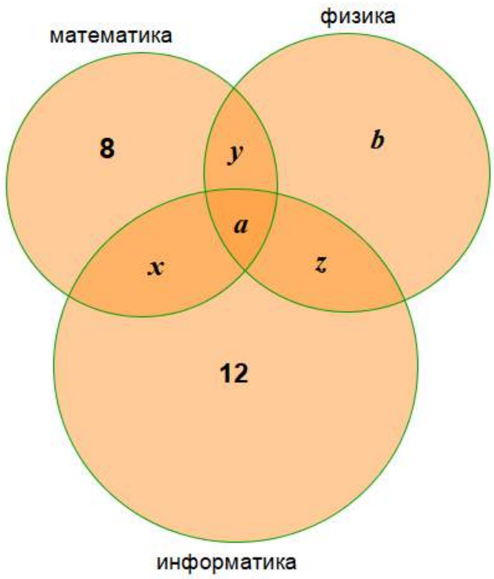
Решение варианта №1

1. Решение:

Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры по всем трем предметам, b – призеры только по физике. Тогда

$$\begin{cases} x+y+z+a+20=40, \\ y+a=7, \\ x+a=10, \\ z+a=11, \\ x+y+z+a+b+20=51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+a=20, \\ y=7-a, \\ x=10-a, \\ z=11-a, \\ b=11, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10-a+7-a+11-a+a=20, \\ y=7-a, \\ x=10-a, \\ z=11-a, \\ b=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4, \\ y=3, \\ x=6, \\ z=7, \\ b=11. \end{cases}$$



Отсюда получаем, что призерами по физике стали $y+z+a+b=25$ участников.

Ответ: 25.

2: Решение:

$$x^2+y^2+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=2|x+y|-2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-2|x+y|+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$$

$(x+y)^2-2|x+y|+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow (|x+y|-1)^2+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$ (оба слагаемые неотрицательны) $(|x+y|-1)^2=0$ и $\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x+y|=1, \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=1, \\ x+y=-1, \end{array}\right. \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1-x, \\ y=-1-x, \end{array}\right. \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-x, \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1-x, \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-x, \\ 4x^2-4x-15=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1-x, \\ 4x^2+4x-15=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2{,}5,\ y=-1{,}5, \\ x=-1{,}5,\ y=2{,}5, \\ x=-2{,}5,\ y=1{,}5, \\ x=1{,}5,\ y=-2{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(2{,}5;-1{,}5)$, $(-2{,}5;1{,}5)$, $(1{,}5;-2{,}5)$, $(-1{,}5;2{,}5)$.

3. Решение:

$$\frac{a_5}{a_{10}}=31 \Leftrightarrow \frac{a_1+4d}{a_1+9d}=31 \Leftrightarrow a_1+4d=31(a_1+9d) \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{55}{6}$$

$$n=\frac{S_{5-10}}{S_6}\cdot 100=\frac{2a_5+5d}{2a_1+5d}\cdot 100=\frac{2a_1+13d}{2a_1+5d}\cdot 100=\frac{2a_1/d+13}{2a_1/d+5}\cdot 100=\frac{-55+39}{-55+15}\cdot 100=\frac{-16}{-40}\cdot 100=40\%$$

Ответ: 40%

4. Решение:

Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$. Получим $\sqrt{1+\operatorname{tg} x}=\sin x+\cos x$. При условии $\sin x+\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq \frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$1+\operatorname{tg} x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x-2\sin x\cos x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x=0$,

$\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\cos x\right)=0$. Таким образом, приходим к уравнению $\cos^2 x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения:

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, \quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

5. Решение:

$$\frac{8(x^3+27)\sqrt{x^2+8x+16}}{(x^2-3x+9)(x^2+7x+12)}\geq x+3 \Leftrightarrow \frac{8(x+3)(x^2-3x+9)\sqrt{(x+4)^2}}{(x^2-3x+9)(x+3)(x+4)}\geq x+3 \Leftrightarrow$$

$$x\neq -3,\quad \frac{8|x+4|}{(x+4)}\geq x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-4;-3)\cup(-3;+\infty),\\ x\leq 5,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-4),\\ x\leq -11.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-11]\cup(-4;-3)\cup(-3;5].$$

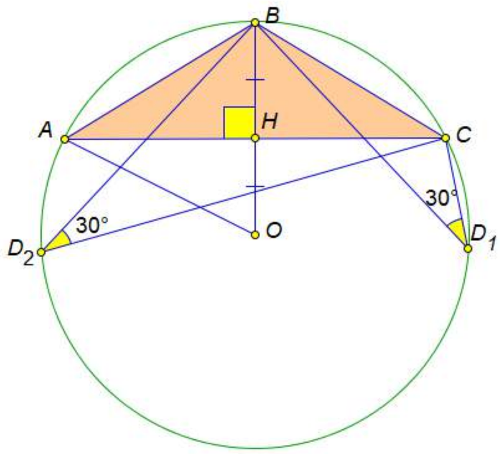
Ответ: $x\in(-\infty;-11]\cup(-4;-3)\cup(-3;5]$.

6. Решение:

Найдем множество значений функции $z = g(x) = 14\cos 2x + 28\sin x + 15$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \sin x$. Тогда $z = 14(1-2t^2) + 28t + 15 = 29 - 28(t^2 - t) = 36 - 28(t-0{,}5)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [-27; 36]$. Функция $u = \frac{\pi}{108} z$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y = \cos u$, где $u \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Следовательно, $E_f = [0{,}5; 1]$.

Ответ: $E_f = [0{,}5; 1]$.

7. Решение: Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $BO = 3$, BH - высота треугольника, проведенная к основанию AC, $BH = 1{,}5$, $BH = HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB = BC = 3$. Поскольку $AB = 2BH$, то угол $\angle BAC = 30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается на ту же дугу, что и угол BAC, следовательно, $\angle BDC = 30°$. Пусть $DC = x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC\cos 30°$, или



$3^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 4\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $x^2 - 6x + 3 = 0$, $x_1 = 3 - \sqrt{6}$, $x_2 = 3 + \sqrt{6}$. Оба ответа подходят.

$S_1 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 30° = \sqrt{3}(3-\sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $S_2 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 30° = \sqrt{3}(3+\sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

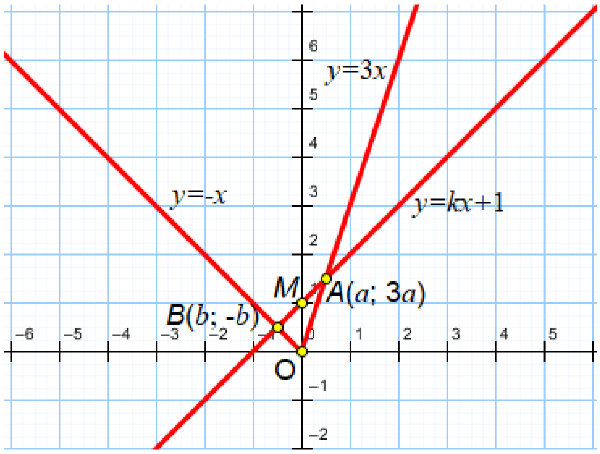
Ответ: $\frac{3}{2}(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$.

8. Решение:

$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(a; 3a)$, $B(b; -b)$,

$S_{AOM} = \frac{1}{2} OM \cdot a$, $S_{BOM} = \frac{1}{2} OM \cdot (-b)$, $OM = 1$,

$S_{AOB} = \dfrac{a-b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $y = kx+1$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $3a = ka+1,\quad a = \dfrac{1}{3-k},\quad -b = kb+1,\ b = -\dfrac{1}{k+1}$. Выразим площадь треугольника



$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-k}+\frac{1}{k+1}\right) = \frac{2}{3+2k-k^2} = \frac{2}{4-(k-1)^2}$$

.

Поскольку $4-(k-1)^2 \le 4$, то $S_{AOB} = \dfrac{2}{4-(k-1)^2} \ge \dfrac{1}{2}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB} = \dfrac{1}{2}$ при $k=1$.

Ответ: 1/2.

9. Решение:

ОДЗ: $x \ne -4,\ x \ne 0,\ 5x-7a+21 \ge 0$

1) $5(x+7)-7(a+2)=0,\quad x = \dfrac{7}{5}x - \dfrac{21}{5}$.

2) $x^2+8x-9+\left(\dfrac{|x+4|}{x+4}+\dfrac{|x|}{x}+a\right)^2 = 0$ или $(x+4)^2+\left(\dfrac{|x+4|}{x+4}+\dfrac{|x|}{x}+a\right)^2 = 25$

Раскроем модули:

2.1 $\quad x < -4,\quad (x+4)^2+(a-2)^2 = 25$,

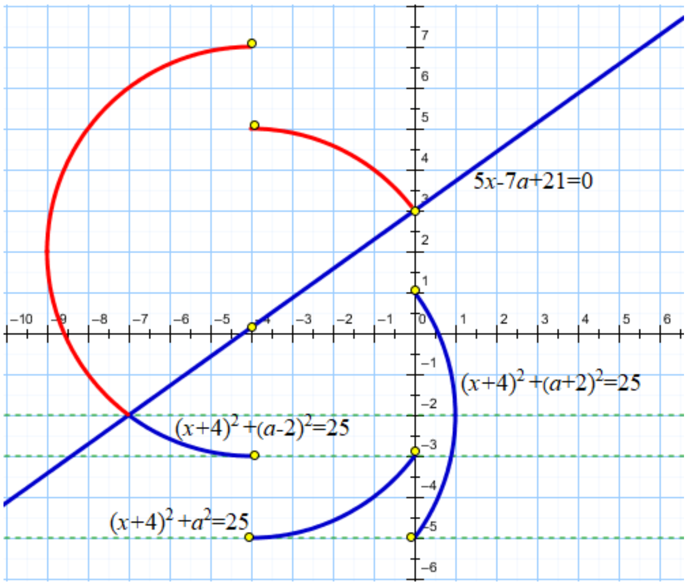
$x = -4-\sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $\quad -4 < x < 0,\ (x+4)^2+a^2 = 25$,

$x = -4+\sqrt{25-a^2}$;

2.3 $x > 0,\ (x+4)^2+(a+2)^2 = 25,\ x = -4+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $5x-7a+21\geq 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x=-4, x=0$. Заметим, что точка (-7, -2) принадлежит как прямой $5(x+7)-7(a+2)=0$, так и окружности $(x+4)^2+(a-2)^2=25$. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые в трех точках при $a\in(-5;-3)\cup(-3;-2)$.



Ответ: при $a\in(-5;-3)$ имеем решения $x_1=\frac{7a-21}{5}$, $x_2=-4+\sqrt{25-a^2}$, $x_3=-4+\sqrt{25-(a+2)^2}$;

при $a\in(-3;-2)$ имеем решения $x_1=\frac{7a-21}{5}$, $x_2=-4-\sqrt{25-(a-2)^2}$ $x_3=-4+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN=3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно d.

Вариант	1
a	$4\sqrt{2}$
d	$\sqrt{4/7}$

Решение: Проведем $PN\parallel AM$, $S=(PN)\cap(AB)$. Пусть H - середина AB, $MH=1/2\cdot AT$, $AN=1/4\cdot AT=1/2\cdot MH$. $\Rightarrow$ $SA=1/2\cdot AH=1/4\cdot AB$. Поскольку $PN=3/4\cdot AM$, $SN=1/2\,AM\Rightarrow SN=2/3\cdot PN$, или $SN=2/5\cdot SP$.

Проведем SD, $F=(SD)\cap(BC)$, $CE\parallel SF$. Поскольку $AD=DC$, $SD=1/2\cdot EC$ и $EC=6/5\cdot SF$, $SD=3/5\cdot SF$.

Имеем $S_{NSD}=\frac{1}{2}\cdot SN\cdot SD\sin\angle NSD=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}SP\cdot\frac{3}{5}SF\sin\angle PSF=\frac{6}{25}S_{PSF}$. Тогда площадь сечения $S_{NDFP}=\frac{19}{25}S_{PSF}=\frac{19}{6}S_{NSD}$.

Проведем $AK\perp SD$, $AL\perp KN$, длина AL равна заданному в условии задачи расстоянию d между AM и секущей плоскостью. В треугольнике SAD имеем

$$SD=\sqrt{AS^2+SD^2-2AS\cdot SD\cos120^\circ}=\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{4}-2\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a\sqrt{7}}{4},\quad S_{SAD}=\frac{1}{2}SA\cdot AD\sin120^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}.$$

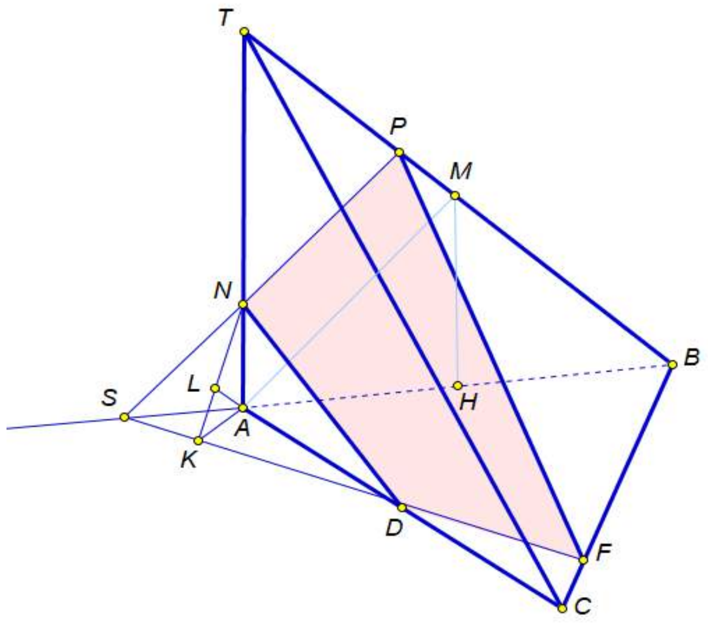
Но $S_{SAD}=\frac{1}{2}AK\cdot SD,$ отсюда $\frac{1}{2}AK\cdot\frac{a\sqrt{7}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}$ и $AK=\frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}$. В треугольнике AKN имеем

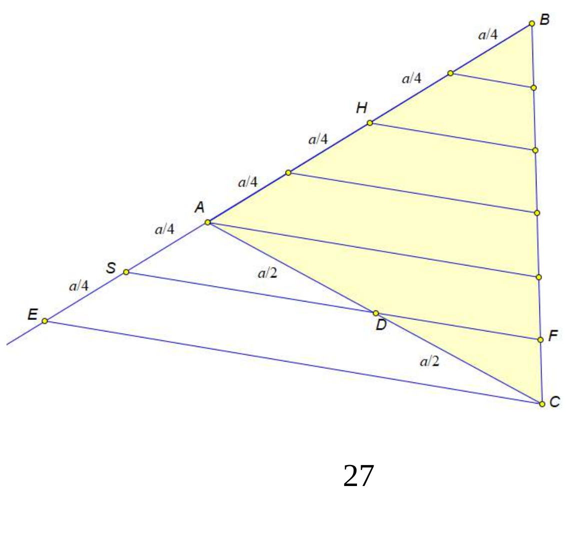
$$KL=\sqrt{AK^2-AL^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{16\cdot 7}-d^2}=\frac{\sqrt{3a^2-112d^2}}{4\sqrt{7}},\qquad KN=\frac{AK^2}{KL}=\frac{3a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2-112d^2}}.$$

Площадь треугольника NSD: $S_{NSD}=\frac{1}{2}\cdot SD\cdot KN=\frac{3a^3}{32\sqrt{3a^2-112d^2}}$. Тогда $S_{NDFP}=\frac{19a^3}{64\sqrt{3a^2-112d^2}}$.

Ответ: 19/2

Рисунки к задаче

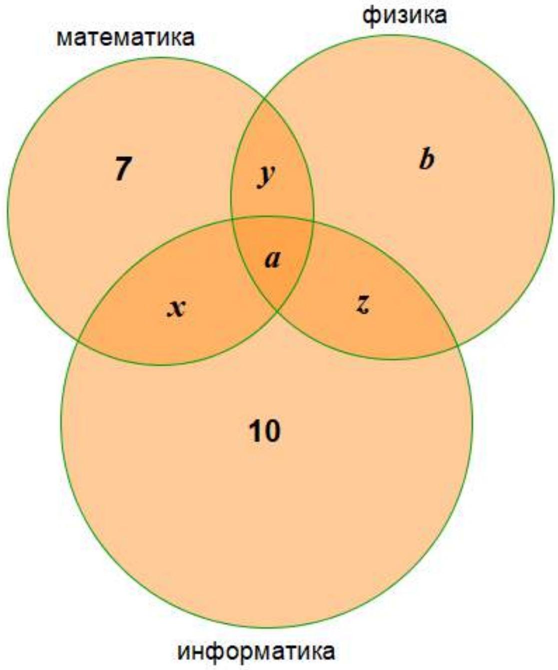




Решение варианта №4

1. Решение:

Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры по всем трем предметам, b – призеры только по физике. Тогда



$$\begin{cases} x+y+z+a+17=39, \\ y+a=8, \\ x+a=11, \\ z+a=9, \\ x+y+z+a+b+17=51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+a=22, \\ y=8-a, \\ x=11-a, \\ z=9-a, \\ b=12, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 11-a+8-a+9-a+a=22, \\ y=8-a, \\ x=11-a, \\ z=9-a, \\ b=12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3, \\ y=5, \\ x=8, \\ z=6, \\ b=12. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что призерами по физике стали $y+z+a+b=26$ участников.

Ответ: 26.

2. Решение:

$4x^2+y^2+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=4|2x-y|+4xy \Leftrightarrow 4x^2-4xy+y^2-4|2x-y|+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow$

$(2x-y)^2-4|2x-y|+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow (|2x-y|-2)^2+\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow$ (оба слагаемые неотрицательны) $(|2x-y|-2)^2=0$ и $\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |2x-y|=2, \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x-y=2, \\ 2x-y=-2, \end{array}\right. \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2x-2, \\ y=2x+2, \end{array}\right. \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2x-2, \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=2x+2, \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2x-2, \\ 5x^2-8x-4=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=2x+2, \\ 5x^2+8x-4=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-0{,}4,\ y=-2{,}8, \\ x=2,\ y=2, \\ x=0{,}4,\ y=2{,}8, \\ x=-2,\ y=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-0{,}4; -2{,}8)$, $(2; 2)$, $(0{,}4; 2{,}8)$, $(-2; -2)$.

3. Решение:

$$\frac{a_7}{a_{10}}=5 \Leftrightarrow \frac{a_1+6d}{a_1+9d}=5 \Leftrightarrow a_1+6d=5(a_1+9d) \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{39}{4}$$

$$n=\frac{S_{6-13}}{S_8}\cdot 100=\frac{2a_6+7d}{2a_1+7d}\cdot 100=\frac{2a_1+17d}{2a_1+7d}\cdot 100=\frac{2a_1/d+17}{2a_1/d+7}\cdot 100=\frac{-39+34}{-39+14}\cdot 100=\frac{-5}{-25}\cdot 100=20\%$$

Ответ: 20%

4. Решение: Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{ctg} x$. Получим $\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}=\sin x+\cos x$. При условии $\sin x+\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$$1+\operatorname{ctg} x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x, \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x-2\sin x\cos x=0, \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-2\sin x\cos x=0,$$

$$\cos x\left(\frac{1}{\sin x}-2\sin x\right)=0.$$

Таким образом, приходим к уравнению: $\sin^2 x=\frac{1}{2}$, $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

5. Решение: $\frac{6(x^3-8)\sqrt{x^2+6x+9}}{(x^2+2x+4)(x^2+x-6)}\geq x-2. \Leftrightarrow \frac{6(x-2)(x^2+2x+4)\sqrt{(x+3)^2}}{(x^2+2x+4)(x-2)(x+3)}\geq x-2 \Leftrightarrow$

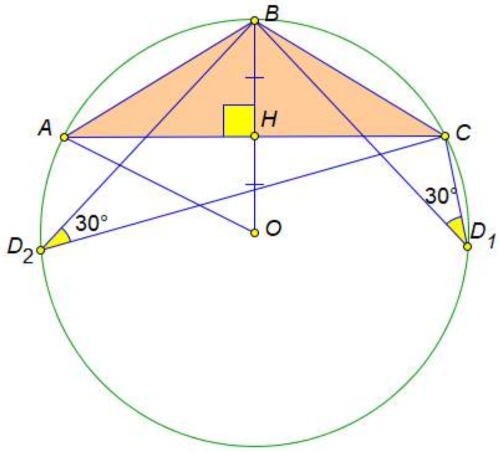
$$x\neq 2,\quad \frac{6|x+3|}{(x+3)}\geq x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;2)\cup(2;+\infty),\\ x\leq 8,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-3),\\ x\leq -4.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-4]\cup(-3;2)\cup(2;8].$$

Ответ: $x\in(-\infty;-4]\cup(-3;2)\cup(2;8]$.

6. Решение: Найдем множество значений функции $z=g(x)=\cos 2x-2\sin x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t=\sin x$. Тогда

$z=(1-2t^2)-2t= \quad =1-2(t^2+t)=1{,}5-2(t+0{,}5)^2$ при $t\in[-1;1]$, и $E_g=[-3;1{,}5]$. Функция $u=\dfrac{\pi}{9}z$ принимает все значения из промежутка $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y=\cos u$, где $u\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$. Следовательно, $E_f=[0{,}5;1]$.

Ответ: $E_f=[0{,}5;1]$.



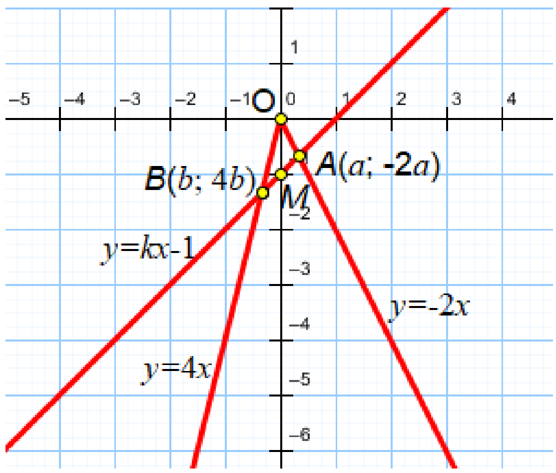
7. Решение: Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $BO=4\sqrt{2}$, BH - высота треугольника, проведенная к основанию AC, $BH=2\sqrt{2}$, $BH=HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB=BC=4\sqrt{2}$. Поскольку $AB=2BH$, то угол $\angle BAC=30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается на ту же дугу, что и угол BAC, следовательно, $\angle BDC=30°$. Пусть $DC=x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем $BC^2=DB^2+DC^2-2DB\cdot DC\cos 30°$, или

$(4\sqrt{2})^2=8^2+x^2-16\cdot x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, или $x^2-8\sqrt{3}x+32=0$, $x_1=4\sqrt{3}-4$, $x_2=4\sqrt{3}+4$. Оба ответа подходят.

$$S_1=\frac{1}{2}DB\cdot DC\sin 30°=4(4\sqrt{3}-4)\cdot\frac{1}{2}=8(\sqrt{3}-1),\quad S_2=\frac{1}{2}DB\cdot DC\sin 30°=4(4\sqrt{3}+4)\cdot\frac{1}{2}=8(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $8(\sqrt{3}\pm 1)$.

8. Решение:



$S_{AOB}=S_{AOM}+S_{BOM}$, $A(a;-2a)$, $B(b;4b)$,

$S_{AOM}=\dfrac{1}{2}OM\cdot a$, $S_{BOM}=\dfrac{1}{2}OM\cdot(-b)$, $OM=1$,

$S_{AOB}=\dfrac{a-b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $y=kx-1$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $-2a=ka-1$, $a=\dfrac{1}{2+k}$,

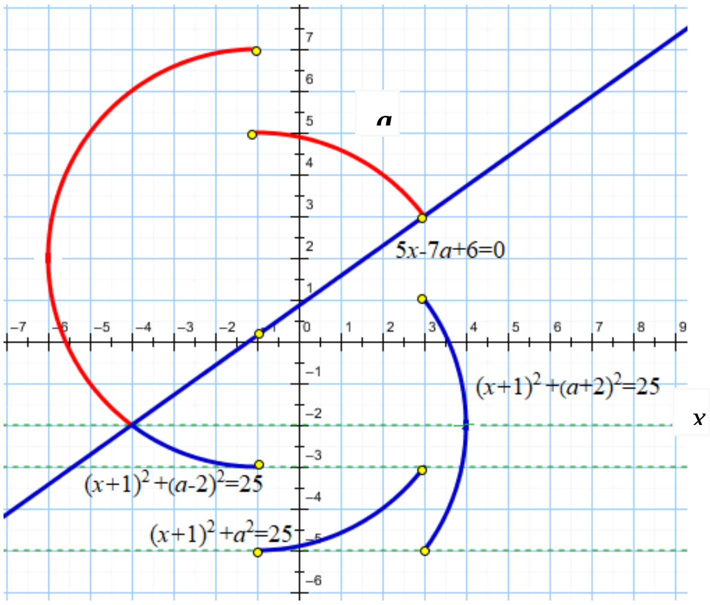
$4b=kb-1$, $b=-\dfrac{1}{4-k}$. Выразим площадь треугольника

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+k}+\frac{1}{4-k}\right)=\frac{3}{8+2k-k^2}=\frac{3}{9-(k-1)^2}.$$

Поскольку $9-(k-1)^2\le 9$, то $S_{AOB}=\dfrac{3}{9-(k-1)^2}\ge\dfrac{1}{3}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB}=1/3$ при $k=1$.

Ответ: $1/3$.

9. Решение:



ОДЗ: $x\ne-1, x\ne 3,\ 5x-7a+6\ge 0$

1) $5(x+4)-7(a+2)=0,\quad x=\dfrac{7}{5}a-\dfrac{6}{5}.$

2) $x^2+2x-24+\left(\dfrac{|x+1|}{x+1}+\dfrac{|x-3|}{x-3}+a\right)^2=0$ или

$$(x+1)^2+\left(\frac{|x+1|}{x+1}+\frac{|x-3|}{x-3}+a\right)^2=25$$

Раскроем модули:

2.1 $\quad x<-1,\quad (x+1)^2+(a-2)^2=25$,

$x=-1-\sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $\ -1<x<3,\ (x+1)^2+a^2=25$, $x=-1+\sqrt{25-a^2}$; 2.3 $x>3,\ (x+1)^2+(a+2)^2=25$,

$x=-1+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $5x-7a+6\ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x=-1, x=3$. Заметим, что точка (-4, -2) принадлежит как прямой $5(x+4)-7(a+2)=0$, так и окружности $(x+1)^2+(a-2)^2=25$. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые в трех точках при $a\in(-5;-3)\cup(-3;-2)$.

Ответ: при $a\in(-5;-3)$ имеем решения $x_1=\dfrac{7}{5}a-\dfrac{6}{5},\ \ x_2=-1+\sqrt{25-a^2},\ x_3=-1+\sqrt{25-(a+2)^2}$;

при $a\in(-3;-2)$ имеем решения $x_1=\dfrac{7}{5}a-\dfrac{6}{5},\ \ x_2=-1-\sqrt{25-(a-2)^2}\ \ x_3=-1+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане

AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN = 3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно d.

Вариант	4
a	8
d	2/3

Решение: Проведем $PN \| AM,\ S = (PN) \cap (AB)$.Пусть H - середина AB, $MH = 1/2 \cdot AT$, $AN = 1/4 \cdot AT = 1/2 \cdot MH.$ $\Rightarrow$ $SA = 1/2 \cdot AH = 1/4 \cdot AB.$ Поскольку $PN = 3/4 \cdot AM$, $SN = 1/2\, AM \Rightarrow SN = 2/3 \cdot PN,$ или $SN = 2/5 \cdot SP.$

Проведем $SD,$ $F = (SD) \cap (BC),$ $CE \| SF.$ Поскольку $AD = DC$, $SD = 1/2 \cdot EC$ и $EC = 6/5 \cdot SF$, $SD = 3/5 \cdot SF.$

Имеем $S_{NSD} = \dfrac{1}{2} \cdot SN \cdot SD \sin \angle NSD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} SP \cdot \dfrac{3}{5} SF \sin \angle PSF = \dfrac{6}{25} S_{PSF}$. Тогда площадь сечения $S_{NDFP} = \dfrac{19}{25} S_{PSF} = \dfrac{19}{6} S_{NSD}$.

Проведем $AK \perp SD,$ $AL \perp KN,$ длина AL равна заданному в условии задачи расстоянию d между AM и секущей плоскостью. В треугольнике SAD имеем

$$SD = \sqrt{AS^2 + SD^2 - 2AS \cdot SD \cos 120^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{7}}{4}, \quad S_{SAD} = \frac{1}{2} SA \cdot AD \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{32}.$$

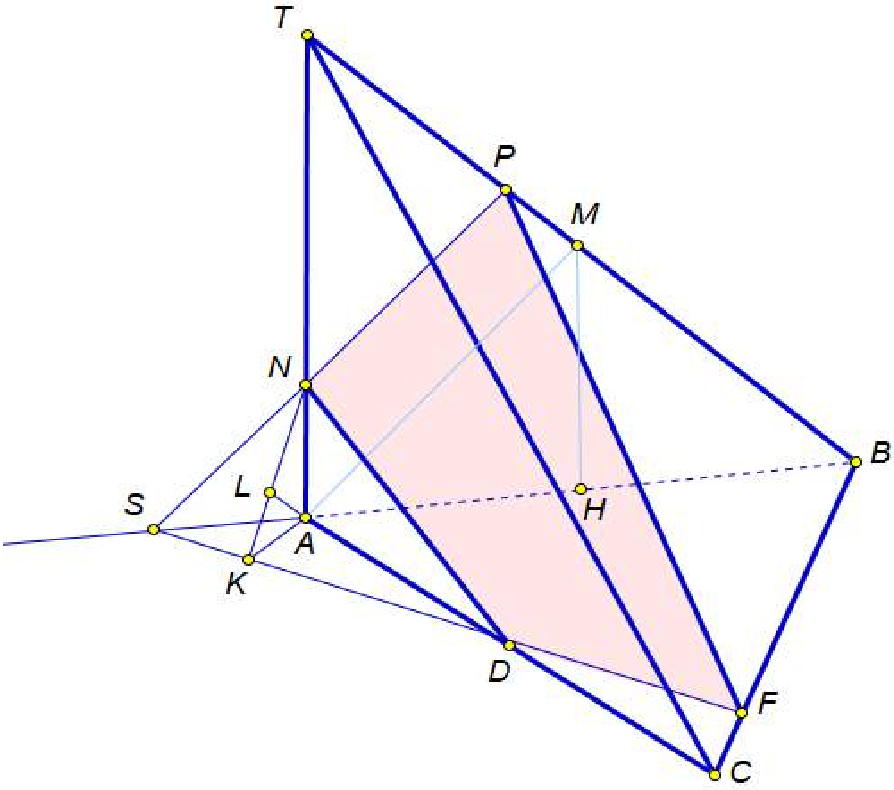
Но $S_{SAD} = \dfrac{1}{2} AK \cdot SD,$ отсюда $\dfrac{1}{2} AK \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$ и $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}$. В треугольнике AKN имеем

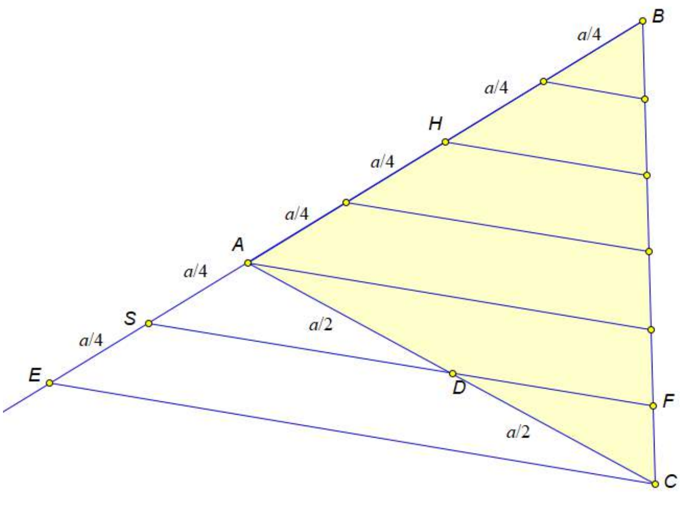
$$KL = \sqrt{AK^2 - AL^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16 \cdot 7} - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 112d^2}}{4\sqrt{7}}, \qquad KN = \frac{AK^2}{KL} = \frac{3a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 112d^2}}.$$

Площадь треугольника NSD: $S_{NSD} = \dfrac{1}{2} \cdot SD \cdot KN = \dfrac{3a^3}{32\sqrt{3a^2 - 112d^2}}$. Тогда $S_{NDFP} = \dfrac{19a^3}{64\sqrt{3a^2 - 112d^2}}$.

Ответ: $57/2\sqrt{5}$

Рисунки к задаче

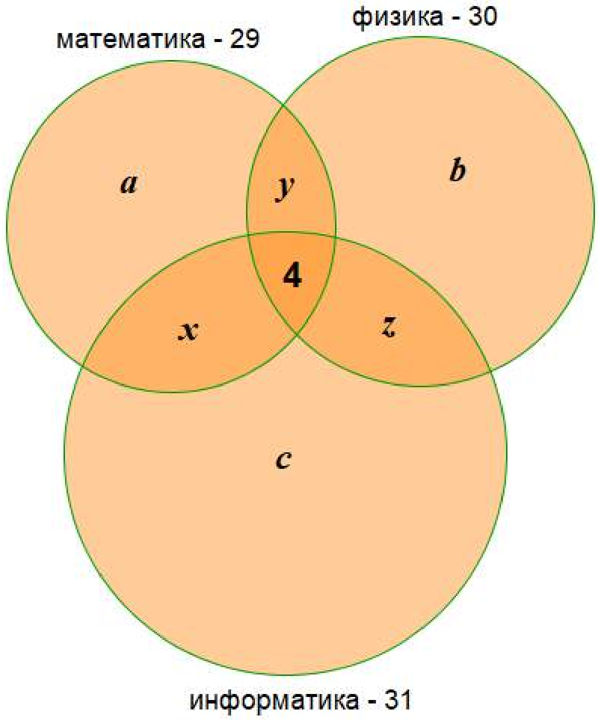




Решение варианта №5

1. Решение:

Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры только по математике, b – призеры только по физике, c – призеры только по информатике. Тогда



$$\begin{cases} x+y+a+4=29, \\ y+z+b+4=30, \\ x+z+c+4=31, \\ x+y+z+a+b+4=50, \\ x+y+z+a+c+4=49, \\ x+y+z+b+c+4=51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+a=25, \\ y+z+b=26, \\ x+z+c=27, \\ x+y+z+a+b=46, \\ x+y+z+a+c=45, \\ x+y+z+b+c=47, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x+y+z)+a+b+c=78, \\ 3(x+y+z)+2(a+b+c)=138, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=18, \\ a+b+c=42, \end{cases}$$

Отсюда получаем, что призерами хотя бы по одному предмету стали $x+y+z+a+b+c+4=64$ участника.

Ответ: 64.

2. Решение:

$$x^2+y^2+1+\sqrt{xy-6}=2|x-y|+2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-2|x-y|+1+\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow$$

$(x-y)^2-2|x-y|+1+\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow (|x-y|-1)^2+\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow$ (оба слагаемые неотрицательны)

$(|x-y|-1)^2=0$ и $\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x-y|=1, \\ xy-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y=1, \\ x-y=-1, \end{array}\right. \\ xy-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=x+1, \end{array}\right. \\ xy-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-1, \\ xy-6=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+1, \\ xy-6=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-1, \\ x^2-x-6=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+1, \\ x^2+x-6=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2,\ y=-3, \\ x=3,\ y=2, \\ x=2,\ y=3, \\ x=-3,\ y=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;-3),\ (3;2),\ (2;3),\ (-3;-2)$.

3. Решение:

$$40=\frac{S_{5-10}}{S_6}\cdot 100 \Leftrightarrow 0{,}4=\frac{2a_5+5d}{2a_1+5d} \Leftrightarrow 0{,}4=\frac{2a_1+13d}{2a_1+5d} \Leftrightarrow 0{,}4=\frac{2\,a_1/d+13}{2a_1/d+5} \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{55}{6}$$

$$\frac{a_{16}}{a_{11}}=\frac{a_1+15d}{a_1+10d}=\frac{a_1/d+15}{a_1/d+10}=\frac{-55+90}{-55+60}=\frac{35}{5}=7.$$

Ответ: 7.

4. Решение: Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$. Получим $\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. При условии $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$, $\operatorname{tg} x-2\sin x\cos x=0$, $\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x=0$,

$\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\cos x\right)=0$. Таким образом, приходим к уравнению:

$\cos^2 x=\frac{1}{2}, \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$.

5. Решение:

$$\frac{-3(x^2-4x+16)(x^2+6x+8)}{(x^3+64)\sqrt{x^2+4x+4}}\leq x^2+x-3 \Leftrightarrow \frac{-3(x^2-4x+16)(x+2)(x+4)}{(x+4)(x^2-4x+16)\sqrt{(x+2)^2}}\leq x^2+x-3 \Leftrightarrow$$

$$x\neq -4,\quad \frac{-3(x+2)}{|x+2|}\leq x^2+x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-2;+\infty),\\ x^2+x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-4)\cup(-4;-2),\\ x^2+x-6\geq 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x\in(-\infty;-4)\bigcup(-4;-3]\cup(-2;-1]\cup[0;+\infty)$.

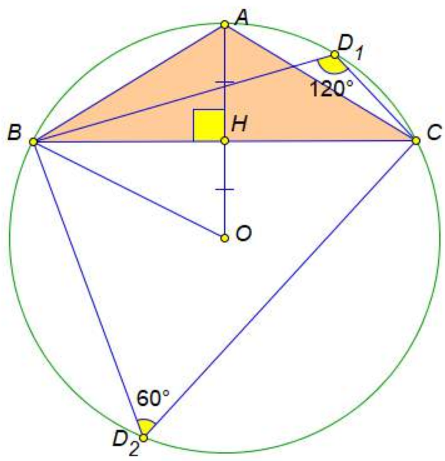
Ответ: $x\in(-\infty;-4)\bigcup(-4;-3]\cup(-2;-1]\cup[0;+\infty)$.

6. Решение:

Найдем множество значений функции $z = g(x) = 30 + 14\cos x - 7\cos 2x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \cos x$. Тогда $z = 30 + 14t - 7(2t^2 - 1) = 37 - 14(t^2 - t) = 40{,}5 - 14(t - 0{,}5)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [9; 40{,}5]$. Функция $u = \frac{\pi}{54} z$ принимает все значения из промежутка $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y = \sin u$, где $u \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Следовательно, $E_f = [0{,}5; 1]$

Ответ: $E_f = [0{,}5; 1]$.

7. Решение: Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $AO = 3$, AH - высота треугольника, проведенная к основанию BC, $AH = 1{,}5$, $AH = HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB = AC = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$. Поскольку $AB = 2AH$, то угол $\angle ABC = 30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается либо на ту же дугу, что и угол BAC, и $\angle BDC = 120°$, либо BDC опирается на дополнительную дугу к той, на которую опирается угол BAC, следовательно, $\angle BDC = 60°$. Пусть $DC = x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем



1) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC\cos 120°$, или

$(3\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + x^2 + 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, или $x^2 + 3\sqrt{2}x - 9 = 0$,

$x = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}$, второй ответ не подходит.

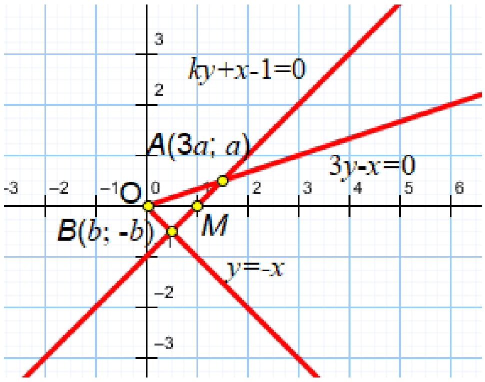
$S_1 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 120° = \frac{3}{4}\sqrt{2}(3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}(3 - \sqrt{3})$,

2) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC\cos 60°$, или

$(3\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + x^2 - 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, или $x^2 - 3\sqrt{2}x - 9 = 0$, $x = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}$, второй ответ не подходит.

$S_2 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 60° = \frac{3}{4}\sqrt{2}(3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}(3 + \sqrt{3})$. **Ответ:** $\frac{9}{4}(3 \pm \sqrt{3})$.

8. Решение: $S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(3a;\, a)$, $B(b; -b)$,



$S_{AOM} = \frac{1}{2} OM \cdot a$, $S_{BOM} = \frac{1}{2} OM \cdot b$, $OM = 1$,

$S_{AOB} = \frac{a+b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $ky + x - 1 = 0$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $ka + 3a - 1 = 0$, $a = \frac{1}{3+k}$, $-kb + b - 1 = 0$, $b = \frac{1}{1-k}$.

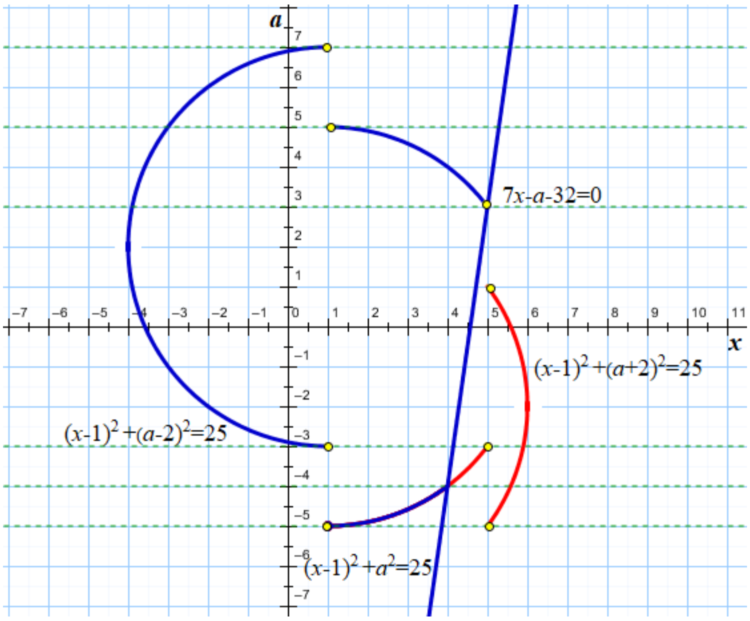
Выразим площадь треугольника

$S_{AOB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+k} + \frac{1}{1-k}\right) = \frac{2}{3 - 2k - k^2} = \frac{2}{4-(k+1)^2}$. Поскольку $4-(k+1)^2 \le 4$, то $S_{AOB} = \frac{2}{4-(k+1)^2} \ge \frac{1}{2}$.

Наименьшее значение $\min S_{AOB} = \frac{1}{2}$ при $k = -1$.

Ответ: 1/2.

9. Решение: ОДЗ: $x \ne 1, x \ne 5$, $a - 7x + 32 \ge 0$



1) $a - 7x + 32 = 0$, $x = \frac{a+32}{7}$.

2) $x^2 - 2x - 24 + \left(\frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-5|}{x-5} + a\right)^2 = 0$

или $(x-1)^2 + \left(\frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-5|}{x-5} + a\right)^2 = 25$

Раскроем модули:

2.1 $x < 1$, $(x-1)^2 + (a-2)^2 = 25$,

$x = 1 - \sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $1 < x < 5$, $(x-1)^2 + a^2 = 25$,

$x = 1 + \sqrt{25 - a^2}$;

2.3 $x > 5$, $(x-1)^2 + (a+2)^2 = 25$,

$x = 1 + \sqrt{25-(a+2)^2}$.

В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $a-7x+32\ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x=1,\ x=5.$ Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые ровно в двух точках при $a\in(-5;-4)\cup(-3;3)\cup[5;7)$.

Ответ: при $a\in(-5;-4)$ имеем решения $x_1=\dfrac{a+32}{7}$, $x_2=1+\sqrt{25-a^2}$; при $a\in(-3;3)\cup[5;7)$ имеем решения $x_1=\dfrac{a+32}{7}$, $x_2=1-\sqrt{25-(a-2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно d.

Вариант	5
a	$2\sqrt{14}$
d	1

Решение: Пусть M – середина ребра TB. Проведем $MF\,||\,TD$, $F\in AB$, $DF=FB=1/4\cdot AB$, $S=(MF)\cap(AT)$, $SF=3/2\cdot TD$. Поскольку $TD=2MF$, то $SM=2MF$. Пусть $AZ=ZD=DF=FB=a/4$ и $BW=WC$. Проведем через точки Z, D, F, B, W прямые, параллельные FE; X, G, E, H, Y - соответственно их точки пересечения со стороной AB. Очевидно, $AX=XG=GE=EH=HY=YC=a/6$. Если $T=(SY)\cap(EC)$, то $EFMN$ - искомое сечение. Поскольку $TG\,||\,SE$, $SE=3/2\cdot TG$ и $NE=3/4\cdot TG$, то $SN=NE=1/2\cdot SE$. Следовательно, площадь треугольника MSN может быть вычислена следующим образом

$$S_{MSN}=\frac{1}{2}\cdot SM\cdot SN\sin\angle MSN=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}SF\cdot\frac{1}{2}SE\sin\angle FSE=\frac{1}{3}S_{FSE}.$$

Тогда площадь сечения $S_{EFMN}=\dfrac{2}{3}S_{FSE}$.

Проведем $AK\perp FE$, $K\in FE$, $SK\perp FE$, $L=AK\cap DG$, и $AP\perp SK$, $P\in SK$, $Q=AP\cap TL$. Поскольку $TD\in TDG$, $SK\in SFE$, $AP\perp(SFE)$, то длина PQ равна заданному в условии задачи расстоянию d между TD и секущей плоскостью. Тогда $AP=3d$. В треугольнике AFE имеем $FE=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos 60^\circ}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{9a^2}{16}-2\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{3a}{4}\cdot\dfrac{1}{2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. Найдем $AU=3/5\cdot AW=\dfrac{3\sqrt{3}a}{10}$ и $BV=\sqrt{BW^2+VW^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{100}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{5}$.

Имеем $\Delta\,AUK \approx \Delta\,BVW,\;\; AK=\dfrac{BW\cdot AU}{BV}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}a}{10}\cdot\dfrac{5}{a\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{7}}$.

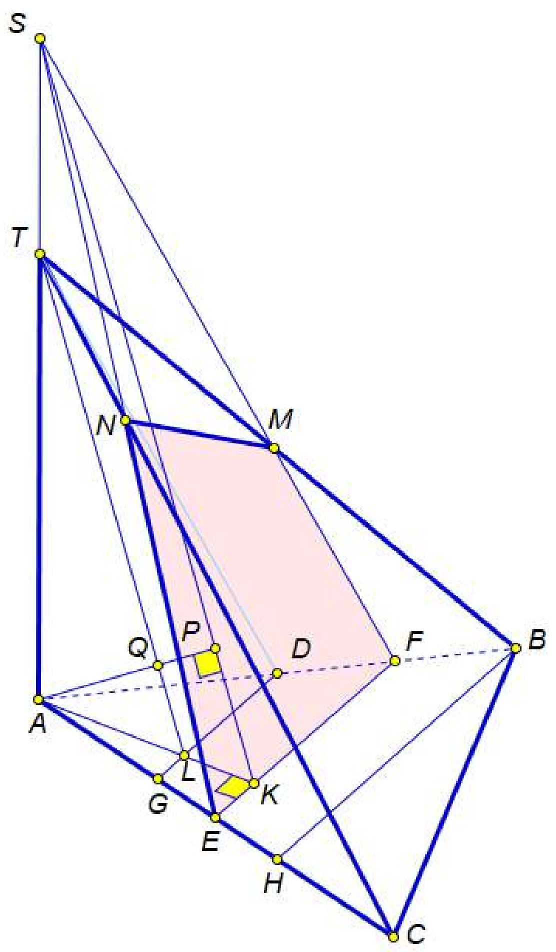
В треугольнике ASK находим $PK=\sqrt{AK^2-AP^2}=\sqrt{\dfrac{27a^2}{16\cdot 7}-9d^2}=\dfrac{3\sqrt{3a^2-112d^2}}{4\sqrt{7}}$;

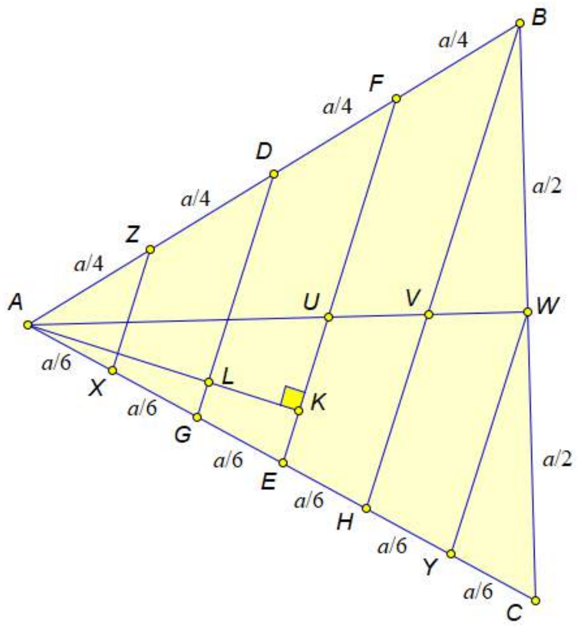
$$SK=\frac{AK^2}{PK}=\frac{9\cdot 3\cdot a^2 4\sqrt{7}}{16\cdot 7\cdot 3\sqrt{3a^2-112d^2}}=\frac{9\cdot a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2-112d^2}}.$$

$$S_{FSE}=\frac{1}{2}FE\cdot SK=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{9a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2-112d^2}}=\frac{9a^3}{32\sqrt{3a^2-112d^2}};\;\; S_{EFMN}=\frac{2}{3}S_{FSE}=\frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2-112d^2}}.$$

Ответы: $21/2$

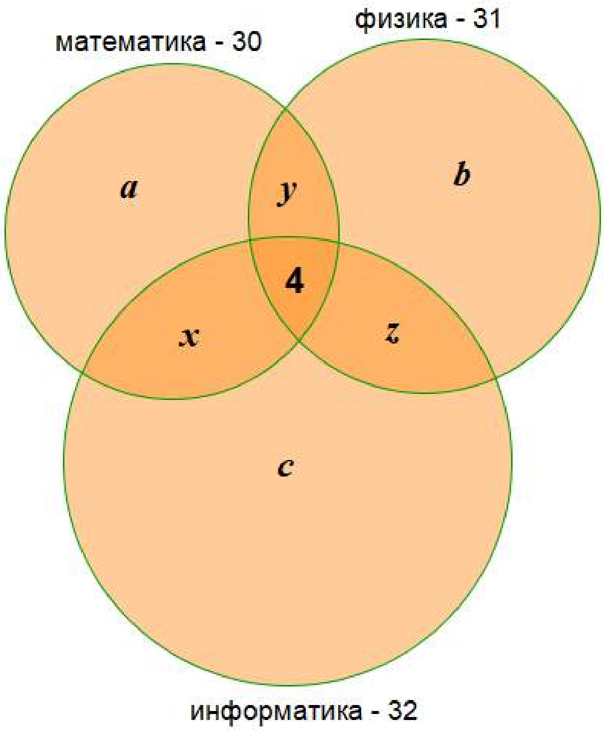
Рисунки к задаче 10





Решение варианта №8

1. Решение:



Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры только по математике, b – призеры только по физике, c – призеры только по информатике. Тогда

$$\begin{cases} x+y+a+4=30, \\ y+z+b+4=31, \\ x+z+c+4=32, \\ x+y+z+a+b+4=52, \\ x+y+z+a+c+4=51, \\ x+y+z+b+c+4=53, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+a=26, \\ y+z+b=27, \\ x+z+c=28, \\ x+y+z+a+b=48, \\ x+y+z+a+c=47, \\ x+y+z+b+c=49, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x+y+z)+a+b+c=81, \\ 3(x+y+z)+2(a+b+c)=144, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=18, \\ a+b+c=45, \end{cases}$$

Отсюда получаем, что призерами хотя бы по одному предмету стали $x+y+z+a+b+c+4=67$ участника.

Ответ: 67.

2. Решение:

$$x^2+y^2+4+\sqrt{xy-48}=4|x-y|+2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-4|x-y|+4+\sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-y)^2-4|x-y|+4+\sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow (|x-y|-2)^2+\sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow$$ (оба слагаемые неотрицательны)

$$(|x-y|-2)^2=0 \text{ и } \sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x-y|=2, \\ xy-48=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y=2, \\ x-y=-2, \end{array}\right. \\ xy-48=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x-2, \\ y=x+2, \end{array}\right. \\ xy-48=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-2, \\ xy-48=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+2, \\ xy-48=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-2, \\ x^2-2x-48=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+2, \\ x^2+2x-48=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6,\ y=-8, \\ x=8,\ y=6, \\ x=-8,\ y=-6, \\ x=6,\ y=8. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-6;-8)$, $(8;6)$, $(-8;-6)$, $(6;8)$.

3. Решение:

$$20=\frac{S_{6-13}}{S_8}\cdot 100 \Leftrightarrow 0{,}2=\frac{2a_6+7d}{2a_1+7d} \Leftrightarrow 0{,}2=\frac{2a_1+17d}{2a_1+7d} \Leftrightarrow 0{,}2=\frac{2a_1/d+17}{2a_1/d+7} \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{39}{4}$$

$$\frac{a_{40}}{a_{14}}=\frac{a_1+39d}{a_1+13d}=\frac{a_1/d+39}{a_1/d+13}=\frac{-39+156}{-39+52}=\frac{117}{13}=9.$$

Ответ: 9.

4. Решение:

Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{ctg} x$. Получим $\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x}=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. При условии $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$, $\operatorname{ctg} x-2\sin x\cos x=0$,

$\dfrac{\cos x}{\sin x}-2\sin x\cos x=0$, $\cos x\left(\dfrac{1}{\sin x}-2\sin x\right)=0$. Таким образом, приходим к уравнению

$\sin^2 x=\dfrac{1}{2}, \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$. **Ответ:** $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$.

5. Решение:

$$\frac{-2(x^2-5x+25)(2x^2+17x+35)}{(x^3+125)\sqrt{4x^2+28x+49}}\leq x^2+3x-2. \Leftrightarrow \frac{-2(x^2-5x+25)(x+5)(2x+7)}{(x+5)(x^2-5x+25)\sqrt{(2x+7)^2}}\leq x^2+3x-2 \Leftrightarrow$$

$$x\neq -5,\quad \frac{-2(2x+7)}{|2x+7|}\leq x^2+3x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3{,}5;+\infty),\\ x^2+3x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-5)\cup(-5;-3{,}5),\\ x^2+3x-4\geq 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x\in(-\infty;-5)\bigcup(-5;-4]\cup(-3{,}5;-3]\cup[0;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-5)\bigcup(-5;-4]\cup(-3{,}5;-3]\cup[0;+\infty)$.

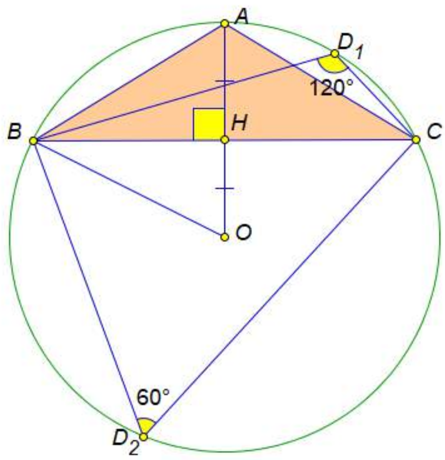
6. Решение:

Найдем множество значений функции $z = g(x) = 4{,}5 - 2\cos x + \cos 2x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \cos x$. Тогда $z = 4{,}5 - 2t + (2t^2 - 1) = 3{,}5 + 2(t^2 - t) = 3 + 2(t - 0{,}5)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [3; 7{,}5]$. Функция $u = \dfrac{\pi}{9} z$ принимает все значения из промежутка $\left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y = \sin u$, где $u \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$. Следовательно, $E_f = [0{,}5; 1]$

Ответ: $E_f = [0{,}5; 1]$.

7. Решение:

Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $AO = 4\sqrt{2}$, AH - высота треугольника, проведенная к основанию BC, $AH = 2\sqrt{2}$, $AH = HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB = AC = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{6}$. Поскольку $AB = 2AH$, то угол $\angle ABC = 30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается либо на ту же дугу, что и угол BAC, и $\angle BDC = 120°$, либо BDC опирается на дополнительную дугу к той, на которую опирается угол BAC, следовательно, $\angle BDC = 60°$. Пусть $DC = x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем



1) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos 120°$, или

$(4\sqrt{6})^2 = 8^2 + x^2 + 16 \cdot x \cdot \dfrac{1}{2}$, или $x^2 + 8x - 32 = 0$, $x = 4\sqrt{3} - 4$, второй ответ не подходит.

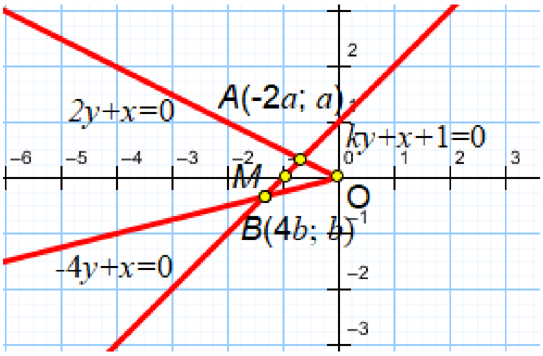
$S_1 = \dfrac{1}{2} DB \cdot DC \sin 120° = 16(\sqrt{3} - 1) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8(3 - \sqrt{3})$,

2) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos 60°$, или $(4\sqrt{6})^2 = 8^2 + x^2 - 16 \cdot x \cdot \dfrac{1}{2}$, $x^2 - 8x - 32 = 0$, $x = 4\sqrt{3} + 4$, второй ответ не подходит. $S_2 = \dfrac{1}{2} DB \cdot DC \sin 60° = 16(\sqrt{3} + 1) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8(3 + \sqrt{3})$. **Ответ:** $8(3 \pm \sqrt{3})$.

8. Решение:

$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(-2a; a)$, $B(4b; b)$,

$S_{AOM} = \frac{1}{2} OM \cdot a$, $S_{BOM} = \frac{1}{2} OM \cdot (-b)$, $OM = 1$,



$S_{AOB} = \frac{a-b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $ky+x+1=0$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB:

$ka - 2a + 1 = 0, \quad a = \frac{1}{2-k}$,

$kb + 4b + 1 = 0, \; b = -\frac{1}{4+k}$. Выразим площадь треугольника

$S_{AOB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-k} + \frac{1}{4+k}\right) = \frac{3}{8-2k-k^2} = \frac{3}{9-(k+1)^2}$. Поскольку $9-(k+1)^2 \le 9$, то

$S_{AOB} = \frac{3}{9-(k+1)^2} \ge \frac{1}{3}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB} = 1/3$ при $k = -1$.

Ответ: $1/3$.

9. Решение:

ОДЗ: $x \ne 2, x \ne 6, \; a - 7x + 39 \ge 0$

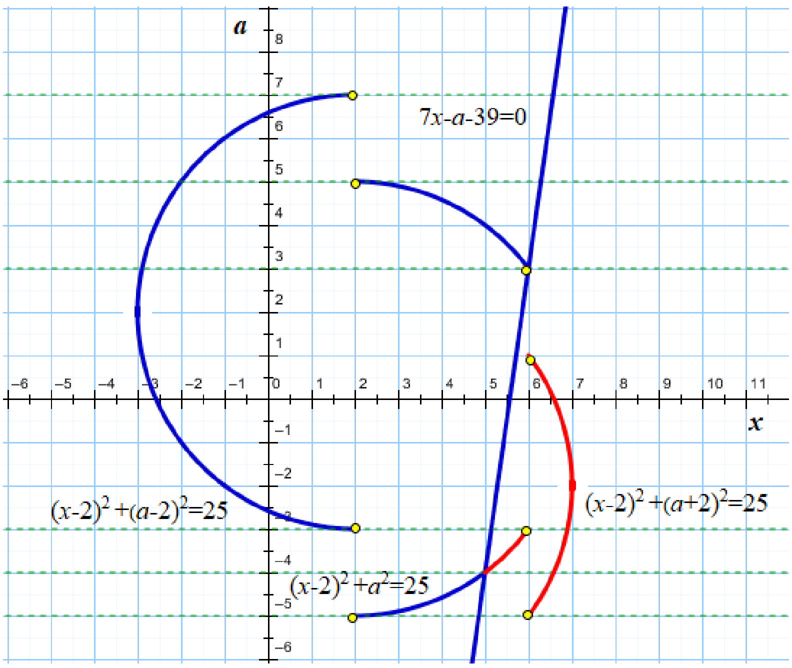
1) $a - 7x + 39 = 0, \quad x = \frac{a+39}{7}$.

2)

$$x^2 - 4x - 21 + \left(\frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-6|}{x-6} + a\right)^2 = 0$$

или

$$(x-2)^2 + \left(\frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-6|}{x-6} + a\right)^2 = 25$$



Раскроем модули:

2.1 $\quad x < 2, \quad (x-2)^2 + (a-2)^2 = 25$,

$x = 2 - \sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $\quad 2 < x < 6, \; (x-2)^2 + a^2 = 25$,

$x = 2 + \sqrt{25-a^2}$;

2.3 $\; x > 6, \; (x-2)^2 + (a+2)^2 = 25$,

$x = 2 + \sqrt{25-(a+2)^2}$.

В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $a-7x+39\ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x=2, x=6.$ Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые ровно в двух точках при $a\in(-5;-4)\cup(-3;3)\cup[5;7)$.

Ответ: при $a\in(-5;-4)$ имеем решения $x_1=\dfrac{a+39}{7}$, $x_2=2+\sqrt{25-a^2}$; при $a\in(-3;3)\cup[5;7)$ имеем решения $x_1=\dfrac{a+39}{7}$, $x_2=2-\sqrt{25-(a-2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно d.

Вариант	8
a	4
d	$1/3$

Решение: Пусть M – середина ребра TB. Проведем $MF\,||\,TD$, $F\in AB$, $DF=FB=1/4\cdot AB$, $S=(MF)\cap(AT)$, $SF=3/2\cdot TD$. Поскольку $TD=2MF$, то $SM=2MF$. Пусть $AZ=ZD=DF=FB=a/4$ и $BW=WC$. Проведем через точки Z, D, F, B, W прямые, параллельные FE; X, G, E, H, Y - соответственно их точки пересечения со стороной AB. Очевидно, $AX=XG=GE=EH=HY=YC=a/6$. Если $T=(SY)\cap(EC)$, то $EFMN$- искомое сечение. Поскольку $TG\,||\,SE$, $SE=3/2\cdot TG$ и $NE=3/4\cdot TG$, то $SN=NE=1/2\cdot SE$. Следовательно, площадь треугольника MSN может быть вычислена следующим образом

$$S_{MSN}=\frac{1}{2}\cdot SM\cdot SN\sin\angle MSN=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}SF\cdot\frac{1}{2}SE\sin\angle FSE=\frac{1}{3}S_{FSE}.$$

Тогда площадь сечения $S_{EFMN}=\dfrac{2}{3}S_{FSE}$.

Проведем $AK\perp FE$, $K\in FE$, $SK\perp FE$, $L=AK\cap DG$, и $AP\perp SK$, $P\in SK$, $Q=AP\cap TL$. Поскольку $TD\in TDG$, $SK\in SFE$, $AP\perp(SFE)$, то длина PQ равна заданному в условии задачи расстоянию d между TD и секущей плоскостью. Тогда $AP=3d$. В треугольнике AFE имеем

$FE=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos 60^\circ}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{9a^2}{16}-2\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{3a}{4}\cdot\dfrac{1}{2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. Найдем $AU=3/5\cdot AW=\dfrac{3\sqrt{3}a}{10}$ и

$$BV=\sqrt{BW^2+VW^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{100}}=\frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

Имеем $\Delta\,AUK \approx \Delta\,BVW,\;\; AK = \dfrac{BW\cdot AU}{BV} = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}a}{10}\cdot\dfrac{5}{a\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{7}}.$

В треугольнике ASK находим $PK = \sqrt{AK^2 - AP^2} = \sqrt{\dfrac{27a^2}{16\cdot 7} - 9d^2} = \dfrac{3\sqrt{3a^2 - 112d^2}}{4\sqrt{7}};$

$$SK = \frac{AK^2}{PK} = \frac{9\cdot 3\cdot a^2 4\sqrt{7}}{16\cdot 7\cdot 3\sqrt{3a^2 - 112d^2}} = \frac{9\cdot a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 112d^2}}.$$

$$S_{FSE} = \frac{1}{2}FE\cdot SK = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{9a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 112d^2}} = \frac{9a^3}{32\sqrt{3a^2 - 112d^2}};\;\; S_{EFMN} = \frac{2}{3}S_{FSE} = \frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 112d^2}}.$$

Ответ: $9/2\sqrt{5}$

Рисунки к задаче 10