Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2017 г.

Вариант № 26

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышел турист и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее получаса, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A, увеличив при этом свою скорость на 25%. Через 10 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с туристом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) туриста, и для этого значения скорости туриста найдите первоначальную скорость велосипедиста. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(25-40x+16x^2)<0$. (8 баллов)

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $280x^2-61xy+3y^2-13=0$ и являются соответственно четвертым и девятым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{4\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 2x\sin 6x-\cos 4x-\cos 12x+2}{\sqrt{\cos x-\sin x}}=0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(2\cdot 3^{-\log_x 2}-6)\sqrt{2-\sqrt{2\log_x 2+3}}}{2+\sqrt{\log_x 2+2}}>\dfrac{(3^{-\log_x 2}-3)\sqrt{2-\sqrt{2\log_x 2+3}}}{\sqrt{\log_x 2+2}-1}$

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1/g(64g(g(\ln x))/1025)$, где $g(x)=x^5+1/x^5$ (10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=5$, $BK=16$, $KC=2$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$. (12 баллов)

8. На прямой $x=\sqrt{3}$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/4$, угол между которыми равен $60°$. (12 баллов)

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений $y-1=a(x-1)$, $2x/(|y|+y)=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

(12 баллов)

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если сторона основания $AC = 5$ и боковые ребра $TA = 4, TB = 12$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит? (12 баллов)

Второй (заключительный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», весна 2017 г.

Вариант № 28

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее двух часов, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 24 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(36-60x+25x^2)<0$. (8 баллов)

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $26x^2+23xy-3y^2-19=0$ и являются соответственно шестым и одиннадцатым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{2\,\mathrm{tg}^4 6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2}{\sqrt{\cos x-\sqrt{3}\sin x}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(5\cdot 2^{-\log_x 3}-2{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{1+\sqrt{\log_x 3+8}}>\dfrac{(2^{-\log_x 3}-0{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}$.

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1/g(64g(16g(\log_2 x))/5)$, где $g(x)=\sqrt[5]{x}+1/\sqrt[5]{x}$

(10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=8$, $BK=24$, $KC=3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$. (12 баллов)

8. На прямой $x=1$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/4$, угол между которыми равен $45°$. (12 баллов)

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений $2y-2=a(x-1),\, 2x/(|y|+y)=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

(12 баллов)

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если боковые ребра $TA = 6, TB = 12, TC = 2$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?

(12 баллов)