Решения типового варианта

1. Пусть V м/сек – скорость первого автомобиля, тогда $V-4$ – скорость второго. Тогда $\frac{1000}{V-4}=\frac{1000}{V}+12{,}5;\ \frac{80}{V-4}=\frac{80}{V}+1;\ V^2-4V-320=0,\ V=2\pm 18; V_1=20,\ V_2=20-4=16$.

$\Delta l=\frac{1000\cdot 20}{16}-1000=250$. **Ответ**: 250 м

2. $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$, $(2^x)^2-2^x-12=0$; $2^x=(1\pm 7)/2$, $2^x=4,\ x=2$. **Ответ:** $x=2$

3. Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии, $\begin{cases} a+16d=52, \\ a+29d=13 \end{cases} \Leftrightarrow d=-3,\ a=100$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $100-3(n-1)>0$ найдем $n=[103/3]=34$. Тогда $\max S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(100+100-3\cdot 33)\cdot 34=1717$. **Ответ:** 1717

4. Найдем все целочисленные решения системы $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\le 4, \quad y<x+2. \end{cases}$

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\ge 0$, т.е. при $-4+16k\le y\le 4+16k,\ k\in Z,$ имеем

$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1$ или $\cos\frac{\pi x}{4}=1 \quad \Leftrightarrow y=2+16k,\ y=-2+16k,\ k\in Z,$ или $x=8n,\ n\in Z$. Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\,2+16k), (l;\,-2+16k), (8n;\,m), l,k,n,m\in Z, \quad -4+16s\le m\le 4+16s, s\in Z,$ лежащие в квадрате с центром в точке $(0;4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y<x+2$. Такими точками будут $(0;0), (0;1), (1;2), (2;2)$.

Ответ: $(0;0), (0;1), (1;2), (2;2)$

5. Решим неравенство $\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}}\le 0.$

ОДЗ числителя и знаменателя: $x(x+1)\ge 0, \quad 4-2x\ge 0,\ x^2+5x+6\ge 0, \Rightarrow$ $x\in(-\infty;-3]\cup[-2;-1]\cup[0;2]$.

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$\frac{x^2+x-(4-2x)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}\le 0 \quad \Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}\le 0$.

Если $x \ge -2$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})^2} \le 0$, и $x \in [-2;\,1]$.

С учетом ОДЗ $x \in [-2;\,-1] \cup [0;1]$.

Если $x \le -3$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{-(\sqrt{-x-3}+\sqrt{-x-2})^2} \le 0$, и

$x \in (-\infty;\,-4]$, что входит в ОДЗ. Окончательно имеем $x \in (-\infty;\,-4] \cup [-2;\,-1] \cup [0;\,1]$.

Ответ: $x \in (-\infty;\,-4] \cup [-2;\,-1] \cup [0;\,1]$

6. Найдем множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5}$.

Функция $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5} = \dfrac{3}{(x-2)^2+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;\,3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max} = g(2) = 3$, на промежутке $(-\infty;\,2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;\,+\infty)$ – убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;\,9]$, поскольку $t = g(x) \in (0;\,3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;\,9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9);\,g(2)] = [3/50;\,3]$.

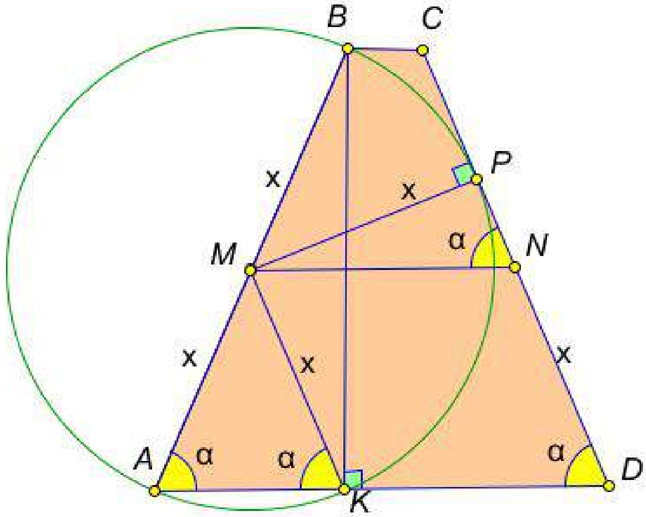
Ответ: $E_f = \left[\dfrac{3}{50};\,3\right]$

7. ABCD - равнобокая трапеция, $AB = CD$, $\angle A$ - острый, AB - диаметр окружности, M - центр окружности, P - точка касания окружности боковой стороны CD. Обозначим радиус окружности x. Тогда $AM = MB = MP = x$. Пусть N - середина стороны CD, тогда треугольник MPN прямоугольный, $\angle P = 90°$, $\angle MNP = \angle A = \alpha$, $MN = \dfrac{x}{\sin\alpha}$. Пусть K - точка пересечения окружности с основанием AD $(K \ne A)$. Треугольник ABK - прямоугольный, $\angle K = 90°$, BK - высота трапеции, $BK = AB\sin\alpha = 2x\sin\alpha$.

$S_{ABCD} = MN \cdot BK = 2x^2 = 450 \quad \Rightarrow \quad x = 15$,

$AB = CD = 2x = 30$.

$AK = AB\cos\alpha = 2x\cos\alpha$, $KMND$ - параллелограмм, $KD = MN = \dfrac{x}{\sin\alpha}$.



$\dfrac{AK}{KD} = \dfrac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad 2\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = \dfrac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = \pm\dfrac{7}{25} \quad \Rightarrow$

1) $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{4}{5}$ или

2) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Для первого случая имеем: $AK = 2x\cos\alpha = 24$, $KD = \dfrac{x}{\sin\alpha} = 25$, $AD = AK + KD = 49$, $BC = 2MN - AD = 1$.

Для второго случая имеем: $AK = 2x\cos\alpha = 18$, $KD = \dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{75}{4}$, $AD = AK + KD = \dfrac{147}{4}$, $BC = 2MN - AD = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: 1, 49, 30, 30 или $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{147}{4}$, 30, 30

8. Составим уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1 + x - x^2$ и $y = 0,5\left(x^2+3\right)$.

Пусть $y = ax + b$ — уравнение общей касательной. Тогда.

$1 + x - x^2 = ax + b,\ x^2 + (a-1)x + b - 1 = 0$.

$D = (a-1)^2 - 4b + 4 = 0,\ a^2 - 2a - 4b + 5 = 0$. (*)

$0,5\left(x^2+3\right) = ax + b,\ x^2 - 2ax - 2b + 3 = 0$.

$D/4 = a^2 - (-2b+3) = 0,\ a^2 + 2b - 3 = 0$. (**)

Из (*) и (**) получаем $3a^2 - 2a - 1 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1/3$. $b = \dfrac{3-a^2}{2},\ b_1 = 1, b_2 = \dfrac{13}{9}$.

Ответ: $y = x + 1,\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{9}$

9. Определим все значения *a*, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2\left(x + |x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Рассмотрим два случая.

I. $x \ge 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 4x,\ x^2 - 2(a+2)x + a^2 - 1 = 0$; $D/4 = a^2 + 4a + 4 - a^2 + 1 = 4a + 5$.

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$, если

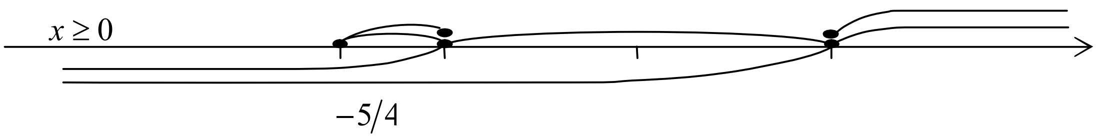
$$\begin{cases} 4a+5>0, \\ a+2>0, \\ a^2-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5/4, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -1, \\ a \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5/4 < a \le -1, \\ a \ge 1. \end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x_{1,2} = a + 2 + \sqrt{4a+5}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 4a+5 = 0, \\ a+2 \ge 0, \end{cases} \\ a^2 - 1 < 0, \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a+2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -5/4, \\ a > -2, \end{cases} \\ -1 < a < 1, \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a+2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -5/4, \\ -1 < a < 1. \end{array}\right.$$

II. $x < 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 0$.

Корень $x_1 = a + 1 < 0$, если $a < -1$, и корень $x_2 = a - 1 < 0$, если $a < 1$, то есть, уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2} = a \pm 1$, если $-\infty < a < -1$, и уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x = a - 1$, если $-1 \le a < 1$.

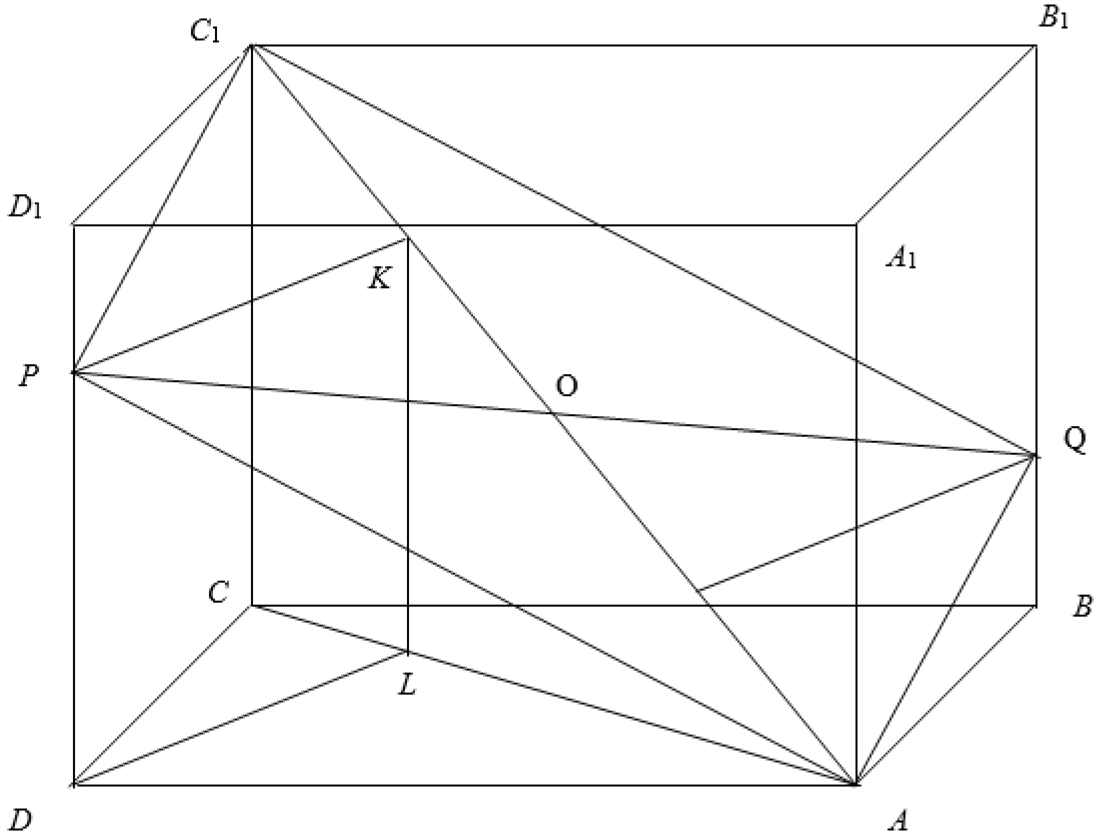


Ответ: $a \in (-\infty; -5/4), \quad x_{1,2} = a \pm 1$;

$a \in (-1; 1), \quad x_1 = a - 1, \quad x_2 = a + 2 + \sqrt{4a+5}$;

$a \in [1; +\infty), \quad x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$.

10.



Проведем $DL \perp AC,\ LK \| CC_1\ (K \in AC_1),\ PK \| DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ = PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1 = 3,\ PQ = \sqrt{3},\ \varphi = 30°,\ \sin\varphi = 1/2,\ \cos\varphi = \sqrt{3}/2.$

$DL = PK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$ $OK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \frac{3/2 - 3/4}{3/2 + 3/4} = \frac{1}{3}.$ Пусть $CL = x$, тогда $AL = 3x$, $AC = 4x$.

$DL^2 = CL \cdot AL$, т.е. $\frac{3}{16} = 3x^2$, $x = \frac{1}{4}$, $AC = 1$. $CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$

Объем $V = AC \cdot DL \cdot CC_1 = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$ **Ответ:** $\sqrt{6}/2$.

Решение варианта №1

1. Один рабочий за два часа делает на 5 деталей больше, чем другой, соответственно на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2 ч меньше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей?

Решение:

За x часов второй рабочий делает 100 деталей, за $x-2$ – первый.

$\frac{100}{x-2}-\frac{100}{x}=\frac{5}{2}$; $\frac{40}{x-2}-\frac{40}{x}=1$; $x^2-2x-80=0$, $x=1+9=10$. Ответ: 8 и 10 ч.

2. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 32, 28, 24, …, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132?

Решение:

$\frac{32+32-4(n-1)}{2}\cdot n=132$, $n^2-17n+66=0$, $n=\frac{17\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l}6,\\11.\end{array}\right.$ Ответ: 6 или 11.

3. Решите уравнение $9^{1+\sqrt{x}}+3^{1-2\sqrt{x}}=28$.

Решение:

$9^{1+\sqrt{x}}+3^{1-2\sqrt{x}}=28 \Leftrightarrow 9^{1+2\sqrt{x}}-28\cdot9^{\sqrt{x}}+3=0 \Leftrightarrow 9\cdot\left(9^{\sqrt{x}}\right)^2-28\cdot9^{\sqrt{x}}+3=0$; $9^{\sqrt{x}}=\frac{14\pm13}{9}$.

1) $9^{\sqrt{x}}=\frac{1}{9}$, нет решений; 2) $9^{\sqrt{x}}=3$, $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{4}$. **Ответ:** $x=\frac{1}{4}$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x+\cos^2 4x=0,\\ \sin x=\cos y.\end{cases}$.

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x+\cos^2 4x=0 \quad \Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos x+\cos^2 4x)^2+\cos^2 4x\sin^2 4x=0$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x+\cos^2 4x=0,\\ \cos^2 4x\sin^2 4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0,\\ \cos 4x=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{2}\cos x+1=0,\\ \sin 4x=0.\end{cases}$ Первая система решений не имеет. Вторая система имеет решения $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \sin x = \cos y. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = \sqrt{2}/2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = -\sqrt{2}/2. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right),\quad \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right),\quad k, n \in Z.$

5. Решите неравенство $\sqrt{(x+2)|x+1| + |x|} \ge x + 2.$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 < 0, \\ (x+2)(-x-1) - x \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 \ge 0, \\ (x+2)|x+1| + |x| \ge (x+2)^2. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ x^2 + 4x + 2 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-2, -1], \\ -x^2 - 3x - 2 - x \ge x^2 + 4x + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-1, 0], \\ x^2 + 3x + 2 - x \ge x^2 + 4x + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0, +\infty), \\ x^2 + 3x + 2 + x \ge x^2 + 4x + 4. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ x \in [-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}]; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-2, -1], \\ x^2 + 4x + 3 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-1, 0], \\ 2x + 2 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0, +\infty), \\ 2 \ge 4. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-2 - \sqrt{2}; -2); \\ x \in [-2, -1]; \\ \text{нет решений}; \\ \text{нет решений}. \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-2 - \sqrt{2}; -1].$$

Ответ: $x \in [-2 - \sqrt{2}; -1].$

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right).$

Решение:

$f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right)$ Так как $\sqrt{x-3} + 2x + 2 \in [8; \infty)$, то

$\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2) \in [-1; 1]$, $\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2) \in [-\pi/4; \pi/4]$. Следовательно,

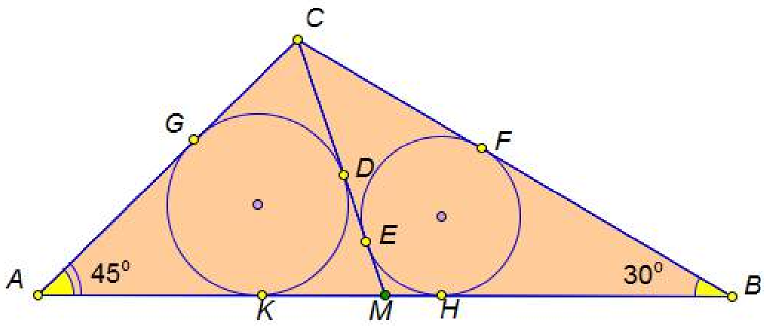
$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right) \in [\sqrt{2}/2; 1] \quad \Rightarrow \quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right) \in [\sqrt{2}; 2]$.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2]$.

7. В треугольнике ABC углы A и B равны $45°$ и $30°$ соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите площадь треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$.

Решение:

По свойству касательных к окружности имеем:



$AG = AK = x,\ CG = CD = y,$

$CE = CF = z,\ \ BF = BH = u,$

$DM = \dfrac{AB}{2} - AK = \dfrac{AB}{2} - x,$

$ME = \dfrac{AB}{2} - BH = \dfrac{AB}{2} - u,$

Тогда $DE = z - y,\ DE = DM - ME = u - x.$ Следовательно,

$2DE = z - y + u - x = CB - AC.$ Пусть $CB = a,\ \ AC = b.$ Тогда $a - b = 8(\sqrt{2}-1)$. По теореме синусов имеем $\dfrac{a}{\sin 45°} = \dfrac{b}{\sin 30°}$, или $\sqrt{2}a = 2b,$ т.е. $a = \sqrt{2}b.$ Таким образом,

$b = 8,\ a = 8\sqrt{2}.$

Площадь треугольника ABC находим по формуле $S = \dfrac{ab\sin 105°}{2}$.

$$S = \frac{ab\sin(45°+30°)}{2} = \frac{ab(\sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°)}{2} = \frac{ab\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{8} = 16(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $16(\sqrt{3}+1).$

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2\sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M\left(4;-2\sqrt{3}\right)$.

Решение:

$$y = \frac{x^2}{8\sqrt{3}},\ M\left(4;-2\sqrt{3}\right).\ \ y = \frac{x_0^2}{8\sqrt{3}} + \frac{x_0}{4\sqrt{3}}\left(x - x_0\right);\ -2\sqrt{3} = \frac{x_0^2}{8\sqrt{3}} + \frac{x_0}{4\sqrt{3}}\left(4 - x_0\right);$$

$x_0^2 - 8x_0 - 48 = 0$; $x_0 = 4 \pm 8$; $\left(x_0\right)_1 = 12,\ \left(x_0\right)_2 = -4$. Уравнения касательных:

1) $y = 6\sqrt{3} + \sqrt{3}\left(x - 12\right);\ \ y = \sqrt{3}x - 6\sqrt{3},\ \ \mathrm{tg}\alpha_1 = \sqrt{3},\ \ \alpha_1 = 60°$;

2) $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x + 4\right);\ \ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \ \mathrm{tg}\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ \alpha_2 = -30°$.

Угол между касательными: $\varphi = 60° - (-30°) = 90°$, **Ответ:** $90°$.

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $x + |x| = 2\sqrt{3 + 2ax - 4a}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

Решение:

I. При $x \geq 0$ $x^2 - 2ax + 4a - 3 = 0$ (*).

1. Уравнение (*) имеет два различных неотрицательных корня, если:

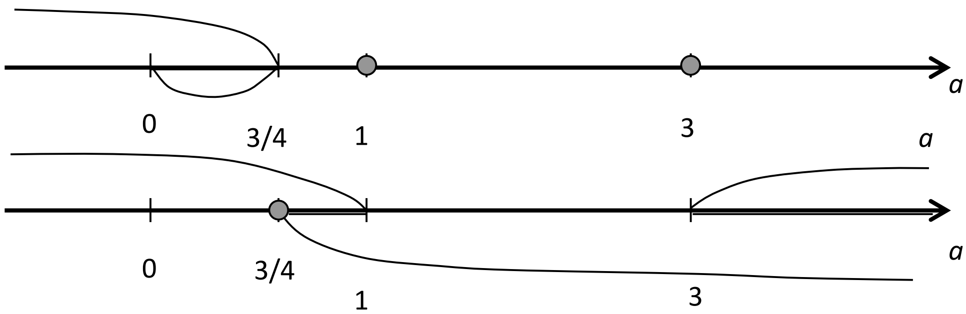
$$\begin{cases} D/4 = a^2 - 4a + 3 > 0, \\ a > 0, \\ 4a - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 3, \end{array}\right. \\ a > 0, \\ a \geq 3/4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3/4 \leq a < 1, \\ a > 3. \end{array}\right.$$

2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \\ 4a - 3 < 0, \\ \begin{cases} a = 3/4, \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 3, \\ a < 3/4. \end{array}\right.$$

II. При $x < 0$ $x = \dfrac{4a - 3}{2a} < 0 \Rightarrow 0 < a < 3/4$.

Сравнивая с I, 2, замечаем, что при $0 < a < 3/4$ также будет два различных решения системы.

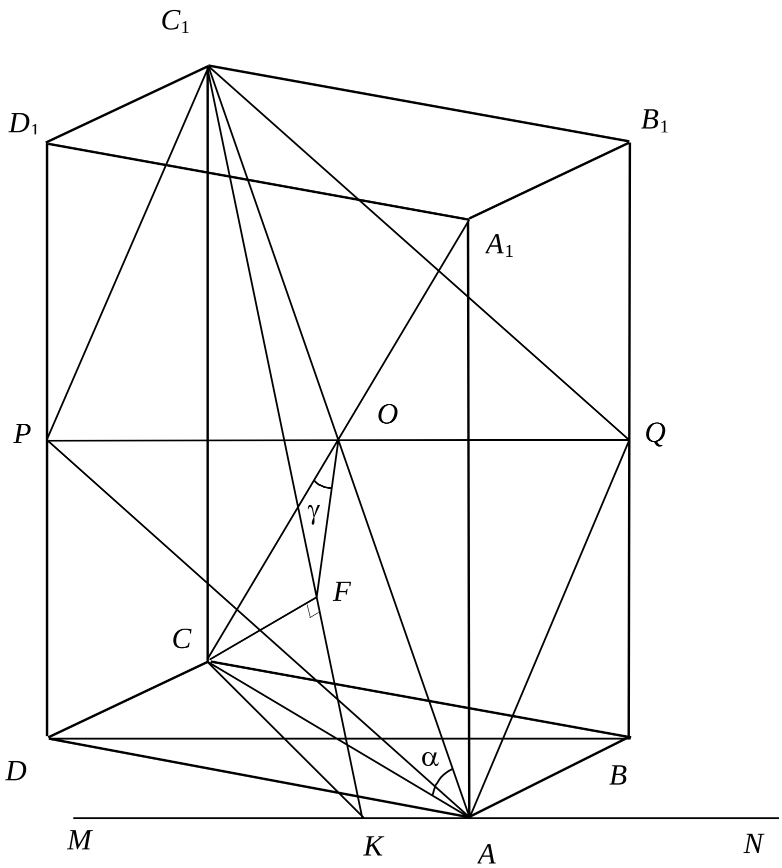


Ответ: при $a \in [3/4;1) \cup (3;+\infty)$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 3}$;

при $0 < a < 3/4$ $x_1 = \dfrac{4a - 3}{2a}$, $x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4a + 3}$.

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ CA_1, равная d, наклонена к плоскости основания под углом 60° и образует угол 45° с плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и середину бокового ребра BB_1. Найдите площадь основания параллелепипеда.

Решение:



Если P и Q – середины боковых ребер DD_1 и BB_1, то $PQ \| BD$ и $(AQC_1) \| (BD)$.

Проведем $(MN) \| BD$, $A \in (MN)$; $CK \perp (MN)$, $CF \perp KC_1$. Так как $CF \perp (AKC_1)$, то $\angle COF = \gamma$ – заданный в условиях угол между диагональю CA_1 и плоскостью (AQC_1). Заданный угол между диагональю CA_1 и плоскостью основания равен $\angle CAC_1 = \alpha$.

В прямоугольном треугольнике COF $CF = CO \cdot \sin \angle COF$, т.е. $CF = \frac{d}{2} \cdot \sin \gamma$.

В треугольнике CKC_1 $\frac{CK}{CC_1} = \frac{CF}{FC_1}$, отсюда $CK = \frac{CC_1 \cdot CF}{\sqrt{CC_1^2 - CF^2}}$.

Так как $CC_1 = d \cdot \sin \alpha$, то $CK = \frac{d \cdot \sin \alpha \cdot d \cdot \sin \gamma}{2\sqrt{d^2 \sin^2 \alpha - \frac{d^2 \sin^2 \gamma}{4}}} = \frac{d \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma}}$.

Площадь основания параллелепипеда равна $S = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CK$. Так как

$BD = AC = d \cdot \cos\alpha$, то $S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \cos\alpha \cdot \frac{d \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sqrt{4\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{2\sqrt{4\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}} \cdot d^2$.

α=60°, γ=45°. $S = \dfrac{\sqrt{3} \cdot d^2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{3}d^2}{8\sqrt{5}}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}d^2}{8\sqrt{5}}$.

Решение варианта №1

1 Двумя насосами, работающими совместно, цистерна заполняется топливом за два часа. Если 80% объёма цистерны заполнить одним насосом, а затем оставшуюся часть – другим, то вся работа займёт 3 *ч* 36 *мин.* За сколько часов можно заполнить цистерну каждым из насосов в отдельности?

Решение:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \\ \frac{4}{5}x+\frac{1}{5}y=\frac{18}{5}. \end{cases} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{18-x}=\frac{1}{2},\ x^2-6x+9=0,\ x=3,\ y=6.$$

Ответ: 3 ч, 6 ч.

2. В арифметической прогрессии 12 членов, их сумма равна 354. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами, как 32:27. Определите первый член и разность прогрессии.

Решение:

$$S_{even}=\frac{32}{59}\cdot 354=192;\ S_{odd}=\frac{27}{59}\cdot 354=162\ .$$

$$\frac{a+d+a+11d}{2}\cdot 6=192;\ \frac{a+a+10d}{2}\cdot 6=162\ .\ \begin{cases} a+6d=32, \\ a+5d=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, \\ d=5. \end{cases}$$

Ответ: $a=2,\ d=5$.

3. Решите уравнение $9^{1+2\sqrt{x}}-28\cdot 9^{\sqrt{x}}+3=0$.

Решение:

1) $9^{\sqrt{x}}=\frac{1}{9}$, нет решений; 2) $9^{\sqrt{x}}=3,\ \sqrt{x}=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}$.

Ответ: $x=\frac{1}{4}$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x\sin^2 2x+\sin^2 2x=0, \\ \cos x=\cos y. \end{cases}$.

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$$2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x\sin^2 2x+\sin^2 2x=0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x+\sin^2 2x)^2+\sin^2 2x\cos^2 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x+\sin^2 2x=0, \\ \sin^2 2x\cos^2 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=0, \\ \sin 2x=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{2}\sin x+1=0, \\ \cos 2x=0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x=\pi k,\ k\in Z$. Вторая система имеет решения $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\pi k,\ k\in Z,\\ \cos y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+2\pi k,\ k\in Z,\\ \cos y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z,\\ \cos y=\sqrt{2}/2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z,\\ \cos y=-\sqrt{2}/2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\pi k,\ k\in Z,\\ y=2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+2\pi k,\ k\in Z,\\ y=\pi+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z,\\ y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z,\\ y=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Ответ:

$$(2\pi k,\ 2\pi n),\quad (\pi+2\pi k,\ \pi+2\pi n),\quad \left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\quad \left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\quad k,n\in Z.$$

5. Решите неравенство $x+6-\sqrt{(x+6)|x+5|+|x+4|}\ge 0.$

Решение:

$$\sqrt{(x+6)|x+5|+|x+4|}\le x+6 \Leftrightarrow \begin{cases}x+6\ge 0;\\ (x+6)|x+5|+|x+4|\le (x+6)^2;\\ (x+6)|x+5|+|x+4|\ge 0.\end{cases}$$

При условии $x+6\ge 0$ неравенство $(x+6)|x+5|+|x+4|\ge 0$ выполняется, и система равносильна следующей $\begin{cases}x\ge -6;\\ (x+6)|x+5|+|x+4|\le x^2+12x+36.\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-6,-5],\\ -x^2-11x-30-x-4\le x^2+12x+36;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-5,-4],\\ x^2+11x+30-x-4\le x^2+12x+36;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-4,+\infty),\\ x^2+11x+30+x+4\le x^2+12x+36.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-6,-5],\\ x^2+12x+35\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-5,-4],\\ x\ge -5;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-4,+\infty),\\ 34\le 36.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5;\\ x\in(-5,-4];\\ x\in(-4,+\infty).\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x\in[-5,+\infty).$

Ответ: $x\in[-5,+\infty).$

6. Найдите множество значений функции $f(x)=2\sin\left((\pi/4)\sin(\sqrt{x-2}+x+2)-(5\pi/2)\right).$

Решение:

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2}+x+2)-\dfrac{5\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2}+x+2)\right)$ Так как

$\sqrt{x-2}+x+2\in[4;\infty)$, то $\sin(\sqrt{x-2}+x+2)\in[-1;1]$, $\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2}+x+2)\in[-\pi/4;\pi/4].$

Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2}+x+2)\right)\in[\sqrt{2}/2;1] \quad\Rightarrow\quad -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2}+x+2)\right)\in[-2;-\sqrt{2}].$$

Ответ: $[-2;-\sqrt{2}]$.

7. В треугольнике ABC углы A и B равны $45°$ и $30°$ соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$.

Решение:

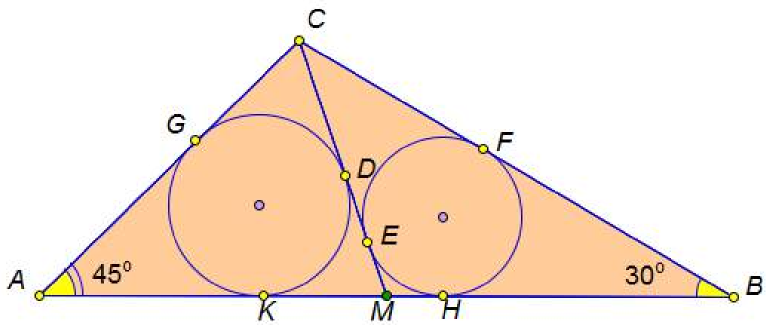
По свойству касательных к окружности имеем:

$$AG=AK=x,\ CG=CD=y,\ CE=CF=z,\ BF=BH=u,\ DM=\frac{AB}{2}-AK=\frac{AB}{2}-x,$$

$$ME=\frac{AB}{2}-BH=\frac{AB}{2}-u,$$

Тогда $DE=z-y,\ DE=DM-ME=u-x.$ Следовательно,

$2DE=z-y+u-x=CB-AC.$ Пусть $CB=a,\ AC=b.$ Тогда $a-b=8(\sqrt{2}-1)$. По теореме синусов имеем



$$\frac{a}{\sin 45°}=\frac{b}{\sin 30°},\text{ или } \sqrt{2}a=2b,$$

т.е. $a=\sqrt{2}b.$ Таким образом,

$b=8,\ a=8\sqrt{2}.$

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, находим по формуле

$$R=\frac{b}{2\sin 30°}=b=8.$$

Ответ: 8.

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y=x^2\sqrt{3}/6$, проходящими через точку $M\left(1;-\sqrt{3}/2\right)$.

Решение:

$y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{3}}, M\left(1; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $y = \dfrac{x_0^2}{2\sqrt{3}} + \dfrac{x_0}{\sqrt{3}}(x - x_0)$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x_0^2}{2\sqrt{3}} + \dfrac{x_0}{\sqrt{3}}(1 - x_0)$; $x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$

; $x_0 = 1 \pm 2$; $(x_0)_1 = 3$, $(x_0)_2 = -1$. Уравнения касательных:

1) $y = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}(x-3)$; $y = \sqrt{3}x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\alpha_1 = \sqrt{3}$, $\alpha_1 = 60°$;

2) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$; $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $\text{tg}\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha_2 = -30°$.

Угол между касательными: $\varphi = 60° - (-30°) = 90°$. **Ответ:** $90°$.

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $x^2 + x|x| = 2(3 + ax - 2a))$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

Решение:

I. При $x \geq 0$ $x^2 - 2ax + 4a - 3 = 0$ (*). 1. Уравнение (*) имеет два различных неотрицательных корня, если: $\begin{cases} D/4 = a^2 - 4a + 3 > 0, \\ a > 0, \\ 4a - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 3, \end{array}\right. \\ a > 0, \\ a \geq 3/4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3/4 \leq a < 1, \\ a > 3. \end{array}\right.$

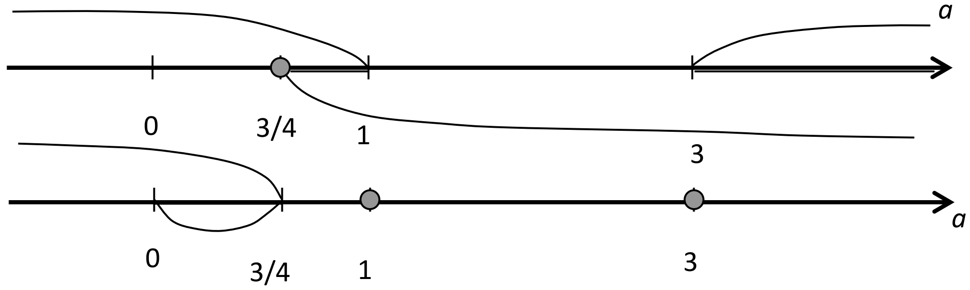
2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень, если: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \\ 4a - 3 < 0, \\ \begin{cases} a = 3/4, \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 3, \\ a < 3/4. \end{array}\right.$

II. При $x < 0$ $x = \dfrac{4a-3}{2a} < 0 \Rightarrow 0 < a < 3/4$.

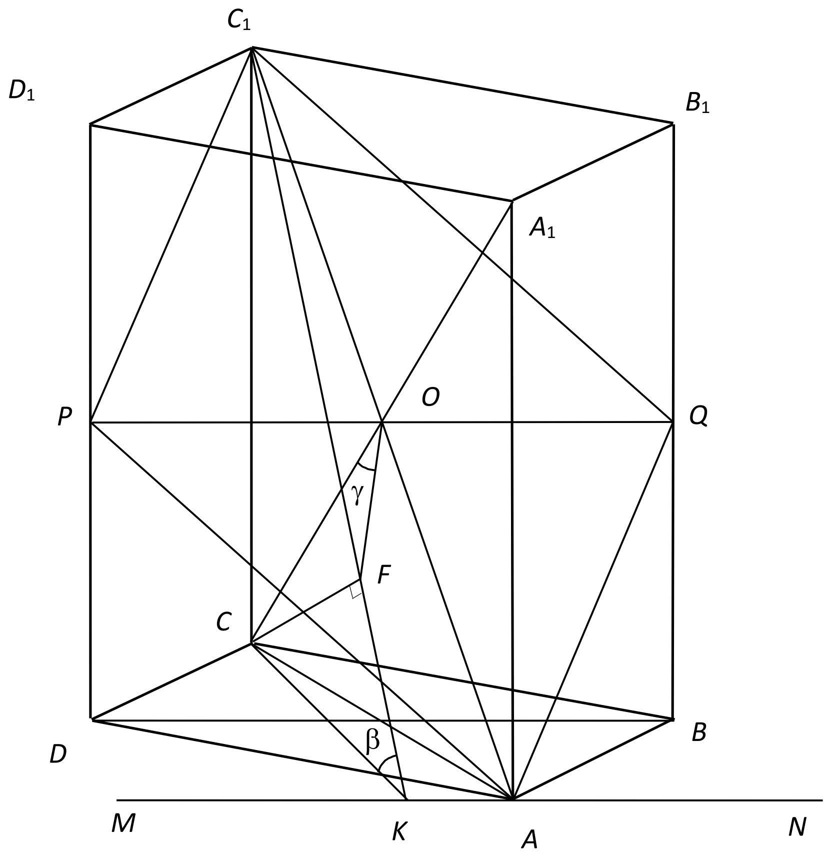
Сравнивая с I, 2, замечаем, что при $0 < a < 3/4$ также будет два различных корня.

Ответ: при $a \in [3/4;1) \cup (3;+\infty)$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 3}$;

при $0 < a < 3/4$ $x_1 = \dfrac{4a-3}{2a}$, $x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4a + 3}$. $x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4a + 3}$.



10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через диагональ AC_1, параллельна диагонали основания BD, наклонена к плоскости основания под углом 30° и образует с диагональю A_1C угол 45°, если диагональ параллелепипеда равна d.



Введем обозначение $AC_1 = d = 2R$ (так как на середине диагонали параллелепипеда расположен центр сферы, описанной около параллелепипеда).

Если P и Q–середины боковых ребер DD_1 и BB_1, то $PQ \| BD$ и $PQ = BD = AC$.

Проведем $(MN) \| BD,\ A \in (MN);\ CK \perp (MN),\ CF \perp KC_1$. Тогда $\angle CKC_1 = \beta$ – заданный в условиях угол между секущей плоскостью и плоскостью основания. Так как $CF \perp (AKC_1)$, то $\angle COF = \gamma$–заданный в условиях угол между диагональю CA_1 и плоскостью сечения $PAQC_1$. Так как $OC = R$, то $CF = R\sin\gamma$, $CK = \dfrac{CF}{\sin\beta} = \dfrac{R\sin\gamma}{\sin\beta}$, $CC_1 = \dfrac{CF}{\cos\beta} = \dfrac{R\sin\gamma}{\cos\beta}$,

$KC_1 = \dfrac{CK}{\cos\beta} = \dfrac{R\sin\gamma}{\sin\beta\cos\beta}$.

Поскольку $PQ = BD = AC = \sqrt{AC_1^2 - CC_1^2} = \dfrac{R}{\cos\beta}\sqrt{4\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$, а $KC_1 \perp AK$ то площадь сечения $PAQC_1$ равна $S_{PAQC_1} = \dfrac{1}{2} KC_1 \cdot PQ = \dfrac{R^2 \sin\gamma}{2\sin\beta\,\cos^2\beta}\sqrt{4\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$, или

$$S_{PAQC_1} = \frac{d^2 \sin\gamma}{8\sin\beta\,\cos^2\beta}\sqrt{4\cos^2\beta - \sin^2\gamma}.$$

β=30°, γ=45°. $S = \dfrac{2\cdot 4}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot 3}\cdot\sqrt{4\cdot\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}}\cdot R^2 = \dfrac{2\sqrt{5}d^2}{12}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{5}d^2}{12}$.

Решения варианта № 9

1. Один автомобиль преодолевает расстояние 120 км на 18 минут быстрее, чем другой. Если бы первый автомобиль уменьшил свою скорость на 12 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость на 10%, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорости автомобилей.

Решение: Пусть x – скорость первого автомобиля, y – скорость второго автомобиля

$$\frac{120}{x}+\frac{18}{60}=\frac{120}{y}+5,\quad x-12=1{,}1y,\quad \frac{40}{x}+\frac{1}{10}=\frac{44}{x-12},\quad x^2-52x-4800=0,\quad x=100,\quad y=80$$

Ответ: 100 *км/ч*, 80 *км/ч*.

2. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 25, 22, 19, ..., начиная с первого, не меньше 66.

Решение: Для данной арифметической прогрессии имеем: $a_1=25$, $d=-3$. Должно выполняться неравенство $S_n\ge 66$, т.е. $\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n\ge 66$. Подставим в последнее неравенство a_1 и d. В итоге, получим

$$\frac{50-3(n-1)}{2}\cdot n\ge 66 \;\Leftrightarrow\; 53n-3n^2\ge 132 \;\Leftrightarrow\; 3n^2-53n+132\le 0 \;\Leftrightarrow\; (n-3)(n-\frac{44}{3})\le 0.$$

Поскольку n - натуральное число, то $n\in\left[3,14\frac{2}{3}\right]\cap N,$ т.е. $n=3,4,5,\ldots,14.$

Ответ: 3, 4, 5, ..., 14.

3. Решите уравнение $2^{1-2|x|}+2\cdot 4^{1+|x|}=17$.

Решение:

$$2^{2|x|}=t\ge 1,\quad 8t^2-17t+2=0,\quad t=2,\quad 2^{2|x|}=2,\quad 2|x|=1,\quad x=\pm\frac{1}{2}\qquad \textit{Ответ}: x=\pm\frac{1}{2}.$$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x\cos^2 8x+\cos^2 8x=0,\\ \sin x=\cos y.\end{cases}$.

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$$2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x\cos^2 8x+\cos^2 8x=0 \;\Leftrightarrow\; (\sqrt{2}\cos x-\cos^2 8x)^2+\cos^2 8x\sin^2 8x=0 \;\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x-\cos^2 8x=0,\\ \cos^2 8x\sin^2 8x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0,\\ \cos 8x=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{2}\cos x-1=0,\\ \sin 8x=0.\end{cases}$ Первая система решений не имеет. Вторая система имеет решения $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\;\; k\in Z.$

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \sin x = \cos y. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = \sqrt{2}/2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = -\sqrt{2}/2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \pm\dfrac{3\pi}{4} + \pi n\right)$, $k, n \in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{x+3-3\sqrt{x+1}}{x^2-4x} > 0$ (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $x \in [-1; +\infty)$, $x \neq 0$, $x \neq 4$.

Разложим числитель на множители:

$$x+3-3\sqrt{x+1} = x+1-3\sqrt{x+1}+2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 3\sqrt{x+1} + 2 = \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)$$

Имеем:

$$\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{x(x-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1-1)(x+1-4)}{x(x-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{x(x-4)} > 0.$$

Решая методом интервалов, получаем $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty)$.

С учетом ОДЗ имеем $x \in [-1; 0) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty)$

Ответ: $x \in [-1; 0) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(x^2+2x+2+\cos x)\right)$.

Решение:

$f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(x^2+2x+2+\cos x)\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin((x+1)^2+1+\cos x)\right)$. Так как $g(x) = (x+1)^2+1+\cos x \subset [0; \infty)$, причем область значений этой функции содержит числовой луч, то

$\varphi(x) = \sin((x+1)^2+1+\cos x) \in [-1; 1]$, $E_\varphi = [-1; 1]$, $\psi(x) = \dfrac{\pi}{4}\sin((x+1)^2+1+\cos x) \in [-\pi/4; \pi/4]$,

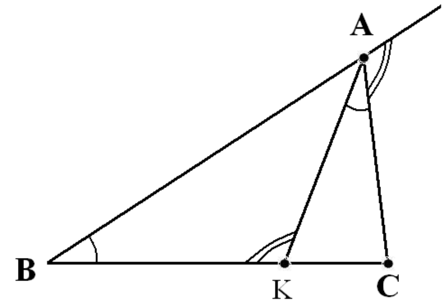
$E_\psi = [-\pi/4; \pi/4]$. Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin((x+1)^2+1+\cos x)\right) \in [\sqrt{2}/2; 1] \Rightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin((x+1)^2+1+\cos x)\right) \in [\sqrt{2}; 2],$$

$E_f = [\sqrt{2}; 2]$.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2]$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B + \angle C = \angle AKB,\quad AK = 5,\ BK = 6,\ KC = 2.$ Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC.



Решение:

$\angle B + \angle C = \angle AKB,\quad \angle AKC = \angle A,\quad \angle KAC = \angle B,$

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \quad \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{5} = \frac{AC}{2} = \frac{8}{AC} \quad \Rightarrow$$

$AC = 4,\quad AB = 10.$

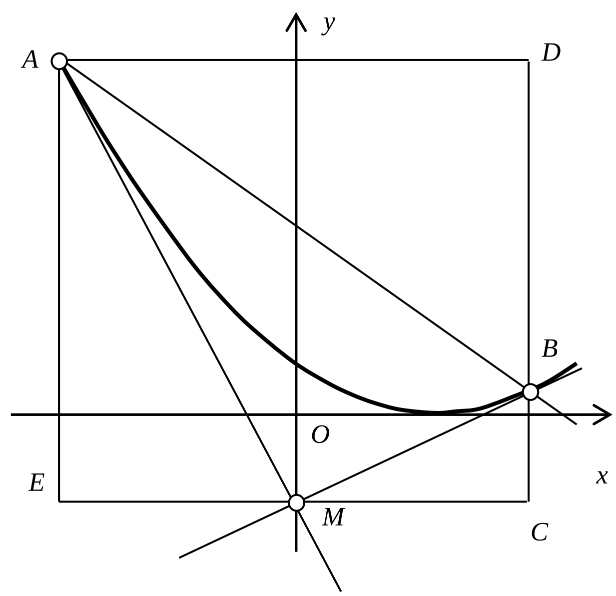
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)},\quad p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(10+8+4) = 11,$$

$$S_{ABC} = \sqrt{11(11-10)(11-8)(11-4)} = \sqrt{11\cdot 3\cdot 7} = \sqrt{11\cdot 21};\quad r_{вп} = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{11}};\quad S_{впкр} = \frac{21}{11}\pi.$$

Ответ: $\frac{21}{11}\pi.$

8. Составьте уравнения касательных, проведенных из точки $M(0;-2)$ к параболе $8y = (x-3)^2$. Определите угол между касательными. Найдите площадь треугольника ABM, где A и B – точки касания.

Решение:



$8y = (x-3)^2$; $M(0;-2)$.

$$y = \frac{(x_0-3)^2}{8} + \frac{(x_0-3)}{4}(x - x_0),$$

$$y = \frac{9}{2} + \frac{(x_0-3)}{4}x - \frac{x_0^2}{8}.$$

$$-2 = \frac{9}{8} + \frac{(x_0-3)}{4}\cdot 0 - \frac{x_0^2}{8},\ x_0^2 - 25 = 0,$$

$(x_0)_1 = -5,\ (y_0)_1 = 8,\ A(-5;8).$

$(x_0)_2 = 5,\ (y_0)_2 = 0,5,\ B(5;0,5).$

1) $y = -2x - 2$; 2) $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Угол между касательными равен $90°$.

$$|AM| = \sqrt{(0+5)^2 + (-2-8)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2};$$

$$|BM| = \sqrt{(0-5)^2 + \left(-2-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.\quad S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{5}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{125}{4}.$$

Проверка по площадям: $S_{\Delta AMB} = 10\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 7,5 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2,5 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10 = \frac{125}{4}$.

Ответ: $y = -2x - 2$, $y = \frac{1}{2}x - 2$; $90°$; $\frac{125}{4}$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$(x-a)^2=8(2y-x+a-2),\ \dfrac{1-\sqrt{y}}{1-\sqrt{x/2}}=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение:

Второе уравнение равносильно системе: $x\ge 0,\ \ x\ne 2,\ \ y=x/2$. Подставляя $y=x/2$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2=8(a-2)$, или $x^2-2ax+a^2-8a+16=0$ (*), у которого $D/4=a^2-a^2+8a-16=8a-16$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Очевидно, при $a<2$ уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=a\pm\sqrt{8a-16}$, если

$$\begin{cases} 8a-16>0, \\ a>0, \\ a^2-8a+16\ge 0, \\ 4-4a+a^2-8a+16\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ a^2-12a+20\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ a\ne 2, \\ a\ne 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<a<10, \\ 10<a<+\infty. \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение в оставшихся отдельных точках.

При $a=2$ уравнение принимает вид $(x-2)^2=0$, его корень $x=2$ не удовлетворяет ограничениям, наложенным на неизвестное x во втором уравнении системы.

При $a=10$ получаем $(x-10)^2=8\cdot 8$, откуда $x_{1,2}=10\pm 8$; корень $x=2$ – посторонний, второй корень $x=18$ входит в область допустимых значений системы. При $a=10$ система уравнений имеет одно решение $x=18,\ \ y=9$.

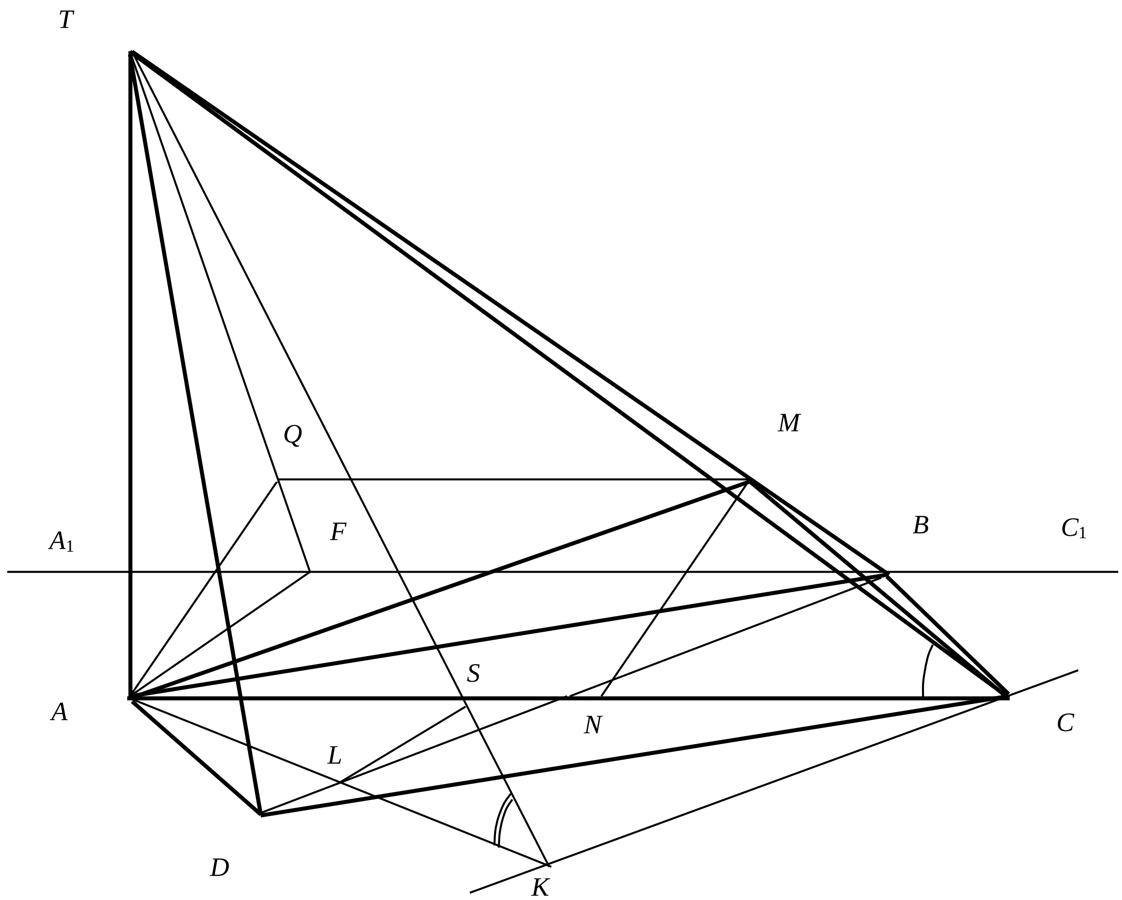
Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in(2;10)\cup(10;+\infty),\ \ x=a\pm\sqrt{8a-16},\ \ y=\left(a\pm\sqrt{8a-16}\right)/2$;

$a=10,\ \ x=18,\ \ y=9$.

10. Основанием пирамиды *TABCD* служит прямоугольник *ABCD*. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром *TA*, а боковое ребро *TC* наклонено к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через ребро *TC* и параллельная диагонали основания *BD*, образует с плоскостью основания угол 45°, а расстояние между этой плоскостью и диагональю *BD* равно a . Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания *AC*?

Решение:



Проведем $KC \| BD,\ AK \perp KC$, $L = AK \cap BD,\ LS \perp TK$, тогда $LS = a$. Обозначим $\beta = \angle TKA$.Так как $AK = 2LK$, то $AK = 2a/\sin\beta$ и $AT = AK\,\mathrm{tg}\beta = 2a/\cos\beta$. Пусть $\alpha = \angle TCA$, тогда $AC = AT\,\mathrm{ctg}\alpha = 2a\,\mathrm{ctg}\alpha/\cos\beta$.

Проведем $A_1C_1 \| AC,\ B \in (A_1C_1);\ AF \perp (A_1C_1),\ AQ \perp TF,\ QM \| (A_1C_1)$ и $MN \perp AC$; тогда MN – высота сечения *AMC*, имеющая наименьшую длину, причем $MN = AQ$.

Найдем площадь сечения: $AF = LK = a/\sin\beta$,

$$TF = \sqrt{AT^2 + AF^2} = \sqrt{4a^2/\cos^2\beta + a^2/\sin^2\beta} = a\sqrt{3\sin^2\beta + 1}/\sin\beta\cos\beta ,$$

$$AQ = AT \cdot AF/TF = 2a\Big/\sqrt{3\sin^2\beta + 1},\ S_{\Delta AMC} = 0{,}5AC \cdot AQ = 2a^2\mathrm{ctg}\alpha\Big/\sqrt{3\sin^2\beta + 1}\cos\beta .$$

α=30°, β=45°.

$$AF = LK = \frac{a}{\sin 45°} = a\sqrt{2};\ AK = AT = 2\sqrt{2}a;\ AC = AT\,\mathrm{ctg}30° = 2\sqrt{2}\sqrt{3}a = 2\sqrt{6}a .$$

$$AQ = \frac{AT \cdot AF}{TF} = \frac{2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}a\right)^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a. \quad S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{6}a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a^2.$$

Ответ: $S = 4\sqrt{3}a^2 / \sqrt{5}$.

Решения варианта № 10

1. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость на 50%, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорости туристов.

Решение: Пусть x – скорость первого туриста, y – скорость второго туриста

$$\frac{20}{x}+\frac{5}{2}=\frac{20}{y},\quad x-2=1{,}5y,\quad \frac{4}{x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x-2},\quad x^2-6x-16=0,\quad x=8,\quad y=4$$

Ответ : 8 *км/ч*, 4 *км/ч*.

2. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 22, 19, 16, ..., начиная с первого, не меньше 52.

Решение: Для данной арифметической прогрессии имеем: $a_1=22,\quad d=-3$. Должно выполняться неравенство $S_n\ge 52$, т.е. $\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n\ge 52$. Подставим в последнее неравенство a_1 и d. В итоге, получим

$$\frac{44-3(n-1)}{2}\cdot n\ge 52 \;\Leftrightarrow\; 47n-3n^2\ge 104 \;\Leftrightarrow\; 3n^2-47n+104\le 0 \;\Leftrightarrow\; (n-13)(n-\frac{8}{3})\le 0.$$

Поскольку n - натуральное число, то $n\in\left[2\frac{2}{3},13\right]\cap N$, т.е. $n=3,4,5,\dots,13$. **Ответ:** 3, 4, 5, ..., 13.

3. Решите уравнение $3^{1-2|x|}+3\cdot 9^{1+|x|}=82$. (4 балла)

Решение:

$$3^{2|x|}=t\ge 1,\quad 27t^2-82t+3=0,\qquad t=3,\quad 3^{2|x|}=3,\quad 2|x|=1,\quad x=\pm\frac{1}{2}\qquad \text{Ответ}: x=\pm\frac{1}{2}.$$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}4\cos^2 x-4\cos x\cos^2 6x+\cos^2 6x=0,\\ \sin x=\cos y.\end{cases}$.

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$$4\cos^2 x-4\cos x\cos^2 6x+\cos^2 6x=0 \;\Leftrightarrow\; (2\cos x-\cos^2 6x)^2+\cos^2 6x\sin^2 6x=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2\cos x-\cos^2 6x=0,\\ \cos^2 6x\sin^2 6x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0,\\ \cos 6x=0,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2\cos x-1=0,\\ \sin 6x=0.\end{cases}$$

Первая система решений не имеет.

Вторая система имеет решения $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \sin x = \cos y. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = \sqrt{3}/2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = -\sqrt{3}/2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $k, n \in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{x + 21 - 7\sqrt{x+9}}{x^2 - 8x} > 0$ (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $x \in [-9 + \infty)$, $x \neq 0$, $x \neq 8$.

Разложим числитель на множители:

$$x + 21 - 7\sqrt{x+9} = x + 9 - 7\sqrt{x+9} + 12 = \left(\sqrt{x+9}\right)^2 - 7\sqrt{x+9} + 12 = \left(\sqrt{x+9} - 3\right)\left(\sqrt{x+9} - 4\right)$$

Имеем:

$$\frac{\left(\sqrt{x+9} - 3\right)\left(\sqrt{x+9} - 4\right)}{x(x-8)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 9 - 9)(x + 9 - 16)}{x(x-8)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-7)}{x(x-8)} > 0.$$

Решая методом интервалов, получаем $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 7) \cup (8; +\infty)$.

С учетом ОДЗ имеем $x \in [-9; 0) \cup (0; 7) \cup (8; +\infty)$

Ответ: $x \in [-9; 0) \cup (0; 7) \cup (8; +\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\sin(x^2 + 6x + 10 - \sin x)\right)$.

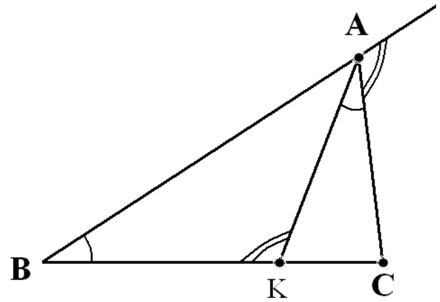
Решение:

$f(x) = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\sin(x^2 + 6x + 10 - \sin x)\right) = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\sin((x+3)^2 + 1 - \sin x)\right)$. Поскольку $g(x) = (x+3)^2 + 1 - \sin x \in [0; \infty)$, причем область значений этой функции содержит числовой луч, то $\varphi(x) = \sin((x+3)^2 + 10 - \sin x) \in [-1; 1]$, $E_\varphi = [-1; 1]$, $\psi(x) = \dfrac{\pi}{3}\sin\varphi(x) \in [-\pi/3; \pi/3]$, $E_\psi = [-\pi/3; \pi/3]$. Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin((x+3)^2 + 1 - \sin x)\right) \in [1/2; 1] \Rightarrow 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin((x+1)^2 + 1 - \sin x)\right) \in [2; 4],\ E_f = [2; 4].$$

Ответ: $[2; 4]$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B + \angle C = \angle AKB$, $AK = 4$, $BK = 9$, $KC = 3$. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC.



Решение:

$\angle B + \angle C = \angle AKB$, $\angle AKC = \angle A$, $\angle KAC = \angle B$,

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{AC}{3} = \frac{12}{AC} \Rightarrow$$

$AC = 6$, $AB = 8$.

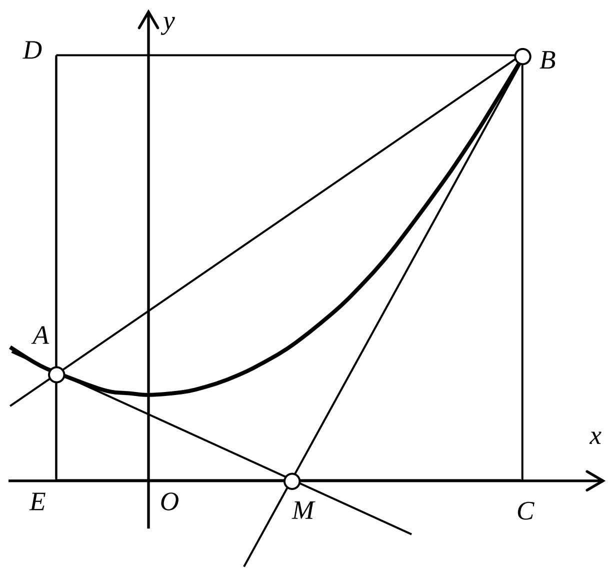
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}, \quad p = \frac{1}{2}(AB+BC+AC) = \frac{1}{2}(8+12+6) = 13,$$

$$S_{ABC} = \sqrt{13(13-8)(13-12)(13-6)} = \sqrt{13\cdot 5\cdot 7} = \sqrt{35\cdot 13}; \quad r_{вп} = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{13}}; \quad S_{впкр} = \frac{35}{13}\pi.$$

Ответ: $\frac{35}{13}\pi$.

8. Составьте уравнения касательных, проведенных из точки $M(3;0)$ к параболе $8y = x^2 + 16$. Определите угол между касательными. Найдите площадь треугольника ABM, где A и B – точки касания.

Решение:



$8y = x^2 + 16$; $M(3;0)$.

$$y = \frac{x_0^2}{8} + 2 + \frac{x_0}{4}(x - x_0),$$

$$y = 2 + \frac{x_0}{4}x - \frac{x_0^2}{8}.$$

$$0 = 2 + \frac{x_0}{4}\cdot 3 - \frac{x_0^2}{8}, \; x_0^2 - 6x_0 - 16 = 0,$$

$(x_0)_1 = -2$, $(y_0)_1 = 2{,}5$, $A(-2;2{,}5)$.

$(x_0)_2 = 8$, $(y_0)_2 = 10$, $B(8;10)$.

1) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; 2) $y = 2x - 6$.

Угол между касательными равен $90°$.

$$|AM| = \sqrt{(3+2)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}; \; |BM| = \sqrt{(3-8)^2 + (0-10)^2} = 5\sqrt{5}.$$

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{2}\cdot 5\sqrt{5} = \frac{125}{4}.$$

Проверка по площадям: $S_{\Delta AMB} = 10\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 7{,}5 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2{,}5 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10 = \frac{125}{4}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 2x - 6$; $90°$; $\frac{125}{4}$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $\left(x-a\right)^2 = 4(y-x+a-1)$, $\dfrac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}-1}=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение:

Второе уравнение равносильно системе: $x \geq 0,\ \ x \neq 1,\ \ y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 4(a-1)$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 4a + 4 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 4a - 4 = 4(a-1)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Очевидно, при $a < 1$ уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a-1}$, если

$$\begin{cases} a-1>0, \\ a>0, \\ a^2-4a+4\geq 0, \\ 1-2a+a^2-4a+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a^2-6a+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a\neq 1, \\ a\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<a<5, \\ 5<a<+\infty. \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение в оставшихся отдельных точках.

При $a = 1$ уравнение принимает вид $\left(x-1\right)^2 = 0$, его корень $x = 1$ не удовлетворяет ограничениям, наложенным на неизвестное x во втором уравнении системы.

При $a = 5$ получаем $(x-5)^2 = 4\cdot 4$, откуда $x_{1,2} = 5 \pm 4$; корень $x = 1$ – посторонний, второй корень $x = 9$ входит в область допустимых значений системы. При $a = 5$ система уравнений имеет одно решение $x = 9,\ \ y = 9$.

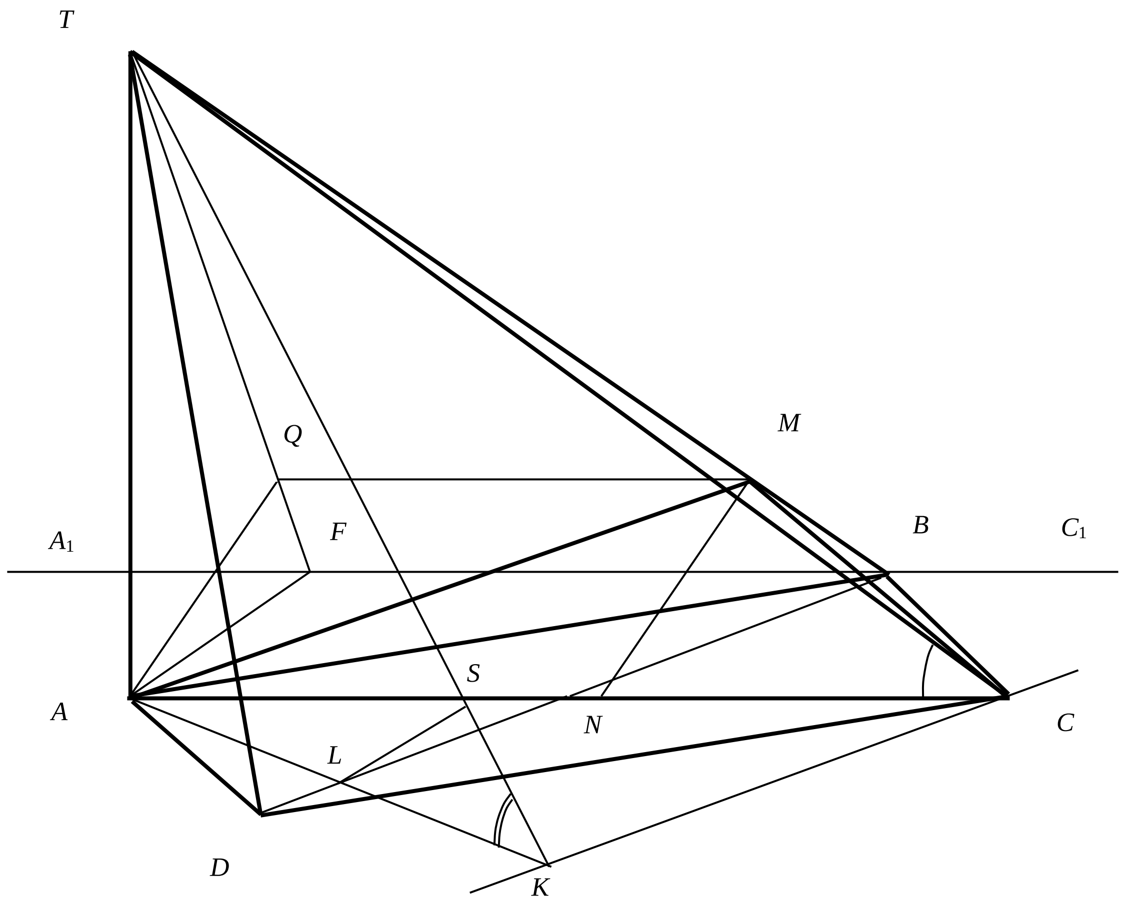
Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a \in (1;5) \cup (5;+\infty),\ \ x = y = a \pm 2\sqrt{a-1}$;

$a = 5,\ \ x = 9,\ \ y = 9$.

10. Основанием пирамиды *TABCD* служит прямоугольник *ABCD*. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром *TA*, а боковое ребро *TC* наклонено к плоскости основания под углом 45°. Плоскость, проходящая через ребро *TC* и параллельная диагонали основания *BD*, образует с плоскостью основания угол 60°, а расстояние между этой плоскостью и диагональю *BD* равно a. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания *AC*?

Решение:



Проведем $KC \| BD,\ AK \perp KC$, $L = AK \cap BD,\ LS \perp TK$, тогда $LS = a$. Обозначим $\beta = \angle TKA$. Так как $AK = 2LK$, то $AK = 2a/\sin\beta$ и $AT = AK\,\mathrm{tg}\beta = 2a/\cos\beta$. Пусть $\alpha = \angle TCA$, тогда $AC = AT\,\mathrm{ctg}\alpha = 2a\,\mathrm{ctg}\alpha/\cos\beta$.

Проведем $A_1C_1 \| AC,\ B \in (A_1C_1);\ AF \perp (A_1C_1),\ AQ \perp TF,\ QM \| (A_1C_1)$ и $MN \perp AC$; тогда MN – высота сечения *AMC*, имеющая наименьшую длину, причем $MN = AQ$.

Найдем площадь сечения: $AF = LK = a/\sin\beta$,

$$TF = \sqrt{AT^2 + AF^2} = \sqrt{4a^2/\cos^2\beta + a^2/\sin^2\beta} = a\sqrt{3\sin^2\beta + 1}/\sin\beta\cos\beta,$$

$$AQ = AT \cdot AF/TF = 2a\Big/\sqrt{3\sin^2\beta + 1},\ S_{\Delta AMC} = 0{,}5AC \cdot AQ = 2a^2\mathrm{ctg}\alpha\Big/\sqrt{3\sin^2\beta + 1}\cos\beta.$$

α=45°, β=60°.

$$AF = LK = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}};\ AT = \frac{2a}{\cos 60^\circ} = 4a;\ \ AC = AT\,\mathrm{ctg}45^\circ = 4a.$$

$$AQ = \frac{AT \cdot AF}{TF} = \frac{4a \cdot 2a}{\sqrt{3}\sqrt{16a^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^2}} = \frac{4a}{\sqrt{13}}.\ S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot 4a = \frac{8}{\sqrt{13}}a^2.$$

Ответ: $S = 8a^2/\sqrt{13}$.