«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

________________А.А. Александров

«_____»_______________2015 г.

Типовой вариант академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

по общеобразовательному предмету «Математика»

1. Один автомобиль проходит в минуту на 240 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 12,5 секунды меньше. На сколько метров первый автомобиль увеличивает расстояние от второго за время, пока второй проходит 1 км? (8 баллов)

2. Решите уравнение $2^x - 6\cdot 2^{1-x} = 1$.

(8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии $\left(a_n\right)$, если $a_{17}=52,\ a_{30}=13$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi y}{8} = \sqrt{1+2\cos^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4} - \cos\dfrac{\pi x}{4}}, \\ |\,x\,| + |\,y-4\,| \le 4, \quad y < x+2. \end{cases}$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}} \le 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = 3\big/\left(x^2-4x+5\right)$. (10 баллов)

7. Площадь равнобокой трапеции равна 450. Окружность, построенная на боковой стороне трапеции как на диаметре, касается прямой, содержащей другую боковую сторону, и делит большее основание трапеции в отношении $24:25$. Найдите стороны трапеции.

(12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1+x-x^2$ и $y = 0,5\left(x^2+3\right)$

(12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2\left(x+|x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$. (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2015 г.

Вариант № 1

1. Один рабочий за два часа делает на 5 деталей больше, чем другой, соответственно на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2 ч меньше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей? (8 баллов)

2. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 32, 28, 24, …, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132? (8 баллов)

3. Решите уравнение $9^{1+\sqrt{x}}+3^{1-2\sqrt{x}}=28$. (8 баллов)

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x+\cos^2 4x=0, \\ \sin x=\cos y. \end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{(x+2)|x+1|+|x|}\geq x+2$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3}+2x+2)\right).$$ (10 баллов)

7. В треугольнике ABC углы A и B равны $45°$ и $30°$ соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите площадь треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$.

(12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y=x^2\sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M(4;-2\sqrt{3})$. (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x+|x|=2\sqrt{3+2ax-4a}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

(12 баллов)

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ CA_1, равная d, наклонена к плоскости основания под углом 60° и образует угол 45° с плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и середину бокового ребра BB_1. Найдите площадь основания параллелепипеда. (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2015 г.

Вариант № 5

1. Двумя насосами, работающими совместно, цистерна заполняется топливом за два часа. Если 80% объёма цистерны заполнить одним насосом, а затем оставшуюся часть– другим, то вся работа займёт 3 *ч* 36 *мин.* За сколько часов можно заполнить цистерну каждым из насосов в отдельности? (8 баллов)

2. В арифметической прогрессии 12 членов, их сумма равна 354. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами, как 32:27. Определите первый член и разность прогрессии. (8 баллов)

3. Решите уравнение $9^{1+2\sqrt{x}} - 28 \cdot 9^{\sqrt{x}} + 3 = 0$. (8 баллов)

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x \sin^2 2x + \sin^2 2x = 0, \\ \cos x = \cos y. \end{cases}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $x + 6 - \sqrt{(x+6)|x+5| + |x+4|} \geq 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x) = 2\sin\left((\pi/4)\sin(\sqrt{x-2} + x + 2) - (5\pi/2)\right)$. (10 баллов)

7. В треугольнике ABC углы A и B равны $45°$ и $30°$ соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$. (12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2\sqrt{3}/6$, проходящими через точку $M\left(1; -\sqrt{3}/2\right)$. (12 баллов)

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $x^2 + x|x| = 2(3 + ax - 2a))$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

(12 баллов)

10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через диагональ AC_1, параллельна диагонали основания BD, наклонена к плоскости основания под углом 30° и образует с диагональю A_1C угол 45°, если диагональ параллелепипеда равна *d*. (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2015 г.

Вариант № 9

1. Один автомобиль преодолевает расстояние 120 км на 18 мин быстрее, чем другой. Если бы первый автомобиль уменьшил свою скорость на 12 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость на 10%, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорости автомобилей. (8 баллов)

2. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 25, 22, 19, ..., начиная с первого, не меньше 66. (8 баллов)

3. Решите уравнение $2^{1-2|x|}+2\cdot 4^{1+|x|}=17$. (8 баллов)

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x\cos^2 8x+\cos^2 8x=0, \\ \sin x=\cos y. \end{cases}$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{x+3-3\sqrt{x+1}}{x^2-4x}>0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(x^2+2x+2+\cos x)\right)$. (10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B+\angle C=\angle AKB$, $AK=5$, $BK=6$, $KC=2$. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC. (12 баллов)

8. Составьте уравнения касательных, проведенных из точки $M(0;-2)$ к параболе $8y=(x-3)^2$. Определите угол между касательными. Найдите площадь треугольника ABM, где A и B – точки касания. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2=8(2y-x+a-2)$, $\dfrac{1-\sqrt{y}}{1-\sqrt{x/2}}=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC наклонено к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через ребро TC и параллельная диагонали основания BD, образует с плоскостью основания угол 45°, а расстояние между этой плоскостью и диагональю BD равно a. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания AC? (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2015 г.

Вариант №10

1. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 ч быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость на 50%, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорости туристов. (8 баллов)

2. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 22, 19, 16, ..., начиная с первого, не меньше 52. (8 баллов)

3. Решите уравнение $3^{1-2|x|}+3\cdot 9^{1+|x|}=82$. (8 баллов)

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4\cos^2 x-4\cos x\cos^2 6x+\cos^2 6x=0, \\ \sin x=\cos y. \end{cases}$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{x+21-7\sqrt{x+9}}{x^2-8x}>0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=4\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\sin(x^2+6x+10-\sin x)\right)$. (10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B+\angle C=\angle AKB$, $AK=4$, $BK=9$, $KC=3$. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC. (12 баллов)

8. Составьте уравнения касательных, проведенных из точки $M(3;0)$ к параболе $8y=x^2+16$. Определите угол между касательными. Найдите площадь треугольника ABM, где A и B – точки касания. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2=4(y-x+a-1)$, $\dfrac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}-1}=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC наклонено к плоскости основания под углом 45°. Плоскость, проходящая через ребро TC и параллельная диагонали основания BD, образует с плоскостью основания угол 60°, а расстояние между этой плоскостью и диагональю BD равно a. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания AC? (12 баллов)