«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Председатель Оргкомитета
Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
________________ А.А. Александров
«____» ________ 201__г.

Типовой вариант академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

по общеобразовательному предмету «Математика»

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Доехав до пункта B менее чем за один час, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 12 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(16-24x+9x^2)<0$ (8 баллов)

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $300x^2-61xy+3y^2+7=0$ и являются соответственно третьим и восьмым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-\cos 6x-\cos 10x+2}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(2\cdot 2^{-\log_x 3}-4)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{1+\sqrt{\log_x 3+5}}>\dfrac{(2^{-\log_x 3}-2)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{\sqrt{\log_x 3+5}-2}$

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1\big/g(16g(g(\ln x))/65)$, где $g(x)=x^3+1\big/x^3$

(10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=4$, $BK=9$, $KC=3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$. (10 баллов)

8. На прямой $x=\sqrt{3}\big/2$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2\big/2$, угол между которыми равен 60°. (12 баллов)

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений $y-2=a(x-4)$, $2x\Big/\left(|y|+y\right)=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если боковые ребра $TA = 4$, $TB = 12$, $TC = 3$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит? (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 1

1. Из пункта A в пункт B вышел один пешеход, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый прошёл половину пути, второй прошел 15 *км*, а когда второй прошёл половину пути, первый прошел 24 *км*. В пункт B пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами A и B? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-12}{x+4}}-\sqrt{\frac{x+4}{x-12}}<\frac{16}{15}$. (8 баллов)

3. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная прогрессия обратится в арифметическую, но если затем третий член полученной прогрессии будет увеличен на 64, то она опять обратится в геометрическую. Найдите эти числа. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{1-\cos 2x-2\sin^{3} x}{6\sin x-2}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x+2-|x+1|} \le x+5-|2x+3|$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=g\left(\sqrt{25-g^{2}(x)}\right)$, где $g(x)=||x|-2|-1$ (10 баллов)

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, причем $AM=18$. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен 112, а площадь равна 672. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-3$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=x^{2}+16$ с абсциссой x_{0} точки касания, лежащей в промежутке $-3\le x_{0}\le 1$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$(x-a)^{2}-a-1=|x|/x$$

имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами $AB=24$ и $BC=30$, а боковое ребро пирамиды $TA=16$ перпендикулярно плоскости основания. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр симметрии основания O, вершину пирамиды и точку M, лежащую на стороне BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае? (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2016 г.

Вариант № 5

1. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами А и В.

(8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-24}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-24}}<\frac{24}{5}$. (8 баллов)

3. Три числа, сумма которых 114, являются, с одной стороны, тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а с другой — первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии соответственно. Найдите эти числа.

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\sin x\cos x}-\sqrt{1-\sin x\cos x}=0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x+4-|x+3|}>x-3+|x+5|$.. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=g\left(2\sqrt{2,5-g(x)}\right)$, где $g(x)=3/(|x-2|+1)$ (10 баллов)

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, а боковой стороны CD в точке K, причем $AM=9$, $CK=3$. Найдите диагонали трапеции, если её периметр равен 56. (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-5$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=7-6x-x^2$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-5\le x_0\le 1$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$y-1=|x|/x;\ (x-a)^2=y+a$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB=12$ и $AD=4$, а боковые ребра соответственно равны $TA=3$, $TD=5$, $TC=13$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину T, центр симметрии основания и точку M, лежащую на ребре BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае? (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 9

1. Две автомашины перевозили удобрения, делая одинаковое число рейсов. Оказалось, что на первую машину можно грузить на 4 тонны меньше, а на вторую на 3 тонны меньше, чем планировалось, поэтому каждой машине пришлось сделать по 10 лишних рейсов. При этом, как и планировалось, первая машина перевезла на 60 тонн больше, чем вторая. Сколько удобрений грузили в каждую машину и сколько рейсов было выполнено? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^6-5}}{x^3}-\frac{x^3}{\sqrt{x^6-5}}<\frac{5}{6}$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметичес- кой прогрессии (a_n), если $a_{30}=3,\ a_{32}=11$? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x-1}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{|x|+21-7\sqrt{|x|+9}}{x^2-8|x|}>0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{1-g^2(x)}$, где $g(x)=\frac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}$ (10 баллов)

7. В трапеции *ABCD* основания *AD*=9, BC=2, углы *A* и *D* при основании равны $\operatorname{arctg} 4$ и $\operatorname{arctg}(2/3)$, соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *CBE*, где *E* – точка пересечения диагоналей трапеции. (12 баллов)

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси *x*, а координаты двух других вершин удовлетворяют уравнению $\sqrt{y}=5-x^2$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$2y-2=a(x-2),\quad \frac{4y}{|x|+x}=\sqrt{y}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды *TABCD* служит прямоугольник *ABCD*. Высота пирамиды, равная h, совпадает с боковым ребром *TA*, а боковое ребро *TC* наклонено к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через ребро *TC* и параллельная диагонали основания *BD*,

образует с плоскостью основания угол 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания *BD*?

(12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 15

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю?

(8 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^6-21}}{x^3}-\frac{x^3}{\sqrt{x^6-21}}<\frac{21}{10}$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 113, 109, 105,…? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{19-|x-3|}{\sqrt{|x-3|-1}-2}\leq 1$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{36-g^2(x)}$, где $g(x)=-8-2\cos 8x-4\cos 4x$ (10 баллов)

7. Площадь прямоугольного треугольника равна 1, а его гипотенуза равна $\sqrt{5}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведенными к его катетам.

(12 баллов)

8. На прямой $x-y=5$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2/8$. Напишите уравнения этих касательных.

(12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x+|x|=4\sqrt{a(x-3)+2}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

(12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 20 и 8, а угол между ними 60°.

(12 баллов)