

Решение заданий для 10 класса. Вариант 1. Вариант 2.

Задача 1. (Вариант 1)

Вычислить $x^3 + 3x$, где $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}}$.

Решение: Пусть $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = a$, тогда $x = a - \frac{1}{a}$,

$$\begin{aligned}x^3 + 3x &= \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^3 - \frac{1}{a^3} = 2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 - 1}{2 + \sqrt{5}} = \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = 4.\end{aligned}$$

Ответ: 4.

Задача 1. (Вариант 2)

Вычислить $x^3 - 3x$, где $x = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}}$.

Решение: Пусть $\sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} = a$, тогда $x = a + \frac{1}{a}$,

$$\begin{aligned}x^3 - 3x &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = a^3 + \frac{1}{a^3} = 7 + 4\sqrt{3} + \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{(7 + 4\sqrt{3})^2 + 1}{7 + 4\sqrt{3}} = \\ &= \frac{98 + 56\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = 14.\end{aligned}$$

Ответ: 14.

Задача 2. (Вариант 1)

На автобазе имеется в наличии 5 красных, 6 синих и 5 желтых автобусов. Случайным образом составляется колонна из 7 автобусов. Какова вероятность, что первым в колонне будет красный автобус, а среди остальных нет красных, но зато ровно 4 синих?

Решение: Всего автобусов $5+6+5=16$ штук. Необходимо, чтобы первый автобус был красный – вероятность равна $\frac{5}{16}$. Из остальных 15 выбираются 4 синих, 2 желтых и 0

красных, следовательно, такая вероятность равна $\frac{C_6^4 \cdot C_5^2 \cdot C_4^0}{C_{15}^6}$. Искомая вероятность

получается путем произведения двух полученных: $\frac{5C_6^4 \cdot C_5^2 \cdot C_4^0}{16C_{15}^6}$. Вычислим отдельно эти

$$\text{выражения: } C_4^0 = 1; C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10; C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15; C_{15}^6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 505.$$

$$\text{Подставим полученные результаты в ответ: } \frac{5 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 1}{16 \cdot 505} = \frac{750}{8080} = \frac{75}{808}.$$

Ответ: $\frac{75}{808}$.

Задача 2. (Вариант 2)

В коробке 3 красные, 4 золотые и 5 серебряных звездочек. Случайным образом из коробки вынимают по одной звезде и вешают их на ёлку. Какова вероятность, что на макушке ёлки окажется красная звезда, больше на ёлке красных звезд не будет, а золотых окажется ровно 3, если всего из коробки достали 6 звездочек?

Решение: Всего игрушек $3+4+5=12$ штук. Необходимо, чтобы на верхушке была красная – вероятность равна $\frac{3}{12}$. Из остальных 11 выбираются 3 золотые, 2 серебряные и 0 красных, следовательно, такая вероятность равна $\frac{C_4^3 \cdot C_5^2 \cdot C_2^0}{C_{11}^5}$.

Искомая вероятность получается путем произведения двух полученных:
$$\frac{3 \cdot C_4^3 \cdot C_5^2 \cdot C_2^0}{12 \cdot C_{11}^5}.$$

Вычислим отдельно эти выражения: $C_2^0 = 1$, $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$,
 $C_4^3 = 4$, $C_{11}^5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$.

Подставим полученные результаты в ответ: $\frac{3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 1}{12 \cdot 462} = \frac{5}{231}$.

Ответ: $\frac{5}{231}$.

Задача 3. (Вариант 1)

Найти сумму квадратов корней уравнения $(x^2 + 4x)^2 - 2016(x^2 + 4x) + 2017 = 0$.

Решение: Сделаем замену: $x^2 + 4x + 4 = t$, тогда $x^2 + 4x = t - 4$ и уравнение примет вид:

$$(t - 4)^2 - 2016(t - 4) + 2017 = 0$$

$$t^2 - 2024t + 10097 = 0$$

Дискриминант уравнения больше нуля, следовательно, уравнение имеет два корня. По теореме Виета: $t_1 + t_2 = 2024$, $t_1 \cdot t_2 = 10097$, значит, оба корня квадратного уравнения положительны. Сделаем обратную замену:

$$(x+2)^2 = t_1$$

$$x+2 = \pm\sqrt{t_1}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{t_1}$$

$$(x+2)^2 = t_2$$

$$x+2 = \pm\sqrt{t_2}$$

$$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{t_2}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= (-2 + \sqrt{t_1})^2 + (-2 - \sqrt{t_1})^2 + (-2 + \sqrt{t_2})^2 + (-2 - \sqrt{t_2})^2 = \\ &= 2(4 + t_1) + 2(4 + t_2) = 16 + 2(t_1 + t_2) = 16 + 2 \cdot 2024 = 4064. \end{aligned}$$

Ответ: 4064.

Задача 3. (Вариант 2)

Найти сумму квадратов корней уравнения $(x^2 + 6x)^2 - 1580(x^2 + 6x) + 1581 = 0$.

Решение: Сделаем замену: $x^2 + 6x + 9 = t$, тогда $x^2 + 6x = t - 9$ и уравнение примет вид:

$$(t-9)^2 - 1580(t-9) + 1581 = 0$$

$$t^2 - 1598t + 15882 = 0$$

Дискриминант уравнения больше нуля, следовательно, уравнение имеет два корня. По теореме Виета $t_1 + t_2 = 1598$, $t_1 \cdot t_2 = 15882$, значит оба корня квадратного уравнения положительны. Сделаем обратную замену:

$$(x+3)^2 = t_1$$

$$x+3 = \pm\sqrt{t_1}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{t_1}$$

$$(x+3)^2 = t_2$$

$$x+3 = \pm\sqrt{t_2}$$

$$x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{t_2}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= (-3 + \sqrt{t_1})^2 + (-3 - \sqrt{t_1})^2 + (-3 + \sqrt{t_2})^2 + (-3 - \sqrt{t_2})^2 = \\ &= 2(9 + t_1) + 2(9 + t_2) = 36 + 2(t_1 + t_2) = 36 + 2 \cdot 1598 = 3232. \end{aligned}$$

Ответ: 3232.

Задача 4. (Вариант 1)

На окружности с равными интервалами расположены 5 точек A , B , C , D и E .

Даны два вектора $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$. Выразите вектор \overrightarrow{EC} через \vec{a} и \vec{b} .

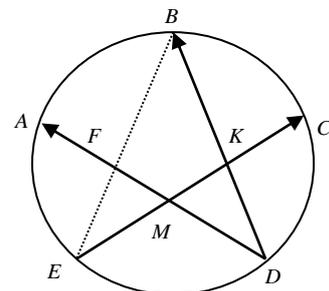
Решение:

Соединим B и E .

Рассмотрим замкнутую ломаную $BKDMEFB$.

По Теореме Менелая: $\frac{BK}{KD} \cdot \frac{DM}{MF} \cdot \frac{FE}{EB} = 1$.

Пусть $KD = x$, $KM = y$,



Решим полученное однородное уравнение и получим $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Выразим вектор $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DA}$ через \vec{a} и

$$\vec{b}: \overrightarrow{AK} = \frac{x+y}{2x+y} \vec{b} - \vec{a} = \frac{3+\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}} \vec{b} - \vec{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{b} - \vec{a}.$$

Так как, $\overrightarrow{AC} = \frac{2x+y}{x+y} \overrightarrow{AK}$, то получаем

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2(2+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} \overrightarrow{AK} = \frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{4} \vec{b} - \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \vec{a} = \vec{b} - \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \vec{a}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \vec{a}.$

Задача 5. (Вариант 1). Найти все значения параметров a , b и c , при которых множество действительных корней уравнения $x^5 + 4x^4 + ax^2 = bx + 4c$ состоит ровно из двух чисел 2 и -2 .

Решение: Так как числа 2 и -2 корни уравнения, то

$$\begin{cases} 32 + 64 + 4a = 2b + 4c \\ -32 + 64 + 4a = -2b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c - 16 \\ b = 16 \end{cases}, \text{ подставим в исходное уравнение:}$$

$$x^5 + 4x^4 + (c-16)x^2 - 16x - 4c = 0$$

$$x(x^4 - 16) + 4x^2(x^2 - 4) + c(x^2 - 4) = 0$$

$$(x-2)(x+2)(x^3 + 4x^2 + 4x + c) = 0$$

Уравнение $x^3 + 4x^2 + 4x + c = 0$ (1) имеет как минимум один корень. Узнаем при каких значениях параметра c корнями уравнения являются числа 2 и -2 .

$$x = 2 \text{ при } c = -32, \quad x = -2 \text{ при } c = 0.$$

Проверим, не имеет ли уравнение (1) при данных значениях c другие корни:

$$c = -32$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 6x + 16) = 0$$

$$x = 2$$

$$c = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = -2; 0$$

Следовательно, $c = 0$ постороннее значение.

В ответ идут: $c = -32$, $b = 16$, $a = -48$.

Ответ: $a = -48$, $b = 16$, $c = -32$.

Задача 5. (Вариант 2). Найти все значения параметров a , b и c , при которых множество действительных корней уравнения $x^5 + 4x^4 + ax = bx^2 + 4c$ состоит ровно из двух чисел 2 и -2 .

Решение: Так как числа 2 и -2 корни уравнения, то

$$\begin{cases} 32 + 64 + 2a = 4b + 4c \\ -32 + 64 - 2a = 4b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 16 - c \\ a = -16 \end{cases}, \text{ подставим в исходное уравнение:}$$

$$x^5 + 4x^4 + (c - 16)x^2 - 16x - 4c = 0$$

$$x(x^4 - 16) + 4x^2(x^2 - 4) + c(x^2 - 4) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^3 + 4x^2 + 4x + c) = 0$$

Уравнение $x^3 + 4x^2 + 4x + c = 0$ (1) имеет как минимум один корень. Узнаем при каких значениях параметра c корнями уравнения являются числа 2 и -2 .

$$x = 2 \text{ при } c = -32, \quad x = -2 \text{ при } c = 0.$$

Проверим, не имеет ли уравнение (1) при данных значениях c другие корни:

$$c = -32$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 6x + 16) = 0$$

$$x = 2$$

$$c = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = -2; 0$$

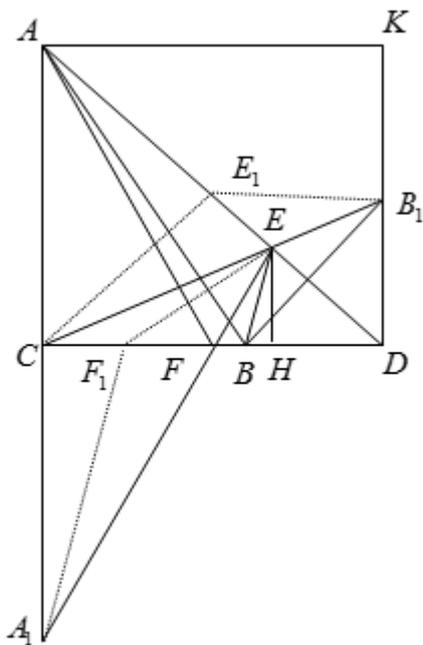
Следовательно, $c = 0$ постороннее значение.

В ответ идут: $c = -32$, $a = -16$, $b = 48$.

Ответ: $a = -16$, $b = 48$, $c = -32$.

Задача 6. (Вариант 1).

В прямоугольном треугольнике ABC : $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 4$. На прямой BC отмечается такая точка D ($CD > BD$), что $\angle ADC = 45^\circ$. На прямой AD отмечается такая точка E , что периметр треугольника CBE – наименьший из возможных. Затем, на прямой DC отмечается такая точка F , что периметр треугольника AFE – наименьший из возможных. Найти CF .



Построение и доказательство:

Для удобства, построим квадрат $ACDK$ (AD – диагональ его, т.к. $\angle ADC = 45^\circ$). Отметим точку B_1 на стороне DK ($B_1D = BD \Rightarrow B_1B \perp AD$).

Проведем прямую B_1C , которая пересечет AD в точке E .

Периметр треугольника CBE – наименьший, так как из всех возможных точек E_1 на прямой AD – сумма длин отрезков $B_1E + EC$ наименьшая ($B_1E + EC < B_1E_1 + E_1C$ – неравенство треугольника) и $B_1E = EB$. Аналогично, отметим точку A_1 на стороне AC ($A_1C = AC$). Проведем прямую A_1E , которая пересечет CD в точке F .

Периметр треугольника AFE – наименьший, так как из всех возможных точек F_1 на прямой AD – сумма длин отрезков $A_1F + EF$ наименьшая ($A_1F + EF < A_1F_1 + F_1E$ – неравенство треугольника) и $A_1F = FA$.

Решение:

$CD = AC = 6 \Rightarrow BD = B_1D = 6 - 4 = 2$. Так как треугольники ACE и B_1ED подобные ($\angle AEC = \angle B_1ED$ – вертикальные и $\angle EAC = \angle B_1DE = 45^\circ$), то $EC : B_1E = AC : DB_1 = AE : ED = 6 : 2 = 3 : 1$

Пусть $EH \perp DC \Rightarrow$ прямоугольные треугольники ACD и EHD подобны ($\angle ACD$ – общий), тогда $CD : HD = AC : EH = AD : ED = 4 : 1 \Rightarrow EH = HD = 1,5 \Rightarrow CH = 4,5$.

Прямоугольные треугольники FHE и FCA_1 подобны ($\angle EFH = \angle A_1FC$ вертикальные),

тогда $CF : HF = A_1F : EF = A_1C : EH = 6 : 1,5 = 4 : 1; CH = 4,5 \Rightarrow CF = 0,8 \cdot 4,5 = 3,6$

Ответ: 3,6.

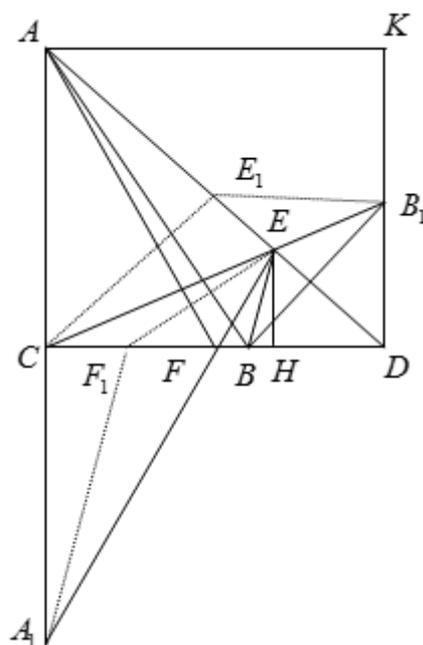
Задача 6. (Вариант 2).

$CAKD$ – квадрат со стороной 6. На стороне CD выбирается точка B ($BD = 2$), а на прямой AD – такая точка E , что периметр треугольника BEC – наименьший из возможных. Затем, на прямой DC отмечается такая точка F , что периметр треугольника FEA – наименьший из возможных. Найти EF .

Построение и доказательство:

Отметим точку B_1 на стороне DK ($B_1D=BD \Rightarrow B_1B \perp AD$). Проведем прямую B_1C , которая пересечет AD в точке E . Периметр треугольника CBE – наименьший, так как из всех возможных точек E_1 на прямой AD – сумма длин отрезков B_1E+EC наименьшая ($B_1E+EC < B_1E_1+E_1C$ – неравенство треугольника) и $B_1E=EB$.

Аналогично, отметим точку A_1 на стороне AC ($A_1C=AC$). Проведем прямую A_1E , которая пересечет CD в точке F . Периметр треугольника AFE – наименьший, так как из всех возможных точек F_1 на прямой AD – сумма длин отрезков A_1F+EF наименьшая ($A_1F+EF < A_1F_1+F_1E$ – неравенство треугольника) и $A_1F=FA$.



Решение:

$CD = AC = 6$, $BD = B_1D = 2$. Так как треугольники ACE и B_1ED подобные ($\angle AEC = \angle B_1ED$ – вертикальные, $\angle EAC = \angle B_1DE = 45^\circ$),

то $EC : B_1E = AC : DB_1 = AE : ED = 6 : 2 = 3 : 1$.

Пусть $EH \perp DC \Rightarrow$ прямоугольные треугольники ACD и EHD подобны ($\angle ACD$ – общий), тогда $CH : HD = AC : EH = AD : ED = 4 : 1 \Rightarrow EH = HD = 1,5 \Rightarrow CH = 4,5$.

Прямоугольные треугольники FHE и FCA_1 подобны ($\angle EFH = \angle A_1FC$ – вертикальные), тогда:

$$CF : HF = A_1F : EF = A_1C : EH = 6 : 1,5 = 4 : 1; CH = 4,5 \Rightarrow HF = 0,2 \cdot 4,5 = 0,9 \Rightarrow FE^2 = HF^2 + EH^2.$$

$$FE = \sqrt{0,81 + 2,25} = \sqrt{3,06} = 0,3\sqrt{34}.$$

Ответ: $0,3\sqrt{34}$.

Критерии проверки заданий

Задание	1	2	3	4	5	6	Итого
Баллы	15	15	15	15	20	20	100

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка в конце решения или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, доказано, что уравнение имеет четыре корня, дальнейшее решение отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
16	Верно найдены возможные значения параметра, проверка не выполнена.
8	Верно начато решение, задача сведена к уравнению с одним параметром, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
16	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
12	При верном ответе нет доказательства минимальности периметра.
4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.