Решение заданий для 9 класса. Вариант 1. Вариант 2.

Задача 1. (Вариант 1)

Решение: Пусть для перевозки груза нужно было n вагонов вместимостью 45 тонн. Значит, кампания должна перевезти 45·n тонн. В случае перевозки вагонами вместимостью 53 тонны, понадобится (n-2) вагона, причём последний будет загружен недогружен. Из этих условий следует: $\begin{cases}53(n-2) > 45n\\53(n-3) < 45n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8n > 53\cdot 2\\8n < 53\cdot 3\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}8n > 106\\8n < 159\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n > \frac{53}{4} = 13\frac{1}{4}\\n < \frac{159}{8} = 19\frac{7}{8}\end{cases}$ Т.к. n – целое число, то $n \in \{14; 15; 16; 17; 18; 19\}$.

В случае перевозки груза вагонами вместимостью 64 тонны потребуется (n-3) вагона, причём последний вагон будет недогружен, т.е. $\begin{cases}62(n-3) > 45n\\62(n-4) < 45n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}17n > 62\cdot 3\\17n < 62\cdot 4\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}17n > 186\\17n < 248\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n > \frac{186}{17} = 10\frac{16}{17}\\n < \frac{248}{17} = 14\frac{10}{17}\end{cases}$

Т.к. n – целое число, то $n \in \{11; 12; 13; 14\}$.

Из двух полученных результатов, n=14.

Значит, транспортной кампании необходимо перевезти 45·n=45·14=630 тонн груза.

Ответ: 630 тонн груза.

Задача 1. (Вариант 2)

Решение: Пусть для перевозки детей нужно было n автобусов с 22 посадочными местами. Значит, в лагерь нужно было перевезти 22·n детей.

В случае перевозки 40-местными автобусами нужно будет нужно будет (n-13) автобусов, причём в последнем останутся свободные места, т.е. $\begin{cases}40(n-13) > 22n\\40(n-14) < 22n\end{cases}$ Сократим на два:

$\begin{cases}20(n-13) > 11n\\20(n-14) < 11n\end{cases}$ откуда $\begin{cases}9n > 260\\9n < 280\end{cases}$ $\begin{cases}n > \frac{260}{9} = 28\frac{8}{9}\\n < \frac{280}{9} = 31\frac{1}{9}\end{cases}$ Т.к. n – целое число, то $n \in \{29; 30; 31\}$.

В случае перевозки 49-местными автобусами потребуется (n-15) автобусов, причём в последнем останутся свободные места, т.е.

$\begin{cases}49(n-15) > 22n\\49(n-16) < 22n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}27n > 49\cdot 15\\27n < 49\cdot 16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}9n > 245\\27n < 784\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n > \frac{245}{9} = 27\frac{2}{9}\\n < \frac{784}{27} = 29\frac{1}{27}\end{cases}$

Т.к. n – целое число, то $n \in \{28; 29\}$.

Из двух полученных результатов, n=29.

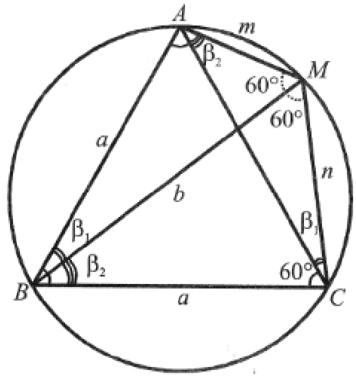
Тогда число детей, которых необходимо перевезти: $22\cdot n = 22\cdot 29 = 638$.

Ответ: 638 детей.

Задача 2. (Вариант 1)

Доказательство:

Первый способ. С использованием теоремы синусов.



Пусть $M \in AC$, $\angle ABM = \beta_1$, $\angle CBM = \beta_2$, $AB = a$, R - радиус описанной окружности, $AM = m$, $CM = n$, $BM = b$. Требуется доказать, что $m + n = b$.

Имеем:. $\begin{cases} m = 2R\sin\beta_1 \\ n = 2R\sin\beta_2 \end{cases} \Rightarrow m + n = 2R\left(\sin\beta_1 + \sin\beta_2\right)$

Учтем, что $\beta_2 = 60^\circ - \beta_1$.

Имеем:

$$m + n = 2R\left(\sin\beta_1 + \sin\left(60^\circ - \beta_1\right)\right) = = 2R\left(\sin\beta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta_1 - \frac{1}{2}\sin\beta_1\right) =$$

$$= 2R\left(\frac{1}{2}\sin\beta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta_1\right) = 2R\sin\left(\beta_1 + \frac{\pi}{3}\right) = = 2R\sin\left(\angle BCM\right) = BM = b,$$

$m + n = b$

Второй способ. С использованием теоремы косинусов.

$\angle AMB = \angle CMB = 60^\circ$.

$$\begin{cases} a^2 = m^2 + b^2 - 2mb\cdot\frac{1}{2} = m^2 + b^2 - mb \\ a^2 = n^2 + b^2 - 2nb\cdot\frac{1}{2} = n^2 + b^2 - nb \end{cases} \Rightarrow m^2 - n^2 - \left(m - n\right)b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(m - n\right)\left(m + n - b\right) = 0$$

Если $m - n \neq 0$ (точка M - не середина дуги AMC), то $m + n = b$.

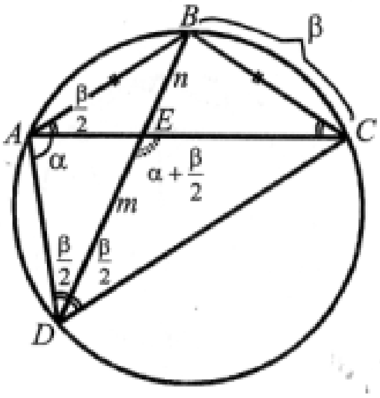
Если $m - n = 0 \Leftrightarrow m = n$ (точка M середина дуги AMC), то BM - диаметр, $\angle BAM = 90^\circ$, $\angle ABM = 30^\circ$, и из ΔABM имеем: $BM = \dfrac{AM}{\sin\angle ABM}$

$$\Leftrightarrow b = \frac{m}{1/2} = 2m \Leftrightarrow b = m + n$$

Ответ: утверждение доказано.

Задача 2. (Вариант 2)

Биссектриса *DE* треугольника *ADC* продлена до пересечения с описанной окружностью в точке *B*. Известны длина *BD* = l и величина $sin\angle ADC = a$. Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*.



Решение:

Для искомой площади имеем (см. рис.):

$$S = \frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot sin\angle DEC = \frac{1}{2}BD \cdot 2R \cdot sin\angle DEC$$

Из ΔADE и ΔABE ясно,что $\angle DEC = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle DAB$,

где $\alpha = \angle DAE, \frac{\beta}{2} = \angle ADE = \angle CDE = \angle BAE = \frac{1}{2} \cup BC$. Поэтому:

$$S = \frac{1}{2}BD \cdot (2R \cdot sin\angle DEC)sin\angle ADC = \frac{1}{2}BD \cdot (2R \cdot sin\angle DAB)sin\angle ADC =$$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot BD \cdot sin\angle ADC = \frac{1}{2}BD^2 sin\angle ADC = \frac{1}{2}l^2 sin\angle ADC$$

Ответ: $\frac{1}{2}l^2 \sin\angle ADC$

Задача 3. (Вариант 1)

Найдите наименьшую длину отрезка AB, если точка A принадлежит множеству, задаваемому уравнением $y^2 - 3x^2 - 2xy - 9 - 12x = 0$, а точка B - множеству, задаваемому уравнением $x^2 - 8y + 23 + 6x + y^2 = 0$.

Решение: Преобразуем эти уравнения к каноническим видам и построим графики этих уравнений:

1) $y^2 - 3x^2 - 2xy - 9 - 12x = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 - 4x^2 - 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow$
$(y - x)^2 - (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x - 2x - 3) \cdot (y - x + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow$
$(y - 3x - 3) \cdot (y + x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x+3 \\ y=-x-3 \end{array}\right.$

Таким образом, первое уравнение задаёт пару пересекающихся прямых $y = 3x + 3$ и $y = -x - 3$.

2) $x^2 - 8y + 23 + 6x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 + 23 = 0 \Leftrightarrow$ $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

Таким образом, второе уравнение задаёт окружность с центром в точке F(-3; 4) радиуса $\sqrt{2}$. Найдём расстояние от центра окружности до каждой из прямых.

Это можно сделать одним из следующих способов:

1. напишем общее уравнение первой прямой: $3x - y + 3 = 0$ и вычислим расстояние по формуле $r_1 = \frac{|3\cdot(-3)-4+3|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.
2. Расстояние от точки F(-3; 4) до прямой $y = -x - 3$ (x+y+3=0): $r_2 = \frac{|-3+4+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$. Эти же расстояния можно было найти и классическими способами.

Для получения ответа осталось только вычесть из r_2 радиус окружности ($\sqrt{2}$). Окончательно получаем min(AB)= $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 3. (Вариант 2)

Найдите наименьшую длину отрезка AB, если точка A принадлежит множеству, задаваемому уравнением $y^2 - 9 + 2yx - 12x - 3x^2 = 0$, а точка B - множеству, задаваемому уравнением $y^2 + 3 - 4x - 2y + x^2 = 0$.

Решение: Преобразуем эти уравнения к каноническим видам и построим графики этих уравнений:

1) $y^2 - 9 + 2xy - 12x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 - 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow$
$(y + x)^2 - (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (y + x - 2x - 3)\cdot(y + x + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow$
$(y - x - 3)\cdot(y + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+3 \\ y=-3x-3 \end{array}\right.$

Таким образом, первое уравнение задаёт пару пересекающихся прямых $y = x + 3$ и $y = -3x - 3$.

2) $y^2 + 3 - 4x - 2y + x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 - 1 + x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow$ $(y - 1)^2 + (x - 2)^2 = 2$.

Таким образом, второе уравнение задаёт окружность с центром в точке F(2; 1) и радиусом $\sqrt{2}$. Найдём расстояние от центра окружности до каждой из прямых: это можно сделать одним из следующих способов:

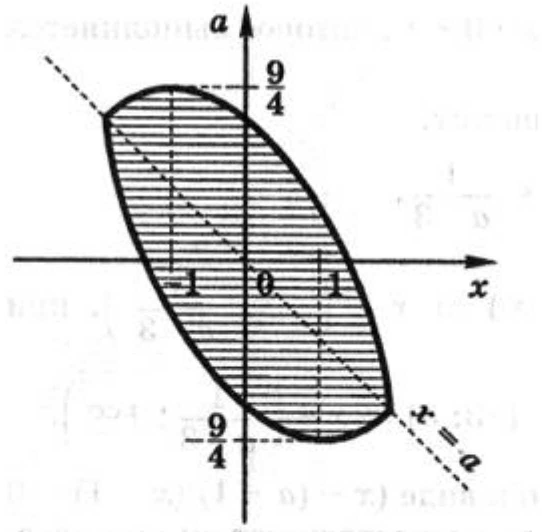
1. напишем общее уравнение первой прямой: $x - y + 3 = 0$ и вычислим расстояние по формуле $r_1 = \frac{|2-1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.
2. Расстояние от точки F(2; 1) до прямой $y = -3x - 3$ (3x+y+3=0), равно $r_2 = \frac{|3\cdot 2+1+3|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} > 2\sqrt{2}$. Эти же расстояния можно было найти и классическими способами.

Для получения ответа осталось только вычесть из r_1 радиус окружности ($\sqrt{2}$). Окончательно получаем min(AB)= $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 4. (Вариант 1)

При каких а неравенство $x^2+|x+a|<2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

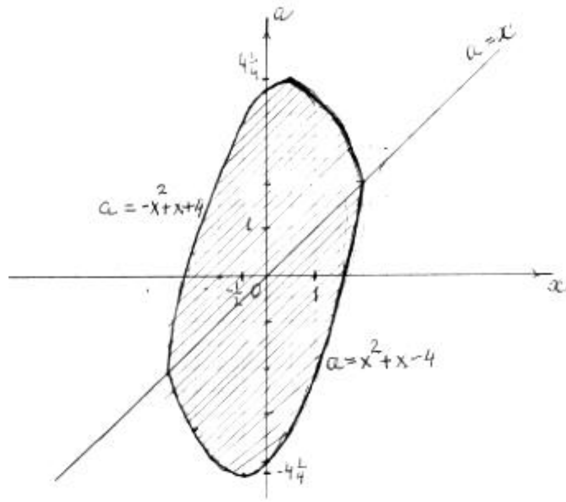


Решение: На плоскости хОа изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2+|x+a|<2$ (см. рис.). При $x+a\geq 0$ неравенство имеет вид $a<2-x-x^2$; при $x+a<0$ вид $a>x^2-x-2$ В заштрихованной области точки с положительной абсциссой существуют при $a\in\left[-\frac{9}{4};2\right)$.

Ответ : $a\in\left[-\frac{9}{4};2\right)$

Задача 4. (Вариант 2)

При каких a неравенство x^2 < $4-|x-a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?



Решение: На плоскости xOa изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2<4-|x-a|$ (см. рис.). При $x-a\geq 0$ неравенство имеет вид $a>x^2+x-4$; при $x-a<0$ вид $a<-x^2+x+4$. В заштрихованной области точки с положительной абсциссой существуют при $a\in\left[-\frac{17}{4};4\right)$.

Ответ : $a\in\left[-\frac{17}{4};4\right)$

Задача 5. (Вариант 1).

В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение В. Где надо устроить полустанок С, чтобы суммарно проезд от А до В по железной дороге АС и по шоссе СВ отнимал возможно меньше времени. Скорость движения по железной дороге 0,8, а по шоссе 0,2 км в минуту.

Решение: Обозначим расстояние AD (от A до основания перпендикуляра BD к AD) через a, CD через x. Тогда $AC = AD - CD = a - x$, а $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$. Время, в течение которого поезд проходит путь AC, равно $\frac{AC}{0,8} = \frac{a-x}{0,8}$.

Время прохождения пути CB по шоссе равно $\frac{CB}{0,2} = \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}$.

Общая продолжительность переезда из A в B равна $\frac{a-x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}$. Эта сумма, которую обозначим через m должна быть наименьшей.

$\frac{a-x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2} = m$ представляем в виде $-\frac{x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2} = m - \frac{a}{0,8}$.

Умножив на $0,8$, имеем: $-x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} = 0,8m - a$. Обозначив $0,8m - a$ через k и освободив уравнение от радикала, получаем квадратное уравнение $15x^2 - 2kx + 6400 - k^2 = 0$, откуда $x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96000}}{15}$.

Так как $k = 0,8m - a$, то при наименьшем значении m достигает наименьшей величины и k и обратно. (Следует иметь в виду, что $k > 0$, так как $0,8m = a - x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} > a - x + x = a$. Но чтобы x было действительным, $16k^2$ должно быть не меньше 96000. Значит наименьшая величина для $16k^2$ есть 96000. Поэтому m становится наименьшим, когда $16k^2 = 96000$. Откуда $k = \sqrt{6000}$, и следовательно, $x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6000}}{15} \approx 5,16$. Полустанок должен быть установлен приблизительно в 5 км от точки D, какова бы ни была длина $a = AD$ Предложенное решение справедливо только для случаев, когда $x < a$, так как составляя уравнение мы считали, что $a - x$ принимает положительные значения..

В случае когда $a = x$ ведем шоссе прямо на станцию, так же следует поступить, если расстояние $a < 5{,}16$ км.

Задача 5. (Вариант 2).

Как провести шоссе? (старинная задача) Из приречного города А надо направлять грузы в пункт В , расположенный на a километров ниже по реке и в d километрах от берега. Как провести шоссе от В к реке, чтобы провоз грузов из А в В обходился возможно дешевле, если провозная плата с тонно-километра по реке вдвое меньше, чем по шоссе?

Решение: Обозначим расстояние AD через x и длину DB шоссе через y: по предположению, длина AC равна a и длина BC равна d.

Так как провоз по шоссе вдвое дороже, чем по реке, то сумма $x + 2y$ должна быть согласно требованию задачи наименьшая. Обозначим эо наименьшее значение через m.

Имеем уравнение $x + 2y = m$. Но $x = a - DC$, а $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$; наше уравнение получает вид $a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m$ => $3y^2 - 4(m-a)y + (m-a)^2 + d^2 = 0$.

$$y = \frac{2}{3}(m-a) \pm \frac{\sqrt{(m-a)^2 - 3d^2}}{3}$$

Чтобы y было действительным, $(m-a)^2$ должно быть не меньше, чем $3d^2$.

Наименьшее значение $(m-a)^2$ равно $3d^2$, и тогда $m - a = d\sqrt{3}$,

$$y = \frac{2(m-a)+0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3};\quad \sin\angle BDC = \frac{d}{y} = d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Но угол, синус которого равен $\sqrt{3}/2$, равен 60°. Значит шоссе надо провести под углом 60° к реке, каково бы ни было расстояние АС.

Решение имеет смысл только при определенном условии. Если пункт расположен так, что шоссе, проведенное под углом 60° к реке, пройдет по другую сторону от города А, то решение непреложимо. В таком случае надо непосредственно связать пункт В с городом А шоссе, вовсе не пользуясь рекой для перевозки.

Задача 6. (Вариант 1).

Всего на три заданных вопроса было дано 55+38+49=142 ответа «да». Заметим, что т.к. каждый житель сказочного государства живёт ровно на одном острове, то если бы каждый житель был бы рыцарем (т.е. говорил только правду, то число ответов «да» было бы равно числу жителей государства (рыцарь говорит «да» только один раз в ситуации, когда речь идёт об острове, на котором он живёт). А вот если бы каждый житель государства был лжецом, то ответов «да» было бы ровно в два раза больше, чем жителей острова (т.к. каждый житель-лжец острова говорит «да» ровно два раза (когда речь идёт об островах, на которых он не живёт). Следовательно, число лжецов сказочного государства равно разности между числом ответов «да» и числом жителей государства, т.е. 142-100=42. После очищающего дождя лжецы острова А стали говорить правду, значит если раньше на вопрос «Вы живёте на острове В» они отвечали «да», то теперь на этот вопрос они ответят «нет». Значит, число лжецов острова А равно разности числа ответов «да» при первом и втором опросах (т.е. 38-27=11). Аналогично, число лжецов острова С равно 38-29=9. Следовательно, суммарное число лжецов на островах А и С равно 11+9=20. А т.к. всего в государстве 42 лжеца, то на острове В проживают 42-20=22 лжеца.

Ответ: 22 лжеца

Задача 6. (Вариант 2).

Решение: Всего на три заданных вопроса было дано 68+59+46=173 ответа «да». Заметим, что т.к. каждый житель города Кашино живёт ровно в одном районе, то если бы каждый житель был бы рыцарем (т.е. говорил только правду, то число ответов «да» было бы равно числу жителей города (рыцарь говорит «да» только один раз в ситуации, когда речь идёт о районе, в котором он живёт). А вот если бы каждый житель города был лжецом, то ответов «да» было бы ровно в два раза больше, чем жителей города (т.к. каждый житель-лжец города говорит «да» ровно два раза, когда речь идёт о районах, в которых он не живёт). Следовательно, число лжецов города Кашино равно разности между числом ответов «да» и числом жителей государства, т.е. 173-120=53. После того, как в районе Манкино побывал доктор Айболит, все жители района стали говорить правду, значит если раньше на вопрос «Вы живёте в районе Овсянкино?» они отвечали «да», то теперь на этот вопрос они ответят «нет». Значит, число лжецов района Манкино равно разности числа ответов «да» при первом и втором опросах (т.е. 59-34=25). Аналогично число лжецов в Гречкино равно 59-43=16. Следовательно, суммарное число лжецов в районах Манкино и Гречкино равно 25+16=41. А т.к. всего в городе 53 лжеца, то в районе Овсянкино проживают 53-41=12 лжецов. **Ответ:** 12 лжецов

Критерии проверки заданий

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ.
10	Получено верное значения для числа вагонов, но не вычислена либо вычислена неверно масса груза, либо верно получена оценка сверху или снизу, но во втором случае допущена арифметическая ошибка
5	Верно получена оценка числа вагонов либо сверху, либо снизу, либо верно составлены системы для обоих случаев, но они не решены или решены с ошибками.
0	Все остальные случаи

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованно правильное решение
10	Ошибка преобразования в конце решения.
5	Верно выписанная система при решении задачи через теорему синусов или косинусов.
0	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ.
10	Верно определены и построены (или чётко описаны) оба множества, заданные уравнениями.
5	Верно определено и построено (или чётко описано) одно из двух множеств, заданных уравнениями.
0	Все остальные случаи

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованно правильное решение
10	Верное графическое решение системы. Правильно

	изображена область в декартовой системе координат или верное аналитическое решение и потеря одной точки границ интервала при выписывании решения графическим или аналитическим методом
5	Верно раскрыт модуль при решении неравенства.
0	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованно правильное решение
15	Верно решено уравнение и получен правильный результат, но нет анализа ограничений , возникающих в результате исследования полученного результата.
10	Верно составлено выражение для нахождения общей продолжительности пути из А в В и сделан вывод, что это выражение должно быть наименьшим.
5	Верно составлено выражение для вычисления времени прохождения одного из отрезков пути АС или СВ.
0	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованно получен верный ответ.
15	Выполнены все этапы решения, получен ответ, отличающийся от правильного из-за арифметической ошибки.
10	Верно найдено число лжецов в сказочном государстве
5	Верно определено число лжецов на островах А и С или их сумма
0	Все остальные случаи