

**Первый (заочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2016 г.**

10 КЛАСС

1. Буратино, Карабас-Барабас и Дуремар бегают по тропинке вокруг круглого пруда. Они стартуют одновременно в одной точке, Буратино бежит в одну сторону, а Карабас-Барабас и Дуремар в другую. Буратино бежит в три раза быстрее Дуремара и в четыре раза быстрее Карабаса-Барабаса. После того, как Буратино встретил Дуремара, через 150 метров он встретил Карабаса-Барабаса. Какова длина тропинки вокруг пруда?

(15 баллов)

2. Известно, что a , b и c - натуральные числа, $НОК(a,b) = 945$, $НОК(b,c) = 525$.

Чему может равняться $НОК(a,c)$?

(15 баллов)

3. На плоскости отмечены 3 различные точки M , G и T так, что фигура, составленная из точек M , G и T , не имеет ни одной оси симметрии. Постройте на этой плоскости такую точку U , чтобы фигура, составленная из точек M , G , T и U , имела хотя бы одну ось симметрии. Сколько существует различных таких точек в данной плоскости?

(15 баллов)

4. При каких значениях a и b уравнения $2x^3 + ax - 12 = 0$ и $x^2 + bx + 2 = 0$ имеют два общих корня?

(15 баллов)

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2016\frac{1}{2} + x} + \sqrt{2016\frac{1}{2} + y} = 114 \\ \sqrt{2016\frac{1}{2} - x} + \sqrt{2016\frac{1}{2} - y} = 56 \end{cases}.$$

(20 баллов)

6. Около равнобедренного треугольника с углом 45° при вершине описана окружность. Вторая окружность касается первой внутренним образом и двух боковых сторон данного треугольника. Расстояние от центра второй окружности до данной вершины треугольника равно 4 см. Найдите расстояние от этого центра до центра окружности, вписанной в данный треугольник.

(20 баллов)

Решение задач заочного тура 10 класс.

Задача 1. Буратино, Карабас-Барабас и Дуремар бегают по тропинке вокруг круглого пруда. Они стартуют одновременно в одной точке, Буратино бежит в одну сторону, а Карабас-Барабас и Дуремар в другую. Буратино бежит в три раза быстрее Дуремара и в четыре раза быстрее Карабаса-Барабаса. После того, как Буратино встретил Дуремара, через 150 метров он встретил Карабаса-Барабаса. Какова длина тропинки вокруг пруда?

Решение:

Пусть длина тропинки S .

Так как Буратино бежит в три раза быстрее Дуремара, то к моменту их встречи Буратино пробежал три четверти круга ($3/4 S$), а Дуремар четверть. Так как Буратино бежит в четыре раза быстрее Карабаса-Барабаса, то к моменту их встречи Буратино пробежал четыре пятых круга, а Карабас-Барабас пятую часть ($1/5 S$).

Расстояние между точками встреч 150 метров. Получаем равенство:

$$\frac{3}{4}S + 150 + \frac{1}{5}S = S$$

$$S = 3000$$

Ответ: 3000 метров.

Задача 2. Известно, что a , b и c - натуральные числа, $НОК(a,b) = 945$, $НОК(b,c) = 525$. Чему может равняться $НОК(a,c)$?

Решение:

Разложим числа на простые множители, так как 3^3 встречается только в $НОК(a,b)$, следовательно $a : 3^3$, аналогично получаем, что $b : 5^2$

$$\begin{cases} НОК(a,b) = 945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ НОК(b,c) = 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a : 3^3 \\ b : 5^2 \end{cases} \Rightarrow НОК(a,c) : (3^3 \cdot 5^2).$$

Заметим, что

$$\begin{cases} НОК(a,b,c) : НОК(a,b) \\ НОК(a,b,c) : НОК(b,c) \\ НОК(a,b,c) : НОК(a,c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow НОК(a,b,c) : НОК(945,525) \Rightarrow НОК(a,b,c) : (3^3 \cdot 5^2 \cdot 7).$$

Учитывая три факта:
$$\begin{cases} \text{НОК}(a,b,c):(3^3 \cdot 5^2 \cdot 7) \\ \text{НОК}(a,b,c):\text{НОК}(a,c), \text{ получаем, что} \\ \text{НОК}(a,c):(3^3 \cdot 5^2) \end{cases}$$

$\text{НОК}(a,c) = 3^3 \cdot 5^2$, например, при $a = 3^3 \cdot 5$, $b = 7$, $c = 3 \cdot 5^2$ или

$\text{НОК}(a,c) = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, например, при $a = 3^3 \cdot 5$, $b = 7$, $c = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

Ответ: 675 или 4725

Задача 3. На плоскости отмечены 3 различные точки М, G и Т так, что фигура, составленная из точек М, G и Т, не имеет ни одной оси симметрии. Постройте на этой плоскости такую точку U, чтобы фигура, составленная из точек М, G, Т и U, имела хотя бы одну ось симметрии. Сколько существует различных таких точек в данной плоскости?

Решение:

Если точки М, G и Т являются вершинами прямоугольного треугольника, то таких точек 5, иначе 6. Действительно 3 таких точки – это точки симметричные данным относительно прямой, содержащей две другие, т.к. все 3 точки не лежат на одной прямой (по условию). Например, симметричная М относительно прямой GT и т.д. Еще 3 таких точки – это точки симметричные данным относительно прямой, являющейся серединным перпендикуляром к отрезку с вершинами в двух других. Например, симметричная М относительно серединного перпендикуляра к отрезку GT и т.д. Для прямоугольного треугольника две точки из трех совпадают.

Задача 4. При каких значениях a и b уравнения $2x^3 + ax - 12 = 0$ и $x^2 + bx + 2 = 0$ имеют два общих корня?

Решение:

Пусть x_0 - общий корень двух уравнений, то есть выполняются следующие равенства

$$\begin{cases} 2x_0^3 + ax_0 - 12 = 0 \\ x_0^2 + bx_0 + 2 = 0 \end{cases}.$$

Заметим, что $x_0 = 0$ не является решением квадратного уравнения, и домножим обе части этого равенства на $2x_0$.

$$\begin{cases} 2x_0^3 + ax_0 - 12 = 0 \\ 2x_0^3 + 2bx_0^2 + 4x_0 = 0 \end{cases}.$$

Вычтем из нижнего равенства верхнее, получим $2bx_0^2 - ax_0 + 4x_0 + 12 = 0$,

Заметим, что при $b = 0$ исходное квадратное уравнение не имеет решений, домножим это

уравнение на $2b$, получим второе равенство в системе:

$$\begin{cases} 2bx_0^2 - ax_0 + 4x_0 + 12 = 0 \\ 2bx_0^2 + 2b^2x_0 + 4b = 0 \end{cases}.$$

Вычтем из одного равенства другое.

$$(2b^2 + a - 4)x_0 + 4b - 12 = 0. \quad (*)$$

Для того, чтобы исходная система имела два общих корня, уравнение (*) должно иметь два различных корня, это верно при условии:

$$\begin{cases} 2b^2 + a - 4 = 0 \\ 4b - 12 = 0 \end{cases}, \text{ решаем систему, получаем } \begin{cases} a = -14 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Подставляем полученные значения параметров в исходную систему, выполняем проверку:

$$\begin{cases} 2x^3 - 14x - 12 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}, \text{ корни квадратного уравнения } -1 \text{ и } -2 \text{ являются также и корнями}$$

первого уравнения.

Ответ: $a = -14$, $b = 3$.

Задача 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2016\frac{1}{2} + x} + \sqrt{2016\frac{1}{2} + y} = 114 \\ \sqrt{2016\frac{1}{2} - x} + \sqrt{2016\frac{1}{2} - y} = 56 \end{cases}.$$

Решение:

Воспользуемся неравенством $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$ (среднее квадратическое двух чисел

больше их среднего арифметического). Заметим, что правая часть неравенства равна левой при равенстве значений a и b .

Приняв один из корней равенства за a , а другой за b , получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2016\frac{1}{2} + x + 2016\frac{1}{2} + y}{2}} \geq \frac{114}{2} \\ \sqrt{\frac{2016\frac{1}{2} - x + 2016\frac{1}{2} - y}{2}} \geq \frac{56}{2} \end{cases}, \begin{cases} \sqrt{\frac{4033 + x + y}{2}} \geq \frac{114}{2} \\ \sqrt{\frac{4033 - x - y}{2}} \geq \frac{56}{2} \end{cases}, \begin{cases} \frac{4033}{2} + \frac{x + y}{2} \geq 57^2 \\ \frac{4033}{2} - \frac{x + y}{2} \geq 28^2 \end{cases}$$

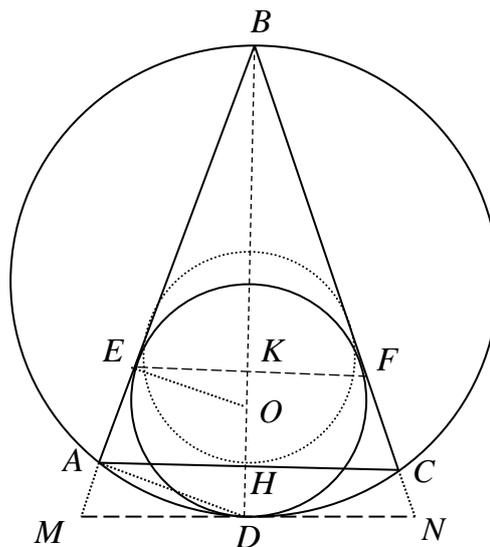
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \geq 1232,5 \\ \frac{x+y}{2} \leq 1232,5 \end{cases}, \text{ следовательно, } \frac{x+y}{2} = 1232,5.$$

В этом случае оба неравенства превращаются в равенства, значит $2016 \frac{1}{2} \pm x = 2016 \frac{1}{2} \pm y$, получаем, что $x = y = 1232,5$

Ответ: $(1232 \frac{1}{2}; 1232 \frac{1}{2})$

Задача 6. Около равнобедренного треугольника с углом 45° при вершине описана окружность. Вторая окружность касается первой внутренним образом и двух боковых сторон данного треугольника. Расстояние от центра второй окружности до данной вершины треугольника равно 4 см. Найдите расстояние от этого центра до центра окружности, вписанной в данный треугольник.

Решение:



1. Проведем BD – диаметр первой (описанной) окружности. Пусть E, F – точки касания второй окружности с боковыми сторонами данного треугольника, а D – с первой окружностью. Тогда BH – высота данного треугольника ABC , где H – точка пересечения BD и AC . По свойству вписанного угла: угол BAD – прямой (опирается на диаметр). Но угол VEO тоже прямой (т.к. BA – касательная ко второй окружности, а точка O – ее центр). Следовательно, треугольники ABD и EBO – подобные по двум углам (угол B – общий).

2. Так как BD – ось симметрии треугольника, то EF – перпендикулярна BD . По свойству прямоугольного треугольника OBE :

$$\cos \angle OBE = \frac{BE}{BO} = \frac{BK}{BE} \Rightarrow \cos^2 \angle OBE = \frac{BE}{BO} \cdot \frac{BK}{BE} = \frac{BK}{BO}.$$

3. Аналогично для треугольника DBA: $\cos^2 \angle OBE = \frac{BA}{BD} \cdot \frac{BH}{BA} = \frac{BH}{BD}$.

4. Проведем касательную MN к первой окружности в точке D и продолжим AB и BC до пересечения с ней. Тогда треугольник MBN подобен (гомотетичен относительно вершины B) треугольнику ABC. При данной гомотетии точка H переходит в точку D, а точка K в точку O).

5. Для треугольника MBN вторая окружность является вписанной в него, следовательно, центр третьей (вписанной в ABC) окружности совпадает с точкой K, а искомое в задаче расстояние – это

$$KO = BO - BK = BO(1 - \cos^2 \angle OBE) = BO \sin^2 \angle OBE = 4 \cdot \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Ответ: $2 - \sqrt{2}$.

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	Итого
Баллы	15	15	15	15	20	20	100

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
8	Верно приведен один из вариантов (треугольник прямоугольный или непрямоугольный).
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования, например, не приведены примеры чисел при правильно найденных НОК
8	Верно найден один из вариантов решения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его

	изложения и обоснования.
8	Задача верно сведена к исследованию линейного уравнения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
8	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
8	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.