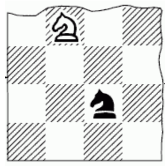
Решение варианта №11

1. Решение: Свяжем с доской $n \times n$ $(n > 2)$ прямоугольную систему координат. Обозначим координаты двух коней через $(x_1;\, y_1)$ и $(x_2;\, y_2)$, где $x_k,\, y_k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad k = 1, 2.$ Кони угрожают друг другу, если 1)



$|\, x_1 - x_2 \,| = 1, \quad |\, y_1 - y_2 \,| = 2$ или 2) $|\, x_1 - x_2 \,| = 2, \quad |\, y_1 - y_2 \,| = 1$. В первом случае есть четыре такие возможности:

$1 \le x_1 \le n-1,\ x_2 = x_1 + 1, \quad 1 \le y_1 \le n-2,\ y_2 = y_1 + 2;$

$1 \le x_1 \le n-1,\ x_2 = x_1 + 1, \quad 1 \le y_2 \le n-2,\ y_1 = y_2 + 2;$

$1 \le x_2 \le n-1,\ x_1 = x_2 + 1, \quad 1 \le y_1 \le n-2,\ y_2 = y_1 + 2;$

$1 \le x_2 \le n-1,\ x_1 = x_2 + 1, \quad 1 \le y_2 \le n-2,\ y_1 = y_2 + 2.$

Каждому из этих подслучаев соответствуют по $(n-1)(n-2)$ позиции. Второй случай отличается от первого поворотом на $90°$. При $n = 10$ имеем $8(n-1)(n-2) = 8 \cdot 9 \cdot 8 = 576.$

Ответ: 576.

2. Решение:

ОДЗ: $x > 0,\ \ 6 - x > 0,\ x \ne 1,\ x \ne 2 \ \Rightarrow \quad x \in (0;1) \cup (1;2) \cup (2;6)$.

Имеем $\dfrac{(\log_4(6-x) - \log_4 1)(|\, x-5 \,| - |\, x-1 \,|)}{(3^x - 9)(3^x - 3)(\log_3 x - \log_3 1)} \le 0.$

На **ОДЗ** исходное неравенство эквивалентно следующему

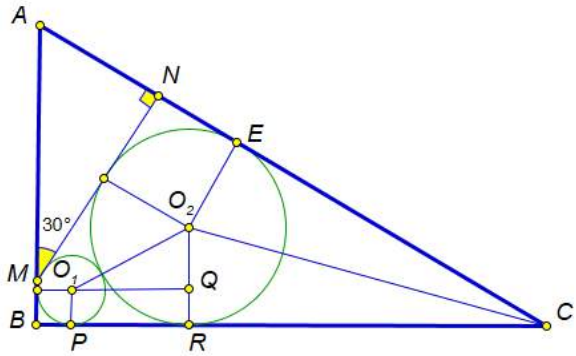
$$\frac{(5-x)(x-5-(x-1))(x-5+(x-1))}{(x-2)(x-1)^2} \le 0 \ \ \Rightarrow \frac{(x-5)(x-3)}{(x-2)} \le 0 \Rightarrow \ x \in (0;1) \cup (1;2) \cup [3;5].$$

Ответ: $x \in (0;1) \cup (1;2) \cup [3;5]$.

3. Решение:

Треугольник AMN прямоугольный, $\angle BAC = 60°$.

O_1, O_2 - центры окружностей, P, R - точки касания окружностей со стороной BC. В прямоугольном треугольнике O_1O_2Q с прямым углом Q, точка $Q \in O_2R$, имеем $O_1O_2^{\ 2} = O_1Q^2 + QO_2^{\ 2}$, $4^2 = O_1Q^2 + 2^2$,



$PR = O_1Q = 2\sqrt{3}$, $\angle O_2O_1Q = 30°$, $\angle O_1O_2Q = 60°$.

Имеем

$\angle RO_2C = \dfrac{1}{2}\angle RO_2E = \dfrac{1}{2}(360° - 90° - 2 \cdot 60°) = 75°$,

$\angle O_2CR = 15°$,

$\angle BCA = 30°,\ \angle ABC = 90°,\ RC = 3\operatorname{ctg}15° = 3\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = 3\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 3(2+\sqrt{3}) = 6+3\sqrt{3}$.

$BC = BP + PR + RC = 1 + 2\sqrt{3} + 6 + 3\sqrt{3} = 7 + 5\sqrt{3}$, $AC = BC/\sin 60° = (30+14\sqrt{3})/3$,

$AB = BC/\sin 60° = (15+7\sqrt{3})/3$.

Ответ: $BC = 7+5\sqrt{3}$, $AC = (30+14\sqrt{3})/3$, $AB = (15+7\sqrt{3})/3$.

4. Решение: Совместим начало координат с вершиной параболы, ось *Oy* проведем через ось симметрии параболы в направлении ее ветвей. Тогда уравнение параболы будет $y = kx^2,\ k > 0$.

Пусть $A(a; ka^2), B(b; kb^2), b > a$. Составим уравнение прямой *AB:*

$y - ka^2 = \dfrac{kb^2 - ka^2}{b-a}(x-a) \Leftrightarrow y = ka^2 + k(b+a)(x-a)$. Поскольку площадь треугольника *ABC* можно вычислить по формуле $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot CH$, где *CH* – высота, опущенная из вершины *C* на сторону *AB*. Длина стороны *AB* – величина постоянная, следовательно, площадь треугольника *ABC* будет принимать максимальное значение в том случае, если *CH* будет максимальной.

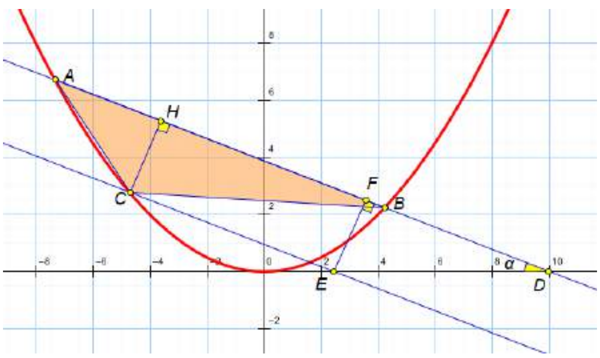
Пусть $C(c; kc^2),\ c \in (a; b)$. Проведем через точку *C* прямую, параллельную *AB*, ее уравнение

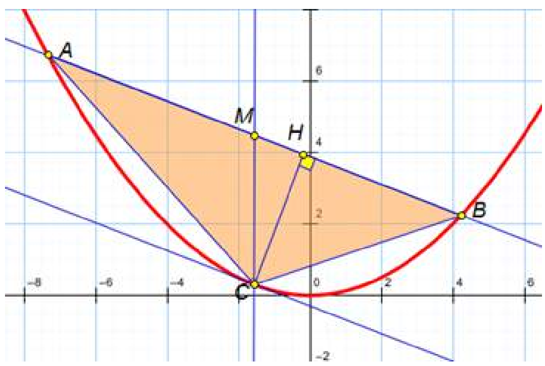
$y = kc^2 + k(b+a)(x-c)$. Найдем абсциссу x_E точки *E* пересечения этой прямой с осью *Ox*:

$x_E = -\dfrac{c^2}{b+a} + c.$ Найдем абсциссу точки *D* пересечения прямой *AB* с осью *Ox*:

$x_D = -\dfrac{a^2}{b+a} + a.$

Имеем $DE = |x_D - x_E| = \left|-\dfrac{a^2 - c^2}{b+a} + a - c\right| = \dfrac{|c^2 - (a+b)c + ab|}{b+a}$,





$CH = DE\sin\alpha = \dfrac{|c^2-(a+b)c+ab|\sin\alpha}{b+a}$, угол α - угол наклона прямой *AB* к оси *Ox* (величина постоянная). Подмодульное выражение является квадратичной зависимостью относительно переменной *c*, оно отрицательно при $c\in(a;b)$ и достигает минимума при $c=\dfrac{a+b}{2}$. Величина *CH* при этом, а, следовательно, и площадь треугольника *ABC* будет принимать максимальное значение. Точка *C* есть точка пересечения параболы с прямой, параллельной ее оси симметрии и проходящей через середину отрезка *AB*. Таким образом, точка *M* совпадает с серединой отрезка *AB*, и *AM* : *MB*= 1: 1.

Ответ: 1: 1.

5. Решение: Рассмотрим второе уравнение системы $3-x=\sqrt{x^2-6x+y+8} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3, \\ y=1. \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} \log_{|x-1|}(ax)=2\log_{|x-1|}(x+y), \\ 3-x=\sqrt{x^2-6x+y+8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2-a)x+1=0, \\ y=1, \\ -1<x\le 3,\ x\ne 0,\ x\ne 1,\ x\ne 2. \end{cases}$

Выясним, при каких значениях параметра *a* уравнение $x^2+(2-a)x+1=0$ (*) имеет единственное решение, если $-1<x\le 3,\ x\ne 0,\ x\ne 1,\ x\ne 2.$

1) $D=a(a-4),\ D=a(a-4),\ x=\dfrac{a-2}{2}.$ При $a=0$ корень $x=-1$ не подходит; при $a=4$ корень $x=1$ не подходит.

2) Выясним, при каких *a* точки $x=0$, $x=1$, $x=2$ являются решениями уравнения (*).

$x=0$ не является решением ни при каком *a*;

$x=1$является единственным решением уравнения (*) при $a=4$;

$x=2$ является решением (*) при $a=4{,}5,$ поскольку при подстановке $x=2$ в уравнение (*) имеем $2^2+(2-a)2+1=0,\ 2a=9.$ Однако, при $a=4{,}5$ уравнение (*) имеет второе решение $x=0{,}5,$ удовлетворяющее поставленным условиям.

Следовательно, при $a=4{,}5$ система имеет единственное решение $x=0{,}5,\ y=1.$

3) Если дискриминант уравнения (*) больше нуля, то уравнение имеет два различных решения, но при условии $f(-1)f(3)<0$, где $f(x)=x^2+(2-a)x+1,$ один корень будет посторонним, а один будет удовлетворять неравенству $-1<x<3$. Имеем $f(-1)=a$, $f(3)=16-3a$, приходим к неравенству $a(16-3a)<0$, и $a\in(-\infty;0)\cup(16/3;+\infty).$ Если $a\in(-\infty;0),$ то $x=\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}.$

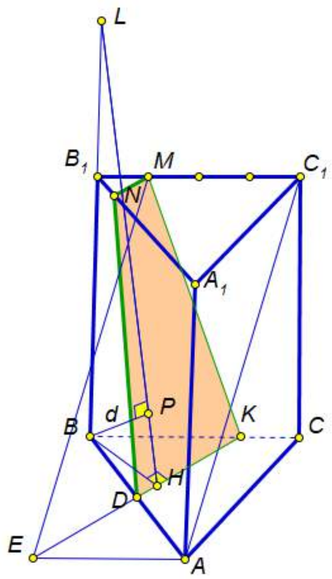
Если $a \in (16/3; +\infty)$, то $x = \dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

4) Проверим случаи, когда $f(-1)=0$ и $f(3)=0$. Первое равенство выполняется при $a=0$, уравнение (*) не имеет решений, удовлетворяющих поставленным условиям. Второе равенство справедливо при $a=16/3$. В этом случае уравнение (*) имеет вид $x^2+\dfrac{10}{3}x+1=0,$ и имеет два решения $x=1/3$ и $x=3$, которые оба подходят.

Ответ: при $a=4{,}5$ $x=0{,}5,$ $y=1$, при $a\in(-\infty;0)$ $x=\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$, $y=1,$

при $a\in(16/3;+\infty)$ $x=\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}$, $y=1.$

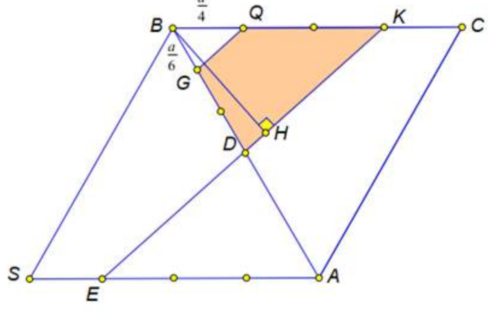
6. Решение: 1) Построение сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую $EA \parallel B_1C_1$,



$EA = MC_1$, $ME \parallel AC_1$, ME лежит в плоскости сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую, соединяющую точку E с серединой D стороны AB, точка K - точка пересечения этой прямой со стороной BC. В плоскости основания $A_1B_1C_1$ проводим прямую MN, параллельную DK. Точка N - точка пересечения прямой MN со стороной A_1B_1. Трапеция $DKMN$ - искомое сечение.

2) Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания призмы. Обозначим сторону основания через a. Тогда $BK=3a/4$, $BD=a/2$. Пусть Q - проекция точки M на основание ABC, $BQ=a/4$. Пусть G - проекция точки N на основание ABC. Поскольку $GQ \parallel DK$, то $BQ:BK = BG:BD$, и $BG=a/6$. Проекцией сечения на плоскость основания ABC является трапеция $DKQG$, ее площадь

$$S_{пр} = S_{BDK} - S_{BGQ} = S_{ABC}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

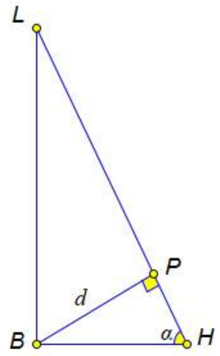


3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. Расстояние d от прямой AC_1 до плоскости сечения равно расстоянию от точки A до плоскости сечения, которое, в свою очередь,

равно расстоянию от точки B до плоскости сечения

($AD = DB,\ D$ принадлежит плоскости сечения).

Строим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную DK линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp DK,\ LH \perp DK$). Проведем $BP \perp LH$, расстояние d равно BP. Угол наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL.



$$DK = \sqrt{DQ^2 + QK^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}/4\right)^2 + \left(a/2\right)^2} = a\sqrt{7}/4 = 7\sqrt{2}/2,$$

$$BH \cdot DK = BD \cdot BK \sin 60°,\ BH = \frac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

В треугольнике BPH имеем $\sin\alpha = d/BH = 2/\sqrt{6}$,

$\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$.

4) $S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha = 14$.

Ответ: 14.

Решение варианта №16

1. Решение: Пусть n – искомое натуральное число, $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ - разложение числа n на простые сомножители. Любой натуральный делитель этого числа имеет вид $d = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{l_m}$, где $l_i \in \{0, 1, \ldots, k_i\}$, $i = 1, \ldots, m.$ Число делителей числа n равно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1) = 42.$ Разложим число 42 на неединичные сомножители всеми возможными способами и выберем наименьшее число n. Поскольку $42 = 2\cdot 3\cdot 7,$ то имеем пять случаев:

1) $42 = 42$, наименьшее число $n = 2^{41} > 3000$;
2) $42 = 21\cdot 2$, наименьшее число $n = 2^{20}\cdot 3^1 > 3000$;
3) $42 = 14\cdot 3$, наименьшее число $n = 2^{13}\cdot 3^2 > 3000$;
4) $42 = 7\cdot 6$, наименьшее число $n = 2^6\cdot 3^5 = 64\cdot 243 > 3000$;
5) $42 = 7\cdot 3\cdot 2$, наименьшее число $n = 2^6\cdot 3^2\cdot 5^1 = 2880$.

Ответ: 2880.

2. Решение:

ОДЗ: $x+6\ge 0,\ x+1>0,\ 5-x>0,\ x\ne 0,\ x\ne 1,\ x\ne 4 \ \Rightarrow\ x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;4)\cup(4;5)$.

Имеем $\dfrac{(\sqrt{x+6}-1)(\sqrt{x+6}-3)(\log_2(x+1)-\log_2 1)}{(2^x-1)(2^x-2)(\log_5(5-x)-\log_5 1)}\ge 0.$

На **ОДЗ** исходное неравенство эквивалентно следующему

$\dfrac{(x+5)(x-3)x}{x(x-1)(4-x)}\ge 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{(x-3)}{(x-1)(4-x)}\ge 0 \ \Rightarrow x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup[3;4)$.

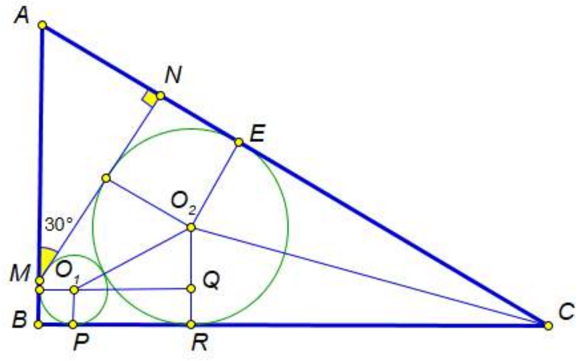
Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup[3;4)$.

3. Решение:

Треугольник AMN прямоугольный, $\angle BAC = 60°$.

O_1, O_2 - центры окружностей, P, R - точки касания окружностей со стороной BC. В прямоугольном треугольнике O_1O_2Q с прямым углом Q, точка $Q\in O_2R,$ имеем $O_1O_2^{\,2} = O_1Q^2 + QO_2^{\,2}$, $(16)^2 = O_1Q^2 + (8)^2$,

$PR = O_1Q = 8\sqrt{3}$, $\angle O_2O_1Q = 30°$, $\angle O_1O_2Q = 60°$.



Имеем $\angle RO_2C = \dfrac{1}{2}\angle RO_2E = \dfrac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ - 2\cdot 60^\circ) = 75^\circ$, $\angle O_2CR = 15^\circ$,

$\angle ACB = 30^\circ,\ \angle ABC = 90^\circ,\ RC = 12\operatorname{ctg}15^\circ = 12\sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = 12\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 12(2+\sqrt{3}) = 24 + 12\sqrt{3}$.

$BC = BP + PR + RC = 4 + 8\sqrt{3} + 24 + 12\sqrt{3} = 28 + 20\sqrt{3}$, $AC = BC/\sin 60^\circ = (120 + 56\sqrt{3})/3$,

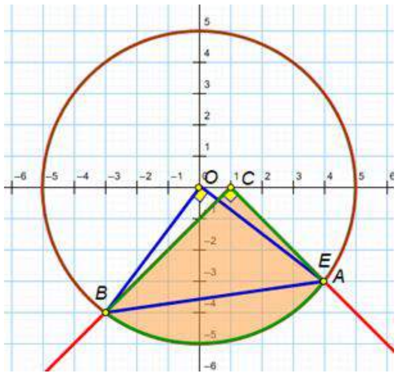
$AN = AC - CE - NE = (120 + 56\sqrt{3} - 72 - 36\sqrt{3} - 36)/3 = (12 + 20\sqrt{3})/3$,

$MN = AN/\operatorname{tg}30^\circ = (12\sqrt{3} + 60)/3 = 4\sqrt{3} + 20$.

Вычислим площадь треугольника *AMN*:

$S = AN\cdot MN/2 = (12 + 20\sqrt{3})(4\sqrt{3} + 20)/6 = (224\sqrt{3} + 240)/3.$

Ответ: $(224\sqrt{3} + 240)/3.$



4. Решение: Преобразуем первое неравенство к виду $(x-1)^2 + (y+1)^2 \le 25,$ сделаем замену $\tilde{x} = x - 1,\ \tilde{y} = y + 1.$ Данная замена эквивалентна преобразованию параллельного переноса и не меняет площадь фигуры. В системе $O\tilde{x}\tilde{y}$ (см. рис.) рассмотрим фигуру, заданную системой неравенств $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \le 25,\ \tilde{y} \le -|\tilde{x} - 1|.$

Найдем точки пересечения прямого угла $\tilde{y} = -|\tilde{x} - 1|$ с вершиной $C(1;\,0)$ с окружностью $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 25.$ Подставим $\tilde{y} = -|\tilde{x} - 1|$ в уравнение окружности. Получим $\tilde{x}^2 + (\tilde{x} - 1)^2 = 25$, $\tilde{x}^2 - \tilde{x} - 12 = 0,$ $\tilde{x} = 4,$ или $\tilde{x} = -3.$ Итак, точки пересечения $A(4;\,-3)$ и $B(-3;\,-4)$. Тогда

$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$ $CB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$ Треугольник ABC прямоугольный,

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 5\sqrt{2}$. Тогда треугольник AOB тоже прямоугольный, поскольку $AO^2 + OB^2 = AB^2,\ AO = OB = 5.$ Следовательно, площадь S_1 кругового сектора, отсекаемого хордой AB равна разности площади четверти круга и площади треугольника AOB, т.е. $S_1 = \dfrac{25\pi}{4} - \dfrac{25}{2}$. Вычислим площадь S_2 треугольника ABC: $S_2 = \dfrac{AC\cdot CB}{2} = 12$. Искомая площадь $S = S_1 + S_2 = 6{,}25\pi - 0{,}5$.

Ответ: $6{,}25\pi - 0{,}5$.

5. Решение: Рассмотрим второе уравнение системы $x+2+\sqrt{x^2+4x+y-2}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2, \\ y = 6. \end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases} \log_{|x+4|}(ax+5a) = 2\log_{|x-4|}(x+y), \\ x+2+\sqrt{x^2+4x+y-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-(a-12)x+36-5a=0, \\ y=6, \\ -6<x\le -2,\ x\ne -5,\ x\ne -4,\ x\ne -3. \end{cases}$$

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение $x^2-(a-12)x+36-5a=0$ (*) имеет два различных решения, если $-6<x\le -2,\ x\ne -5,\ x\ne -4,\ x\ne -3.$

1) Выясним, при каких a точки $x=-5$, $x=-4$, $x=-2$ являются решениями уравнения (*).

$x=-5$ не является решением ни при каком a;

$x=-4$ является единственным решением уравнения (*) при $a=4$, поскольку

$$D=a(a-4)=0;$$

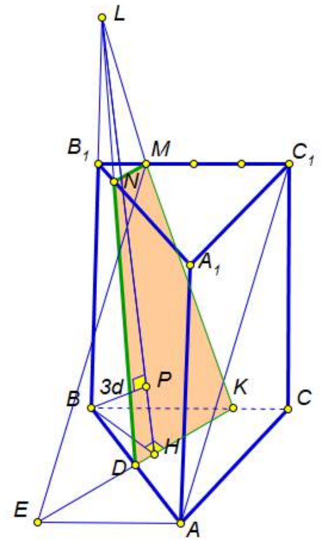
$x=-3$ является решением (*) при $a=4{,}5,$ поскольку при подстановке $x=-3$ в уравнение (*) имеем $3^2+3a-36+36-5a=0,\ 2a=9.$ При $a=4{,}5$ уравнение (*) имеет второе решение $x=-4{,}5,$ удовлетворяющее поставленным условиям. Следовательно, при $a=4{,}5$ система имеет единственное решение.

2) Пусть $a\ne 4{,}5$ и $D=a(a-4)>0$. При этом уравнение (*) будет иметь два различных решения, удовлетворяющих условию $-6<x\le -2,$ если $-6<\dfrac{a-12}{2}<-2,\ f(-6)>0,\ f(-2)\ge 0,$ где $f(x)=x^2-(a-12)x+36-5a$. Имеем $f(-6)=a$, $f(-2)=16-3a$, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a(a-4)>0, \quad a\ne 4{,}5, \\ 0<a<8, \\ a>0, \\ 16-3a\ge 0, \end{cases} \text{, и } a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3].$$

Ответ: при $a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3]$ два решения

$$x_{1/2}=\frac{a-12\pm\sqrt{a^2-4a}}{2},\ y_{1/2}=6.$$

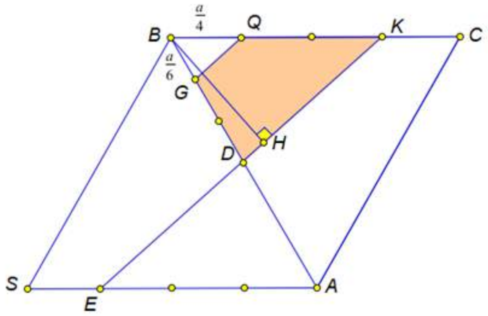


6. Решение: 1) Построение сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую $EA\parallel B_1C_1$,

$EA=MC_1$, $ME\parallel AC_1$, ME лежит в плоскости сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую, соединяющую точку E с серединой D стороны AB, точка K - точка пересечения этой прямой со стороной BC. В плоскости основания $A_1B_1C_1$ проводим прямую MN, параллельную DK. Точка N - точка пересечения прямой MN со стороной A_1B_1. Трапеция $DKMN$ - искомое сечение.

2) Спроецируем сечение на плоскость основания призмы. Обозначим сторону основания через a. Тогда $BK = 3a/4$, $BD = a/2$. Пусть Q - проекция точки M на основание ABC, $BQ = a/4$. Пусть G - проекция точки N на основание ABC. Поскольку $GQ \| DK$, то $BQ : BK = BG : BD$, и $BG = a/6$. Следовательно, $B_1N : BD = B_1M : BK = NM : DK = 1:3$.

3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. Расстояние d от точки C до плоскости сечения равно трети расстояния от точки B до плоскости сечения ($BK = 3CK$, K принадлежит плоскости сечения).



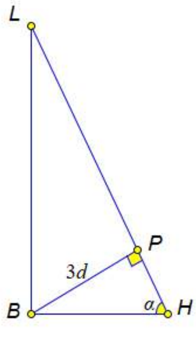
Строим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную DK линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp DK, LH \perp DK$). Проведем $BP \perp LH$, расстояние $3d$ равно BP. Угол наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL. $DK = \sqrt{DQ^2 + QK^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}/4\right)^2 + (a/2)^2} = a\sqrt{7}/4 = 7$,

$$BH \cdot DK = BD \cdot BK \sin 60°,\ BH = \frac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = 3\sqrt{3}.$$

В треугольнике BPH имеем $\sin\alpha = 3d/BH = 2/\sqrt{6}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $BL = BH \cdot \operatorname{tg}\alpha = 3\sqrt{6}$.

4) $V_{LBDK} = \dfrac{1}{3} S_{BDK} \cdot BL = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} S_{ABC} \cdot BL = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32} \cdot BL = \dfrac{63\sqrt{2}}{2}$.



$$V_{LB_1NM} = \frac{1}{27} V_{LBDK},\ V_{BDKB_1NM} = \frac{26}{27} V_{LBDK} = \frac{91\sqrt{2}}{3},$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3} BL = 168\sqrt{2},$$

$$V_{ACKDA_1C_1MN} = 168\sqrt{2} - \frac{91\sqrt{2}}{3} = \frac{413\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{91\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{413\sqrt{2}}{3}$.

Решение варианта №17

1. Решение. Сначала рассмотрим некоторый один фиксированный вертикальный порядок укладки стекол (снизу вверх). Ясно, что, повернув всю укладку целиком на какой-то угол, мы укладку не изменим (не получим новой укладки). Поэтому можно считать, что нижнее стекло укладки всегда зафиксировано (не поворачивается). Тогда укладки (с фиксированным вертикальным порядком стекол) будут отличаться друг от друга поворотом на $0°$, $90°$, $180°$, и $270°$ каждого из последующих 4-х верхних стекол по отношению к фиксированному нижнему стеклу. Поэтому получим всего $4^4 = 256$ вариантов укладки с фиксированным вертикальным порядком стекол. Добавив теперь всевозможные вертикальные перестановки пяти стекол (5! = 120 вариантов), получим общее количество возможных укладок стекол в стопку: $5! \cdot 4^4 = 120 \cdot 256 = 30720$ штук. Но не все эти укладки удовлетворяют условию задачи. Условию задачи удовлетворяют только те укладки, при которых вся стопка оказывается вертикально непрозрачной. Рассмотрим столбики из треугольников, находящихся над каждым из четырех фиксированных треугольников нижнего стекла. Условие задачи будет выполнено тогда, когда каждый из этих четырех столбиков является непрозрачным. При этом один из этих столбиков уже заведомо не прозрачен (тот, что стоит на нижнем закрашенном треугольнике). Рассмотрим упорядоченный набор (вектор) из возможных углов поворота (для определенности, по часовой стрелке) закрашенных треугольников на каждом из 4 верхних стекол по отношению к нижнему закрашенному треугольнику: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_k \in \{0°, 90°, 180°, 270°\}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Все «столбики» из стеклянных треугольников окажутся непрозрачными, если в этом наборе углов поворота обязательно встретится хотя бы один раз угол $90°$, обязательно встретится хотя бы один раз угол $180°$ и обязательно встретится хотя бы один раз угол $270°$ (а вот угол $0°$ не обязан встречаться, хотя и не помешает, если встретится). Чтобы посчитать общее количество таких наборов (а значит, и количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол), разобьем их на четыре группы:

— наборы, в которых все углы поворота различны, т.е. все α_k попарно различны, таких наборов (за счет перестановок) всего 4! = 24 штуки;

— наборы, в которых углы поворота $180°$ и $270°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $90°$ встречается два раза, таких наборов (за счет перестановок) всего 6·2 = 12 штук (здесь 6 — это количество мест в векторе для двух углов по $90°$, а 2 — это две перестановки углов $180°$ и $270°$ на оставшихся двух местах);

— наборы, в которых углы поворота $90°$ и $270°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $180°$ встречается два раза; аналогично, таких наборов (за счет перестановок) также всего 6·2 = 12 штук;

— наборы, в которых углы поворота $90°$ и $180°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $270°$ встречается два раза; аналогично, таких наборов (за счет перестановок) всего 6·2 = 12 штук.

В итоге, получаем всего 24 + 12 + 12 + 12 = 60 упорядоченных наборов углов поворота, удовлетворяющих нужному условию. Это и есть общее количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол, при которых итоговая стопка оказывается непрозрачной. Наконец, переставив стекла 5! = 120 способами, получим общее количество 120·60 =7200 укладок, при котором итоговая стопка оказывается непрозрачной.

Ответ: 7200 способов.

2. Решение:

$$\sin^4 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=1 \Leftrightarrow (1-\cos^2 2025x)^2+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=1 \Leftrightarrow$$

$$\cos^4 2025x-2\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 2025x(\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x-2)=0 \ \Leftrightarrow$$

1) $\cos 2025x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4050}+\dfrac{\pi n}{2025}$, $n\in Z$ или 2) $\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x=2 \ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\cos^2 2025x=1,\\ \cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2025x=0,\\ \cos 2016x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi n}{2025},\ n\in Z,\\ x=\dfrac{2\pi m}{2016},\ m\in Z,\end{cases}$$

$$\frac{n}{2025}=\frac{m}{1008},\ n=\frac{2025m}{1008}=\frac{225m}{112},\ n\in Z,\ m\in Z \Rightarrow m=112k,\quad x=\frac{\pi k}{9},\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4050}+\dfrac{\pi n}{2025}$, $n\in Z$, $x=\dfrac{\pi k}{9}$, $k\in Z$.

3. Решение: Пусть O_1 - центр вписанной в треугольник ABC окружности, R - ее радиус, O_2 - центр вписанной в треугольник ADE окружности, r - ее радиус. Обозначим p_1 полупериметр треугольника ABC, p_2 полупериметр треугольника ADE. Тогда $AK=p_2$, $AK=p_1-BC$. Действительно, по свойствам касательных к окружности имеем (см. рис.)

$$2AK=AK+AH=AD+DK+EH+AE=AD+(DM+ME)+AE=2p_2,$$

$$2AK=(AB-BK)+(AC-CH)=AB+AC+(BF+CF)-2(BF+CF)=2(p_1-BC).$$

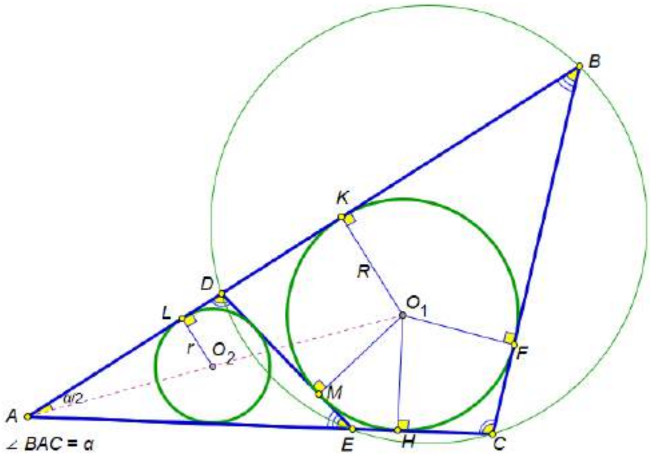
Тогда $r=S_{ADE}/p_2=S_{ADE}/AK=1/6.$

Поскольку около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, то $\angle ABC+\angle DEC=180°$, и $\angle AED=\angle ABC$. Следовательно, треугольники ADE и ACB подобны, и $\dfrac{r}{R}=\dfrac{p_2}{p_1}$, $R=\dfrac{r(AK+BC)}{AK}=\dfrac{3+15}{6\cdot 3}=1.$

Пусть $\angle BAC = \alpha$.

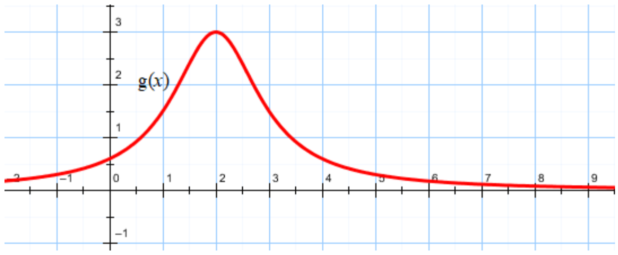
Тогда $\operatorname{tg}(\alpha/2) = R/AK = 1/3$, и $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}(\alpha/2)/(1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)) = 3/4$.

Ответ: $3/4$.



4. Решение:

Функция $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5} = \dfrac{3}{(x-2)^2+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max} = g(2) = 3$, на промежутке $(-\infty;2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;+\infty)$ − убывает.



1) Функция $z = \dfrac{g(x)}{3}$ принимает все значения из промежутка $(0;1]$, причем $z = \dfrac{g(x)}{3} = 1$ $\Leftrightarrow x = 2$. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{2}{3}g(z) + 2\sqrt{2-\dfrac{1}{z}}$ на промежутке $(0;1]$. Второе слагаемое имеет смысл, если $2-\dfrac{1}{z} \ge 0$, т.е. при $z \in [1/2;1] \subset (0;1]$. Функции $\dfrac{2}{3}g(z)$ и $2\sqrt{2-\dfrac{1}{z}}$ являются возрастающими на отрезке $[1/2;1]$, и их сумма $f(z)$ также возрастает на этом отрезке, свое наибольшее значение принимает в точке 1. Итак, $f(z) \le f(1) = \dfrac{2}{3}g(1) + 2\sqrt{2-1} = 3$, $f(z) = 3 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

2) Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;9]$, поскольку $t = g(x) \in (0;3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $\varphi(x) = 50g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $50g(x)$ на промежутке $(0;9]$. На указанном промежутке $50g(x)$ принимает все значения из множества $[50g(9);50g(2)] = [3;150]$. Таким образом, $3 \le \varphi(x) = 50g(g^2(x))$, причем $\varphi(x) = 3 \Leftrightarrow g(x) = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

3) Исходное неравенство эквивалентно $f(g(x)/3) \geq \varphi(x)$. Поскольку $f(g(x)/3) \leq 3$, $\varphi(x) \geq 3$, то исходное неравенство будет справедливо только в том случае, когда $f(g(x)/3) = 3$ и $\varphi(x) = 3$, т. е. при $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

5. Решение: $6a - 2ab\,\mathrm{tg}x + \sqrt{2(x + |x + b\,\mathrm{tg}x| + b\,\mathrm{tg}x)} = 4 + 2ax \Leftrightarrow$

$\sqrt{2(x + b\,\mathrm{tg}x + |x + b\,\mathrm{tg}x|)} = 4 - 6a + 2a(x + b\,\mathrm{tg}x)$. Сделаем замену $y = x + b\,\mathrm{tg}x$. Получим уравнение $\sqrt{2(y + |y|)} = 4 - 6a + 2ay$. Пусть при некотором значении параметра a это уравнение имеет единственное решение y_0. Приходим к уравнению $y_0 = x + b\,\mathrm{tg}x$. Если $b \neq 0$, то функция $g(x) = x + b\,\mathrm{tg}x = x + b\,\mathrm{tg}\,x$ на каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z,$ принимает все значения из интервала $(-\infty; +\infty)$ (на каждом из указанных промежутков функция $\phi(x) = b\,\mathrm{tg}\,x, b \neq 0,$ принимает все значения, принадлежащие $(-\infty; +\infty)$, а функция $h(x) = x$ ограничена). Таким образом, уравнение $y_0 = x + b\,\mathrm{tg}x$ при $b \neq 0$ будет иметь бесконечно много решений, что не удовлетворяет условию задачи. При $b = 0$ имеем $y_0 = x$, решение единственное.

Итак, $b = 0$, и необходимо выяснить, при каких a уравнение $\sqrt{2(x + |x|)} = 4 - 6a + 2ax$ имеет единственное решение.

1. $x < 0,\ 0 = 4 - 6a + 2ax,\ x = \dfrac{3a - 2}{a} < 0.$ Следовательно, при $a \in (0; 2/3)$ уравнение имеет **один отрицательный корень** $x = \dfrac{3a - 2}{a}$.

2. $x \geq 0,\ 2\sqrt{x} = 4 - 6a + 2ax.$ Сделаем замену $\sqrt{x} = t \geq 0,$ приходим к уравнению

   $2at^2 - 2t + 4 - 6a = 0.$ (*)

   1) $a = 0,\ t = 2,\ x = 4$ - **единственное решение**.

   2) $a \neq 0,$ имеем квадратное уравнение, которое будет иметь **два различных неотрицательных решения** при следующих условиях

$$\begin{cases} D/4 = 1 - 8a + 12a^2 > 0, \\ \dfrac{2}{2a} > 0, \\ \dfrac{4 - 6a}{2a} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0; 1/6) \cup (1/2; 2/3].$$

   3) Уравнение (*) будет иметь **одно неотрицательное решение,** если

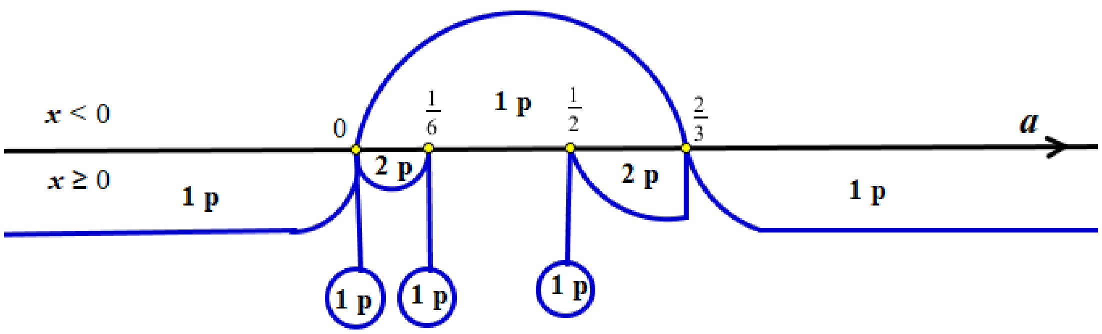
3.1. $D/4 = 1 - 8a + 12a^2 = 0, \quad t = \dfrac{1}{2a} \geq 0.$ Имеем $a = \dfrac{1}{6}, a = \dfrac{1}{2}$.

3.2. $\dfrac{4-6a}{2a} < 0, \;\; a \in (-\infty;\, 0) \cup (2/3;\, +\infty).$

3.3. $\dfrac{4-6a}{2a} = 0, \; \dfrac{2}{2a} < 0,$ таких a нет.

Итак, при $a \in (-\infty;\, 0)$ уравнение (*) имеет ровно **один неотрицательный корень** $t = \dfrac{1-\sqrt{1-8a+12a^2}}{2a}$, и $x = \left(\dfrac{1-\sqrt{1-8a+12a^2}}{2a}\right)^2$. При $a \in \{1/6, 1/2\} \cup (2/3;\, +\infty)$ уравнение (*) имеет ровно **один неотрицательный корень** $t = \dfrac{1+\sqrt{1-8a+12a^2}}{2a}$, и $x = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-8a+12a^2}}{2a}\right)^2$.

Совместим рассмотренные случаи:



Ответ: при $b = 0, a \in (-\infty;\, 0)$ $\; x = \left(\dfrac{1-\sqrt{1-8a+12a^2}}{2a}\right)^2$; при $b = 0, a = 0 \quad x = 4;$

при $b = 0, a \in (1/6;\, 1/2) \quad x = \dfrac{3a-2}{a}$; при $b = 0, a \in (2/3;\, +\infty)$ $x = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-8a+12a^2}}{2a}\right)^2$.

6. Решение:

1) Построение сечения.

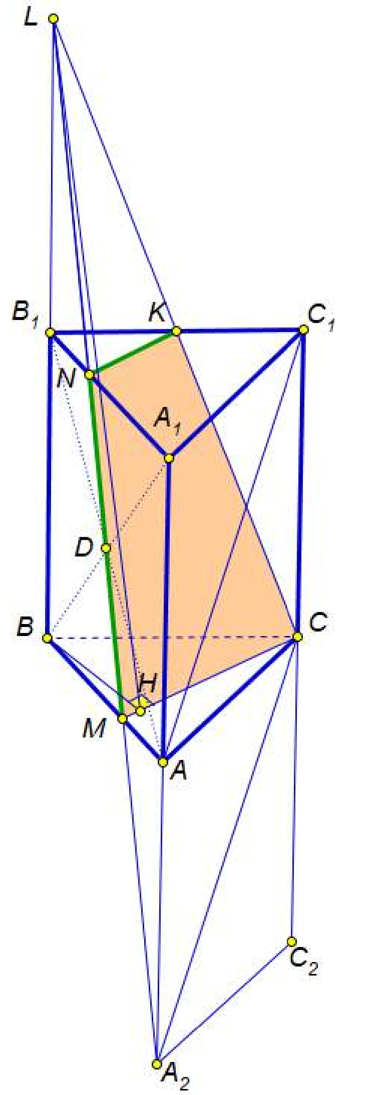
В плоскости боковой грани AA_1C_1C через точку C проведем прямую A_2C, параллельную AC_1, точка A_2 - точка пересечения AA_1 и A_2C, $AA_1 = AA_2$.

Пусть D – центр симметрии боковой грани AA_1B_1B.

Через точку D проводим прямую A_2D, принадлежащую плоскости сечения. Точка M - точка пересечения AB и A_2D, точка N - точка пересечения A_1B_1 и A_2D, точка L - точка пересечения прямой BB_1 и A_2D, $AM = NB_1$, $BM = NA_1 = 2AM$, $AA_2 = BB_1 = B_1L$. Если обозначить сторону основания призмы через a, высоту призмы через h, то $AM = B_1N = a/3$, $BM = NA_1 = 2a/3$, $BB_1 = B_1L = h$.

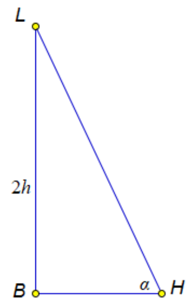
В плоскости основания $A_1B_1C_1$ через точку N проведем прямую NK, параллельную MC, точка K - точка пересечения NK и B_1C_1.

Трапеция $MNKC$ - искомое сечение.



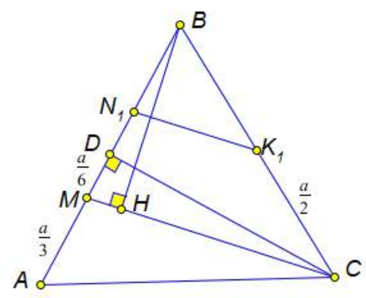
2) Спроецируем сечение на плоскость основания ABC призмы. Пусть N_1 и K_1 - проекции точек N и K на плоскость ABC. Тогда $N_1K_1 \parallel MC$, $BK_1 = K_1C$. Проекцией сечения на плоскость основания ABC является трапеция CMN_1K_1, ее площадь

$$S_{np} = S_{BMC} - S_{BN_1K_1} = S_{ABC}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = 7\sqrt{3}.$$



3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. $S_{сеч} = S_{np}/\cos\alpha \iff \cos\alpha = S_{np}/S_{сеч} = 1/\sqrt{3}$.

4) Найдем высоту призмы h. Построим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную MC линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp MC, LH \perp MC$). Угол α наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL, $BL = 2h$.



5) $BH \cdot CM = BM \cdot CD,\ BH = \dfrac{BM \cdot CD}{CM} = \dfrac{\dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{6}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{6},$

$\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $2h = BL = BH \operatorname{tg}\alpha = 4\sqrt{3}$, $h = 2\sqrt{3}$.

6) $V_{LBMC} = \dfrac{1}{3} S_{BMC} \cdot BL = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} S_{ABC} \cdot BL = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{18} \cdot BL = \dfrac{112}{3}$.

$V_{LB_1NK} = \dfrac{1}{8} V_{LBMC}$, $V_{BMCB_1NK} = \dfrac{7}{8} V_{LBMC} = \dfrac{98}{3}$, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 84$,

$V_{AMCA_1NKC_1} = 84 - \dfrac{98}{3} = \dfrac{154}{3}$.

Ответ: $\dfrac{112}{3}$, $\dfrac{154}{3}$.

Решение варианта №20

1. Решение. Сначала рассмотрим некоторый один фиксированный вертикальный порядок укладки стекол (снизу вверх). Ясно, что, повернув всю укладку целиком на какой-то угол, мы укладку не изменим (не получим новой укладки). Поэтому можно считать, что нижнее стекло укладки всегда зафиксировано (не поворачивается). Тогда различные укладки (с фиксированным вертикальным порядком стекол) будут отличаться друг от друга поворотом на $0°$, $120°$, и $240°$ каждого из последующих 4-х верхних стекол по отношению к фиксированному нижнему стеклу. Поэтому получим всего $3^4 = 81$ вариантов укладки с фиксированным вертикальным порядком стекол. Учитывая теперь всевозможные вертикальные перестановки пяти стекол (5! = 120 вариантов), получим общее количество возможных укладок стекол в стопку: $5! \cdot 3^4 = 120 \cdot 81 = 9720$ штук. Но не все эти укладки удовлетворяют условию задачи. Условию задачи удовлетворяют все укладки, кроме тех, при которых вся стопка оказывается полностью вертикально непрозрачной. Найдем предварительно количество таких укладок.

Для этого рассмотрим столбики из равнобедренных треугольников (частей, находящихся над каждым из трех фиксированных равнобедренных треугольников нижнего стекла. Определим количество таких укладок, при которых каждый из этих четырех столбиков является непрозрачным. При этом один из этих столбиков уже заведомо непрозрачен (тот, что стоит на нижнем закрашенном равнобедренном треугольнике). Рассмотрим упорядоченный набор (вектор) из возможных углов поворота (для определенности, по часовой стрелке) закрашенных равнобедренных треугольников на каждом из 4-х верхних стекол по отношению к нижнему закрашенному равностороннему треугольнику: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_k \in \{0°, 120°, 240°\}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Все «столбики» из стеклянных равнобедренных треугольников окажутся непрозрачными, если в этом наборе углов поворота обязательно встретится хотя бы один раз угол $120°$ и обязательно встретится хотя бы один раз угол $240°$ (а вот угол $0°$ не обязан встречаться, хотя и не помешает, если встретится). Остальные два места в наборе могут занимать любые значения из трех возможных $\{0°, 120°, 240°\}$, т.е. $0°$ и $120°$, или $0°$ и $240°$, или $120°$ и $240°$, а также $0°$ и $0°$, или $120°$ и $120°$, или $240°$ и $240°$. Поэтому, чтобы посчитать общее количество таких наборов (а значит, и количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол), разобьем их на следующие шесть групп:

— если двумя дополнительными значениями являются $0°$ и $120°$,то получим наборы, в которых углы поворота $0°$ и $240°$ встречаются по одному разу, а угол $120°$ встречается 2 раза, всего таких наборов (за счет перестановок) будет 6·2 = 12 штук (здесь 6 — это количество способов выбора мест в векторе для двух углов по $120°$, а 2 — количество способов перестановки углов $0°$ и $240°$ в двух оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются $0°$ и $240°$,то получим наборы, в которых углы поворота $0°$ и $120°$ встречаются по одному разу, а угол $240°$ встречается 2 раза, аналогично предыдущему случаю, всего таких наборов (за счет перестановок) будет $6 \cdot 2 = 12$ штук ;

— если двумя дополнительными значениями являются $120°$ и $240°$, то получим наборы, в которых углы поворота $120°$ и $240°$ встречаются по два раза; всего таких наборов (за счет перестановок) будет $6 \cdot 1 = 6$ штук (здесь 6 — количество способов выбора двух мест из четырех для размещения двух углов $120°$, а 1 — единственный способ размещения двух углов $240°$ в двух оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются $0°$ и $0°$, то мы получим наборы, в которых углы поворота $120°$ и $240°$ встречаются по одному разу, а угол $0°$ встречается 2 раза, всего таких наборов (за счет перестановок) будет $6 \cdot 2 = 12$ штук (здесь 6 — количество способов выбора двух мест из четырех для размещения двух углов $0°$, а 2 — количество способов перестановки углов $120°$ и $240°$ в двух оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются $120°$ и $120°$, то мы получим наборы, в которых угол поворота $240°$ встречается один раз, а угол $120°$ встречается 3 раза, всего таких наборов будет $4 \cdot 1 = 4$ штуки (здесь 4 — количество способов выбора одного места из четырех для размещения угла $240°$, а 1 — единственный способ размещения одинаковых углов $120°$ в трех оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются $240°$ и $240°$, то мы получим наборы, в которых угол поворота $120°$ встречается один раз, а угол $240°$ встречается 3 раза, аналогично предыдущему случаю, всего таких наборов будет $4 \cdot 1 = 4$ штуки.

В итоге, получаем всего $12 + 12 + 6 + 12 + 4 + 4 = 50$ упорядоченных наборов углов поворота, удовлетворяющих нужному условию. Это и есть общее количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол, при которых итоговая стопка оказывается непрозрачной. Переставив стекла (в вертикальном направлении) $5! = 120$ способами, получим общее количество $120 \cdot 50 = 6000$ укладок, при котором итоговая стопка оказывается непрозрачной. Наконец, вычтя из общего количества различных укладок 9720 найденное число 6000 ненужных нам укладок, окончательно получаем $9720 - 6000 = 3720$ способов укладки частично прозрачной стопки из пяти стекол.

Ответ: 3720 способов.

2. Решение:

$$\sin^4 2019x + \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2018} 2019x = 1 \Leftrightarrow (1-\cos^2 2019x)^2 + \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2018} 2019x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos^4 2019x - 2\cos^2 2019x + \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2018} 2019x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 2019x(\cos^2 2019x + \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2016} 2019x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

1) $\cos 2019x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4038} + \dfrac{\pi n}{2019}$, $n \in Z$ или 2) $\cos^2 2019x + \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2016} 2019x = 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cos^2 2019x = 1, \\ \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2016} 2019x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2019x = 0, \\ \cos 2022x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{2019}, n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi m}{1011}, m \in Z, \end{cases}$$

$$\frac{n}{2019} = \frac{m}{1011},\ n = \frac{2019m}{1011} = \frac{673m}{337},\ n \in Z,\ m \in Z \Rightarrow m = 337k,\quad x = \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4038} + \dfrac{\pi n}{2019}$, $n \in Z$, $x = \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

3. Решение: Пусть O_1 - центр вписанной в треугольник ABC окружности, R - ее радиус, O_2 - центр вписанной в треугольник ADE окружности, r - ее радиус. Обозначим p_1 полупериметр треугольника ABC, p_2 полупериметр треугольника ADE. Тогда $AK = p_2$, $AK = p_1 - BC$. Действительно, по свойствам касательных к окружности имеем (см. рис.)

$$2AK = AK + AH = AD + DK + EH + AE = AD + (DM + ME) + AE = 2p_2,$$

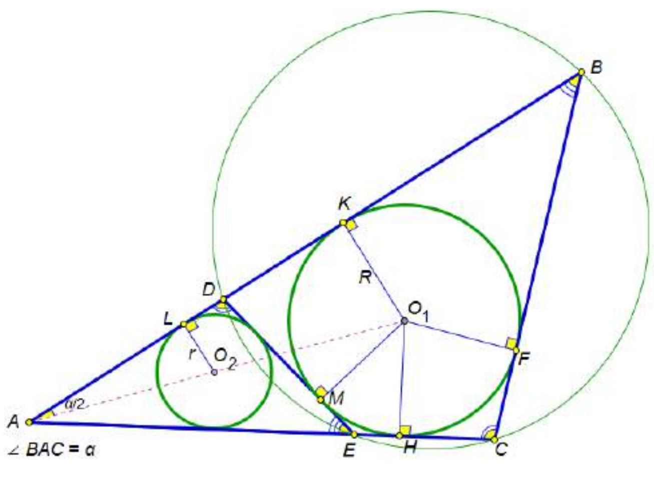
$$2AK = (AB - BK) + (AC - CH) = AB + AC + (BF + CF) - 2(BF + CF) = 2(p_1 - BC).$$

Тогда $r = S_{ADE}/p_2 = S_{ADE}/AK = 1/18$.

Поскольку около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, то $\angle ABC + \angle DEC = 180°$, и $\angle AED = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ADE и ACB подобны, и $\dfrac{r}{R} = \dfrac{p_2}{p_1}$,

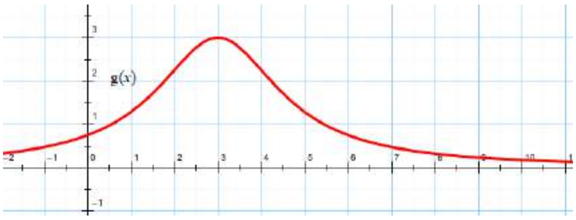
$$R = \frac{r(AK + BC)}{AK} = \frac{1+5}{18} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}(\alpha/2) = R/AK = 1/3$, и $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}(\alpha/2)/(1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)) = 3/4$.



Ответ: $3/4$.

4. Решение:



1) Функция $g(x)=\dfrac{9}{x^2-6x+12}=\dfrac{9}{(x-3)^2+3}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=3$, $g_{\max}=g(3)=3$, на промежутке $(-\infty;3)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(3;+\infty)$ − убывает.

2) Функция $z=\dfrac{g(x)}{3}$ принимает все значения из промежутка $(0;1]$, причем $z=\dfrac{g(x)}{3}=1$ $\Leftrightarrow x=3$. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{7}{9}g(z)+2\sqrt{2-\dfrac{1}{z}}$ на промежутке $(0;1]$. Второе слагаемое имеет смысл, если $2-\dfrac{1}{z}\ge 0$, т.е. при $z\in[1/2;1]\subset(0;1]$. Функции $\dfrac{7}{9}g(z)$ и $2\sqrt{2-\dfrac{1}{z}}$ являются возрастающими на отрезке $[1/2;1]$, и их сумма $f(z)$ также возрастает на этом отрезке, свое наибольшее значение принимает в точке 1. Итак, $f(z)\le f(1)=\dfrac{7}{9}g(1)+2\sqrt{2-1}=3$, $f(z)=3\Leftrightarrow z=1\Leftrightarrow x=3$.

3) Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;9]$, поскольку $t=g(x)\in(0;3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $\varphi(x)=13g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $13g(x)$ на промежутке $(0;9]$. На указанном промежутке $13g(x)$ принимает все значения из множества $[13g(9);13g(3)]=[3;39]$. Таким образом, $3\le\varphi(x)=13g(g^2(x))$, причем $\varphi(x)=3\Leftrightarrow g(x)=3\Leftrightarrow x=3$.

4) Исходное неравенство эквивалентно $f(g(x)/3)\ge\varphi(x)$. Поскольку $f(g(x)/3)\le 3$, $\varphi(x)\ge 3$, то исходное неравенство будет справедливо только в том случае, когда $f(g(x)/3)=3$ и $\varphi(x)=3$, т. е. при $x=3$.

Ответ: $x=3$.

5. Решение: $2a-ab\,\mathrm{ctg}x+2\sqrt{2(x+|x+b\,\mathrm{ctg}x|+b\,\mathrm{ctg}x)}=6+ax\ \Leftrightarrow$

$2\sqrt{2(x+b\,\mathrm{ctg}x+|x+b\,\mathrm{ctg}x|)}=6-2a+a(x+b\,\mathrm{ctg}x)$. Сделаем замену $y=x+b\,\mathrm{ctg}x$. Получим уравнение $2\sqrt{2(y+|y|)}=6-2a+ay$. Пусть при некотором значении параметра a это уравнение имеет **единственное** решение y_0. Приходим к уравнению $y_0=x+b\,\mathrm{ctg}x$. Если $b\ne 0$, то функция

$g(x)=x+b\text{ctg}x=x+b\,\text{ctg}\,x$ на каждом промежутке $(\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z,$ принимает все значения из интервала $(-\infty;+\infty)$ (на каждом из указанных промежутков функция $\phi(x)=b\,\text{ctg}\,x,\ b\neq 0,$ принимает все значения, принадлежащие $(-\infty;+\infty)$, а функция $h(x)=x$ ограничена). Таким образом, уравнение $y_0=x+b\text{ctg}x$ при $b\neq 0$ будет иметь бесконечно много решений, что не удовлетворяет условию задачи. При $b=0$ имеем $y_0=x$, решение единственное.

Итак, $b=0$, и необходимо выяснить, при каких a уравнение $2\sqrt{2(x+|x|)}=6-2a+ax$ имеет единственное решение.

1. $x<0,\ 0=6-2a+ax,\ x=\dfrac{2a-6}{a}<0.$ Следовательно, при $a\in(0;3)$ уравнение имеет **один отрицательный корень** $x=\dfrac{2a-6}{a}$.

2. $x\geq 0,\ 4\sqrt{x}=6-2a+ax.$ Сделаем замену $\sqrt{x}=t\geq 0,$ приходим к уравнению
   $at^2-4t+6-2a=0.\quad(*)$
   1) $a=0,\ t=1{,}5,\ x=2{,}25$ - **единственное решение**.
   2) $a\neq 0,$ имеем квадратное уравнение, которое будет иметь **два различных неотрицательных решения** при следующих условиях

$$\begin{cases} D/4=4-6a+2a^2>0, \\ \dfrac{4}{a}>0, \\ \dfrac{6-2a}{a}\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a\in(0;1)\cup(2;3].$$

   3) Уравнение (*) будет иметь **одно неотрицательное решение,** если

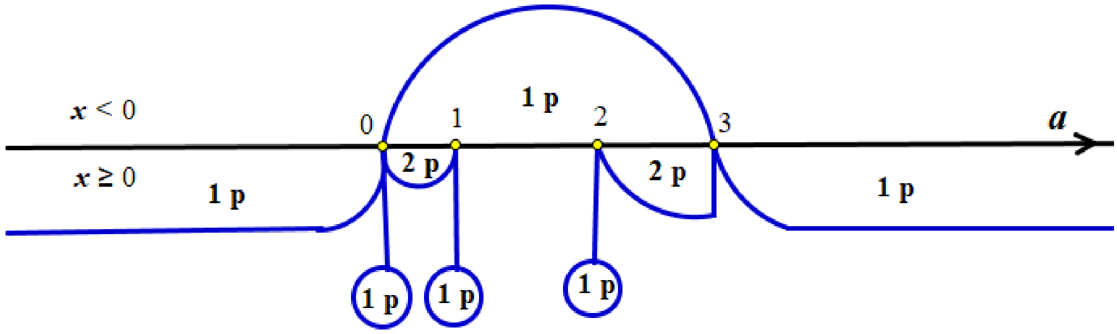
      3.1. $D/4=4-6a+2a^2=0,\quad t=\dfrac{2}{a}\geq 0.$ Имеем $a=1,\ a=2$.

      3.2. $\dfrac{6-2a}{a}<0,\ a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty).$

      3.3. $\dfrac{6-2a}{a}=0,\ \dfrac{4}{a}<0,$ таких a нет.

Итак, при $a\in(-\infty;0)$ уравнение (*) имеет ровно **один неотрицательный корень** $t=\dfrac{2-\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}$, и $x=\left(\dfrac{2-\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$. При $a\in\{1,2\}\cup(3;+\infty)$ уравнение (*) имеет ровно **один неотрицательный корень** $t=\dfrac{2+\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}$, и $x=\left(\dfrac{2+\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$.

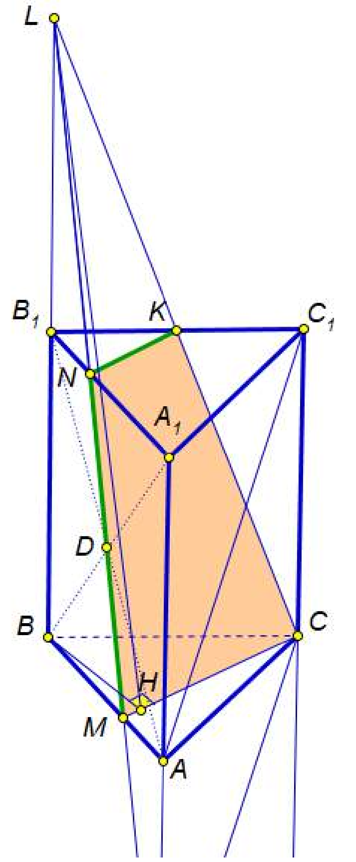
Совместим рассмотренные случаи:



Ответ: при $b=0,\ a\in(-\infty;\,0)$ $x=\left(\dfrac{2-\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$; при $b=0,\ a=0$ $\quad x=2{,}25$;

при $b=0,\ a\in(1;\,2)$ $\quad x=\dfrac{2a-6}{a}$; при $b=0,\ a\in(3;+\infty)$ $x=\left(\dfrac{2+\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$.

6. Решение:

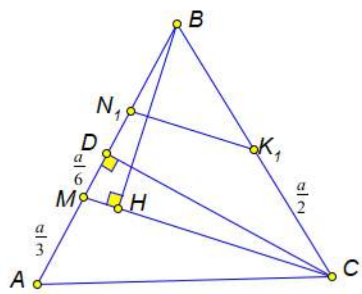


1) Построение сечения.

В плоскости боковой грани AA_1C_1C через точку C проведем прямую A_2C, параллельную AC_1, точка A_2 - точка пересечения AA_1 и A_2C, $AA_1=AA_2$.

Пусть D – центр симметрии боковой грани AA_1B_1B.

Через точку D проводим прямую A_2D, принадлежащую плоскости сечения. Точка M - точка пересечения AB и A_2D, точка N - точка пересечения A_1B_1 и A_2D, точка L - точка пересечения прямой BB_1 и A_2D, $AM=NB_1$, $BM=NA_1=2AM$, $AA_2=BB_1=B_1L$. Если обозначить сторону основания призмы через a, высоту призмы через h, то $AM=B_1N=a/3$, $BM=NA_1=2a/3$, $BB_1=B_1L=h$.



В плоскости основания $A_1B_1C_1$ через точку N проведем прямую NK, параллельную MC, точка K - точка пересечения NK и B_1C_1.

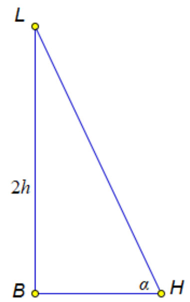
Трапеция $MNKC$ - искомое сечение.

2) Спроецируем сечение на плоскость основания ABC призмы. Пусть N_1 и K_1 - проекции точек N и K на плоскость ABC. Тогда $N_1K_1 \parallel MC$,

$BK_1 = K_1C$. Проекцией сечения на плоскость основания ABC является трапеция CMN_1K_1, ее площадь $S_{пр} = S_{BMC} - S_{BN_1K_1} = S_{ABC}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. $S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha \iff \cos\alpha = S_{пр}/S_{сеч} = 1/3$.

4) Найдем высоту призмы h. Построим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную MC линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp MC, LH \perp MC$). Угол α наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL, $BL = 2h$.



5) $BH \cdot CM = BM \cdot CD,\ BH = \dfrac{BM \cdot CD}{CM} = \dfrac{\frac{2a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{2},$

$\cos\alpha = 1/3$, $\sin\alpha = 2\sqrt{2}/3$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $2h = BL = BH\operatorname{tg}\alpha = 4$, $h = 2$.

6) $V_{LBMC} = \frac{1}{3}S_{BMC}\cdot BL = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC}\cdot BL = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}\cdot BL = \frac{28\sqrt{3}}{27}$.

$V_{LB_1NK} = \frac{1}{8}V_{LBMC}$, $V_{BMCB_1NK} = \frac{7}{8}V_{LBMC} = \frac{49\sqrt{3}}{54}$, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC}\cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{7\sqrt{3}}{3}$,

$V_{AMCA_1NKC_1} = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{49\sqrt{3}}{54} = \frac{77\sqrt{3}}{54}$.

Ответ: $\frac{49\sqrt{3}}{54}$, $\frac{77\sqrt{3}}{54}$.