Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», весна 2016 г.

Вариант № 11

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $4/3$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}<\dfrac{16}{15}$. (8 баллов)

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $7371\cdot 2^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

4. Решите неравенство $(\log_x^2(3x-2)-4)(\sin\pi x-1)\le 0$. (8 баллов)

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4\cos^2 x\cdot\sin^2\dfrac{x}{6}+4\sin\dfrac{x}{6}-4\sin^2 x\cdot\sin\dfrac{x}{6}+1=0, \\ \sin\dfrac{x}{4}=\sqrt{\cos y}. \end{cases}$

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\log_{0,5}^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{\sin x+7}\right)}$. (10 баллов)

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 12 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 5. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб. (12 баллов)

8. На оси Oy найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0,5\left(x - \left(\sqrt{3}/2\right)\right)^2$, угол между которыми равен $60°$. (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение

$$4x^2 - 8|x| + (2a + |x| + x)^2 = 4$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Второй (заключительный этап) академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», весна 2016 г.

Вариант № 15

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $5/4$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}<\dfrac{5}{6}$. (8 баллов)

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819\cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

4. Решите неравенство $(\log_x^2(7x-6)-4)(\cos\pi x-1)\le 0.$ (8 баллов)

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4\cos^2 2x\cdot\sin^2\dfrac{x}{3}+4\sin\dfrac{x}{3}-4\sin^2 2x\cdot\sin\dfrac{x}{3}+1=0, \\ \sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{\cos y}=0. \end{cases}$

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$$f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{6\log_{0,25}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)}.$$ (10 баллов)

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 8 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 3. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб. (12 баллов)

8. На оси Oy найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=0,5\left(x-(1/2)\right)^2$, угол между которыми равен $45°$. (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение

$$4x^2 - 16|x| + \left(2a + |x| - x\right)^2 = 16$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота относится к стороне основания, как $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану боковой грани? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)