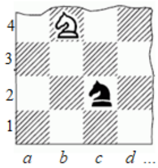
Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2018 г.

Вариант № 11

1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 10×10 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали). (12 баллов)



2. Решите неравенство $\frac{(|x-5|-|x-1|)\log_4(6-x)}{(9^x-12\cdot3^x+27)\log_3 x}\leq 0.$ (12 баллов)

3. Окружность радиуса 1 касается сторон *AB* и *BC* треугольника *ABC*, а окружность радиуса 3 внешним образом касается первой окружности и сторон *AC* и *BC* треугольника *ABC*. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону *BC*, пересекает отрезки *AB* и *AC* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите длины сторон треугольника *ABC*, если $\angle AMN=30°$, $\angle ANM=90°$.

(16 баллов)

4. На произвольной параболе даны точки *A* и *B*. Точка *C* выбрана на дуге параболы между *A* и *B*, так, что треугольник *ABC* имеет максимальную площадь. Прямая, проходящая через точку *C* параллельно оси симметрии параболы, пересекает отрезок *AB* в точке *M*. Найдите отношение *AM* : *MB*. (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_{|x-1|}(ax)=2\log_{|x-1|}(x+y),\\ 3-x=\sqrt{x^2-6x+y+8}\end{cases}$$

имеет единственное решение, и найдите это решение при каждом a. (20 баллов)

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, которая параллельна диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходит через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1=3B_1M$, расстояние между AC_1 и секущей плоскостью равно 3, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$.

(20 баллов).

Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2018 г.

Вариант № 16

1. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 42 натуральных делителя (включая единицу и само число). (12 баллов)

2. Решите неравенство $\dfrac{(x+9-4\sqrt{x+6})\log_2(x+1)}{(4^x-3\cdot 2^x+2)\log_5(5-x)}\geq 0.$ (12 баллов)

3. Окружность радиуса 4 касается сторон AB и BC треугольника ABC, а окружность радиуса 12 внешним образом касается первой окружности и сторон AC и BC треугольника ABC. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $\angle AMN=30°$, $\angle ANM=90°$.

(16 баллов)

4. Найдите площадь плоской фигуры, которая на координатной плоскости Oxy задана системой неравенств $x^2+y^2+2(y-x)\leq 23,\;\; y+|x-2|+1\leq 0$. (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$\begin{cases}\log_{|x+4|}(ax+5a)=2\log_{|x+4|}(x+y),\\ x+2+\sqrt{x^2+4x+y-2}=0\end{cases}$ имеет два различных решения, и найдите эти решения

при каждом a. (20 баллов)

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1=3B_1M$, расстояние от точки C до секущей плоскости равно $\sqrt{2}$, а сторона основания призмы равна $4\sqrt{7}$.

(20 баллов)

Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2018 г.

Вариант № 17

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении. (12 баллов)

2. Решите уравнение $\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$. (12 баллов)

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна $0{,}5$. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK=3$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC=15$. (16 баллов)

4. Решите неравенств $\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\geq 50g(g^2(x))$, где $g(x)=\frac{3}{x^2-4x+5}$.

(20 баллов)

5. Найдите все значения параметров *a* и *b*, при которых уравнение $6a-2ab\,\mathrm{tg}x+\sqrt{2(x+\left|x+b\,\mathrm{tg}x\right|+b\,\mathrm{tg}x)}=4+2ax$ имеет единственное решение, если $\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}\,x$ при $x\neq\pi/2+\pi n,$ и $\mathrm{tg}x=0$ при $x=\pi/2+\pi n,\quad n\in Z$. Укажите это решение при каждом из найденных значений *a* и *b*. (20 баллов)

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна 21, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$. (20 баллов)

Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2018 г.

Вариант № 20

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинакового размера и одинаковой формы – равносторонних треугольников. Каждый треугольник отрезками, соединяющими его центр с вершинами, условно разделен на 3 одинаковые части (равнобедренные треугольники), и одна из этих частей закрашена непрозрачной краской (цвета закраски частей различных стекол различны). Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин по вертикали), причем закрашенными поверхностями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся эта стопка в итоге оказалась хотя бы частично прозрачной (не закрашенной во всех слоях) в вертикальном направлении.

(12 баллов)

2. Решите уравнение $\sin^4(2019x)+\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x)=1$.

(12 баллов)

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна $1/18$. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK=1$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC=5$.

(16 баллов)

4. Решите неравенство $\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\geq 13g(g^2(x))$, где $g(x)=\frac{9}{x^2-6x+12}$.

(20 баллов)

5. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение $2a-ab\operatorname{ctg}x+2\sqrt{2(x+|x+b\operatorname{ctg}x|+b\operatorname{ctg}x)}=6+ax$ имеет единственное решение, если $\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}x$ при $x\neq\pi n,$ и $\operatorname{ctg}x=0$ при $x=\pi n,\ n\in Z$. Укажите это решение при каждом из найденных значений a и b.

(20 баллов)

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна $7\sqrt{3}/4$, а сторона основания призмы равна $\sqrt{14/3}$.

(20 баллов)