет ровно два различных решения, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 4, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно $1/3$. (12 баллов)