

Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 9 класс, весна 2017 г.

Вариант №1

1. Железнодорожная компания получила заказ на перевозку определённого количества груза. В компании подсчитали, что если для перевозки выделить вагоны вместимостью 62 тонны, то один вагон останется недогруженным, а если выделить вагоны вместимостью 53 тонны, то понадобится на один вагон больше, чем если бы вагоны были по 62 тонны, но и при этом последний вагон опять будет недогружен. А вот если взять вагоны вместимостью 45 тонн, то все задействованные вагоны будут загружены полностью, но придётся увеличить число вагонов ещё на два. Определите массу груза.

(15 баллов)

2. Точка M лежит на описанной около правильного треугольника ABC окружности и не совпадает с его вершинами. Докажите, что сумма расстояний от точки M до прилежающих вершин треугольника равна расстоянию от точки M до третьей его вершины: $AM + CM = BM$.

(15 баллов)

3. Найдите наименьшую длину отрезка AB , если точка A принадлежит множеству, задаваемому уравнением $y^2 - 3x^2 - 2xy - 9 - 12x = 0$, а точка B - множеству, задаваемому уравнением $x^2 - 8y + 23 + 6x + y^2 = 0$

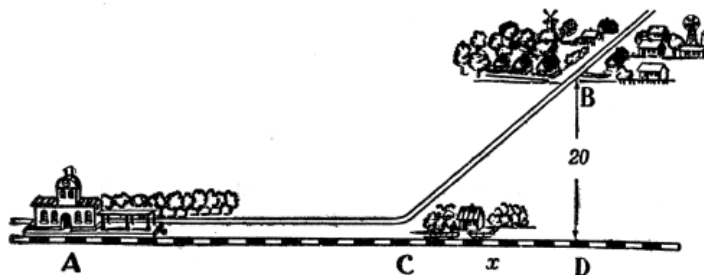
(15 баллов)

4. При каких a неравенство $x^2 + |x + a| < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

(15 баллов)

5. Как устроить полустанок? (старинная задача) В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение B . Где надо устроить полустанок C , чтобы суммарно проезд от A до B по железной дороге AC и по шоссе CB отнимал возможно меньше времени. Скорость движения по железной дороге 0,8, а по шоссе 0,2 км в минуту.

(20 баллов)



6. Сказочное государство расположено на трёх островах: А, В и С. Всего в государстве проживает 100 человек, причём каждый из них живёт на одном из этих островов. Все жители государства – либо рыцари, которые всегда говорят только правду, либо лжецы, которые всегда лгут. На вопрос «Вы проживаете на острове А?» ответили «да» 55 жителей государства; на вопрос «Вы проживаете на острове В?» ответили «да» 38 жителей государства; а на вопрос «Вы проживаете на острове С?» ответили «да» 49 жителей государства. На следующий день на острове А прошёл «очищающий» дождь, после чего все лжецы острова А стали говорить правду (рыцари остались рыцарями, на других островах очищающий дождь не проходил). После этого всем жителям государства был задан вопрос «Вы проживаете на острове В?», на который «да» ответили 27 жителей государства. Если бы «очищающий дождь» прошёл не на острове А, а на острове С, то на вопрос «Вы проживаете на острове В?» ответили бы «да» 29 человек. Сколько лжецов проживают на острове В? (20 баллов)

Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 9 класс, весна 2017 г.

Вариант №2

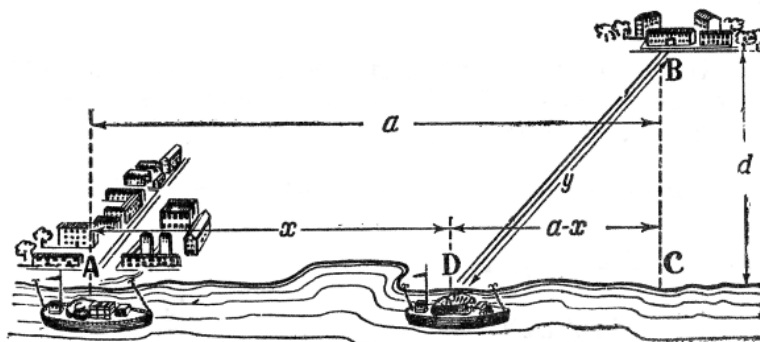
1. Транспортная кампания получила заказ на перевозку детей в спортивно-оздоровительный лагерь. В кампании подсчитали, что если для перевозки выделить автобусы вместимостью 49 посадочных мест, то один из задействованных автобусов будет загружен не полностью. Если выделить автобусы вместимостью 40 посадочных мест, то потребуется на два автобуса больше, но один из задействованных автобусов по-прежнему будет загружен не полностью. А вот если взять автобусы вместимостью 22 посадочных места, то потребуется ещё на 13 автобусов больше, но при этом все посадочные места во всех автобусах будут заняты. Сколько детей должна была перевезти транспортная кампания? (15 баллов)

2. Биссектриса DE треугольника ADC продлена до пересечения с описанной окружностью в точке B . Известны длина $BD = l$ и величина $\sin \angle ADC = a$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$. (15 баллов)

3. Найдите наименьшую длину отрезка AB , если точка A принадлежит множеству, задаваемому уравнением $y^2 - 9 + 2yx - 12x - 3x^2 = 0$, а точка B - множеству, задаваемому уравнением $y^2 + 3 - 4x - 2y + x^2 = 0$. (15 баллов)

4. При каких a неравенство $x^2 < 4 - |x - a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение? (15 баллов)

5. Как провести шоссе? (старинная задача) Из приречного города A надо направлять грузы в пункт B , расположенный на $a = 100$ километров ниже по реке и в $d = 30$ километрах от берега. Как провести шоссе от B к реке, чтобы провоз грузов из A в B обошёлся возможно дешевле, если провозная плата с тонно-километра по реке вдвое меньше, чем по шоссе? (20 баллов)



6. Город Кашино состоит из трёх районов: Манкино, Овсянкино и Гречкино. В городе проживают 120 жителей, причём каждый из них проживает в одном из трёх перечисленных районов. В Кашино проживают только рыцари (которые говорят только правду) и лжецы (которые только лгут). На вопрос «Вы проживаете в районе Манкино?» 68 жителей Кашино ответили «да», на вопрос «Вы проживаете в районе Овсянкино?» 59 жителей Кашино ответили «да», а на вопрос «Вы проживаете в районе Гречкино?» ответили утвердительно 46 жителей города Кашино. На следующий день в Манкино приехал доктор Айболит и вылечил всех лжецов Манкино (они стали говорить только правду) (в Овсянкино и Гречкино Айболит не побывал). После этого на вопрос «Вы проживаете в районе Овсянкино?» «да» ответили 34 жителя Кашино. Если бы доктор Айболит приехал не в Манкино, а в Гречкино, то на тот же Вопрос утвердительно ответили бы 43 жителя Кашино. Сколько лжецов проживают в Овсянкино?

(20 баллов)