Второй (заключительный этап) академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету

«Математика», весна 2016 г.

Решение варианта № 11

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $4/3$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

Решение: Пусть x — скорость Васи и Пети, v — скорость велосипедиста Коли, S — длина пути от дома до озера. Тогда Вася и Коля встретились через время $t=\dfrac{S}{x+v}$ после начала движения. После второго выезда Коли из дома встреча Пети и Коли произошла спустя время $t_1=\dfrac{S-xt}{x+v}$. От озера до дома Вася был в пути $2t$, а Петя — $t+2t_1$. По условию $t+2t_1=\dfrac{8t}{3}$. Следовательно, $\dfrac{2S-2xt}{x+v}=\dfrac{5S}{3(x+v)}\Rightarrow 6S-\dfrac{6xS}{x+v}=5S\Rightarrow\dfrac{6x}{x+v}=1\Rightarrow v=5x$.

Необходимо найти отношение $\dfrac{S}{x}$ к $2t$. Таким образом, искомая величина

$\dfrac{S}{2xt}=\dfrac{x+v}{2x}=\dfrac{x+5x}{2x}=3$. Ответ: в 3 раза медленнее.

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}<\dfrac{16}{15}$. (8 баллов)

Решение: ОДЗ: $|x|>4$. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}<\dfrac{16}{15}\Leftrightarrow\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-16}}<\dfrac{1}{15}$.

1) При $x>4$ неравенство верно.

2) При $x<-4$ приходим к неравенству $-x\sqrt{x^2-16}>15$, или $\left(-x\sqrt{x^2-16}\right)^2>225$,

$x^4-16x^2-225>0$, $(x^2+9)(x^2-25)>0$, $(x+5)(x-5)>0$. Поскольку $x<-4$, то $x<-5$. Ответ: $x\in(-\infty;-5)\cup(4;+\infty)$.

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $7371\cdot 2^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

Решение: Имеем геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, b_1q^2, \cdots, b_1q^{n-1}, \cdots,$ причем $b_1q^{n-1} \in N$ для любого номера $n \in N$. Таким образом, b_1 и q являются натуральными числами. По условию $b_3 + b_5 + b_7 = 7371\cdot 2^{2016}$, или $b_1q^2 + b_1q^4 + b_1q^6 = 2^{2016}\cdot 3^4\cdot 7\cdot 13$, $b_1q^2(1+q^2+q^4) = 2^{2016}\cdot 3^4\cdot 7\cdot 13$. Натуральное число $1+q^2+q^4$ при любом $q \in N$ есть нечетное число, следовательно, $1+q^2+q^4 = 3^k\cdot 7^l\cdot 13^m$, где $k \in \{0,1,2,3,4\}, \quad l,m \in \{0,1\}$.

1) Если $k=0$, то $1+q^2+q^4 = 7^l\cdot 13^m$, $l \in \{0,1\}$.

   a) При $l=0$ получаем уравнение $q^2+q^4 = 13^m$, которое не имеет натуральных решений (дискриминант $D = 1+4\cdot 13^m$ равен 5 при $m=0$, и равен 53 при $m=1$.

   b) При $l=1$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-7=0$, которое не имеет натуральных решений ($D=29$).

   c) При $l=1$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-90=0$, $q^2=9$, $q=3$. При этом $b_1 = 2^{2016}\cdot 3^2$.

2) Если $k=1$, то $1+q^2+q^4 = 3\cdot 7^l\cdot 13^m$, $l,m \in \{0,1\}$.

   a) При $l=0$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-2=0$, $q^2=1$, $q=1$. При этом $b_1 = 2^{2016}\cdot 3^3\cdot 91$.

   b) При $l=0$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-38=0$, которое не имеет натуральных решений ($D=153$).

   c) При $l=1$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-20=0$, $q^2=4$, $q=2$. При этом $b_1 = 2^{2014}\cdot 3^3\cdot 13$.

   d) При $l=1$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-272=0$, $q^2=16$, $q=4$. При этом $b_1 = 2^{2012}\cdot 3^3$.

3) Если $k \in \{2,3,4\}, \quad l,m \in \{0,1\}$, то $1+q^2+q^4 = 3^k\cdot 7^l\cdot 13^m$. Для полученного биквадратного уравнения $q^2+q^4+1-3^k\cdot 7^l\cdot 13^m = 0$ вычислим дискриминант

$D = 1 - 4(1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m) = 3(4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1)$. Поскольку при $k \in \{2, 3, 4\}, \quad l, m \in \{0, 1\}$, число $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m$ делится на 3, то $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1$ не делится на 3, и $\sqrt{D}$ является иррациональным числом. Следовательно, уравнение $q^2 + q^4 + 1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m = 0$ натуральных корней не имеет.

Ответ: задача имеет четыре решения: 1) $q = 1$; 2) $q = 2$; 3) $q = 3$; 4) $q = 4$.

4. Решите неравенство $(\log_x^2(3x-2) - 4)(\sin \pi x - 1) \le 0$. (8 баллов)

Решение:

$(\log_x^2(3x-2) - 4)(\sin \pi x - 1) \le 0 \iff (\log_x(3x-2) - 2)(\log_x(3x-2) + 2)(\sin \pi x - 1) \le 0$

ОДЗ: $x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin \pi x - 1 \le 0, \\ (\log_x(3x-2) - 2)(\log_x(3x-2) + 2) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin \pi x - 1 \ge 0, \\ (\log_x(3x-2) - 2)(\log_x(3x-2) + 2) \le 0, \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in R, \\ (\log_x(3x-2) - \log_x x^2)(\log_x x^2(3x-2) - \log_x 1) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1/2 + 2n, \ n \in Z, \\ (\log_x(3x-2) - \log_x x^2)(\log_x x^2(3x-2) - \log_x 1) \le 0, \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x^2 - 3x + 2)(3x^3 - 2x^2 - 1) \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1/2 + 2n, \ n \in Z, \quad x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x^2 - 3x + 2)(3x^3 - 2x^2 - 1) \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x-1)^2(x-2)(3x^2 + x + 1) \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1/2 + 2n, \ n \in Z, \quad x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x-1)^2(x-2)(3x^2 + x + 1) \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in (2/3, 1) \cup (1, 2], \\ x = 1/2 + 2n, \ n \in N. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (2/3, 1) \cup (1, 2] \cup \{x = 1/2 + 2n, \ n \in N\}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4\cos^2 x \cdot \sin^2 \dfrac{x}{6} + 4\sin \dfrac{x}{6} - 4\sin^2 x \cdot \sin \dfrac{x}{6} + 1 = 0, \\ \sin \dfrac{x}{4} = \sqrt{\cos y}. \end{cases}$

(10 баллов)

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$$4\cos^2 x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}-4\sin^2 x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cos^2 x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\cos^2 x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x\sin\frac{x}{6}+\cos x)^2+\sin^2 x=0 \quad\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x\left(\sin\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)=0, \\ \sin x=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{6}=-\frac{1}{2}, \\ \sin x=0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right), k\in Z, \\ x=6\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right), k\in Z, \end{array}\right. \\ x=\pi n, n\in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\pi+12\pi k, k\in Z, \\ x=-5\pi+12\pi k, k\in Z, \end{array}\right. \\ x=\pi n, n\in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\pi+12\pi k, k\in Z, \\ x=-5\pi+12\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\pi+12\pi k, k\in Z, \\ x=-5\pi+12\pi k, k\in Z, \end{array}\right. \\ \sin\frac{x}{4}=\sqrt{\cos y}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\pi+12\pi(2m+1), m\in Z, \\ \cos y=1/2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5\pi+24\pi m, m\in Z, \\ \cos y=1/2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=11\pi+24\pi m, m\in Z \\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5\pi+24\pi m, m\in Z, \\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(11\pi+24\pi m, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(-5\pi+24\pi m, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $m,n\in Z$.

Задача 6. Найдите множество значений функции $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\log_{0,5}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sin x+7}\right)}$.

(10 баллов)

Решение:

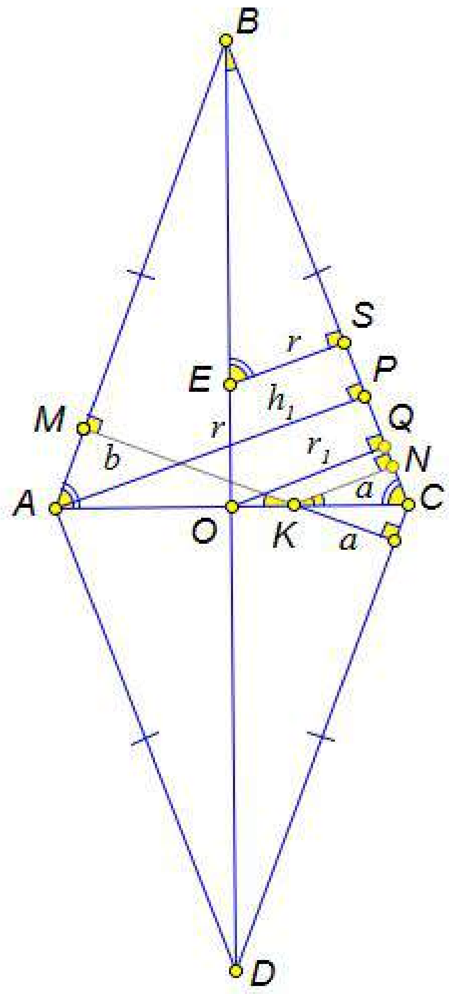
Пусть $t=\sin x, t\in[-1;1] \;\Rightarrow\; u=\log_{0,5}(z),\quad z=\frac{t}{t+7}=1-\frac{7}{t+7}$ (функция z(t) возрастает). При $t\in[-1;1]$ имеем $z\in\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{8}\right]$, но по свойствам логарифмов $z>0$, следовательно, $z\in\left(0;\frac{1}{8}\right]$. Функция $u=\log_{0,5} z$ убывает, и при $z\in\left(0;\frac{1}{8}\right]$ имеем $u\in[3;+\infty)$. Далее имеем $u^{-1}\in(0;1/3]$, $\sqrt{u^{-1}}\in(0;1/\sqrt{3}]$, $\operatorname{arctg}\sqrt{u^{-1}}\in(0;\pi/6]$. Таким образом, множеством значений функции $y=f(x)$ является промежуток $(0;\pi/6]$.

Ответ: $E(y)=(0;\pi/6]$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 12 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 5. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб.

(12 баллов)

Решение:



По условию: $KN = a = 2$ - расстояние от точки K до прямой BC, $KM = b = 12$ - расстояние от точки K до прямой AB, $r = 5$ - радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Пусть O - точка пересечения диагоналей ромба, E -центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначим $BO = h$, $OQ = r_1$ - радиус окружности, вписанной в ромб $ABCD$, $AP = h_1$ - высота треугольника ABC, проведенная из вершины A к стороне BC.

1) $h_1 = a + b = 14$;

2) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot h$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot h_1$, $S_{ABC} = pr$;

3) $BC \cdot h_1 = (AC + 2BC) \cdot r \;\Rightarrow$

$14BC = 5(AC + 2BC) \;\Rightarrow\; 4BC = 5AC$;

4) $AC \cdot h = BC \cdot h_1 \Rightarrow AC \cdot h = 1{,}25 AC \cdot h_1 \Rightarrow$

$h = 17{,}5$;

5) $BE = h - r = 12{,}5$, $\sin(\angle OBC) = \dfrac{ES}{BE} = \dfrac{r}{BE} = \dfrac{5}{12{,}5} = \dfrac{2}{5}$, $\cos(\angle OBC) = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$,

$BC = \dfrac{h}{\cos(\angle OBC)} = \dfrac{17{,}5 \cdot 5}{\sqrt{21}} = \dfrac{25\sqrt{21}}{6}$.

6) $r_1 = 0{,}5 h_1 = 7$.

Ответ: $\dfrac{25\sqrt{21}}{6}$, 7.

8. На оси Oy найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0{,}5\left(x - \left(\sqrt{3}/2\right)\right)^2$, угол между которыми равен $60°$. (12 баллов)

Решение:

На оси Oy найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y=0{,}5\cdot\left(x-\ \sqrt{3}/2\right)^2$,угол между которыми равен $60°$.

Решение (без применения производной).

$y=0{,}5\cdot\left(x-\ \sqrt{3}/2\right)^2$, $M\left(0;y_0\right)$. Уравнение $0{,}5\cdot\left(x-\sqrt{3}/2\right)^2=y_0+kx$, или

$x^2-2\left(k+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x-2y_0+\dfrac{3}{4}=0$, имеет единственное решение, если $\dfrac{D}{4}=k^2+\sqrt{3}k+2y_0=0$.

Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1+k_2=-\sqrt{3}$ (1), $k_1\cdot k_2=2y_0$ (2). Из условия $\alpha_2-\alpha_1=60°$, $\mathrm{tg}\left(\alpha_2-\alpha_1\right)=\sqrt{3}$ следует $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\alpha_2\cdot\mathrm{tg}\alpha_1}=\sqrt{3}$, или $\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\sqrt{3}$. Отсюда, $k_2-k_1=\sqrt{3}\left(1+k_2k_1\right)$, $k_2-k_1=\sqrt{3}\left(1+2y_0\right)$, (3). Решая систему $\begin{cases}k_2-k_1=\sqrt{3}\left(1+2y_0\right),\\ k_1+k_2=-\sqrt{3},\end{cases}$ находим $\begin{cases}k_2=\sqrt{3}y_0,\\ k_1=-\sqrt{3}\left(y_0+1\right)\end{cases}$ и $k_1k_2=-3y_0^2-3y_0$.

Учитывая (2), получаем условие $2y_0=-3y_0^2-3y_0$, или $3y_0^2+5y_0=0$. Возможны два решения. 1) $y_0=0,\ M\left(0;0\right), k_1=-\sqrt{3}, k_2=0$. Уравнения касательных: $y_1=-\sqrt{3}x;\ y_2=0$.

2) $y_0=-\dfrac{5}{3},\ M\left(0;-\dfrac{5}{3}\right),\ k_1=-\sqrt{3}+\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, k_2=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$. Уравнения касательных:

$y_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x-\dfrac{5}{3};\ y_2=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}x-\dfrac{5}{3}$. Ответ: $M\left(0;0\right)$ или $M\left(0;-5/3\right)$.

9. Определите все значения a, при которых уравнение

$$4x^2-8|x|+\left(2a+|x|+x\right)^2=4$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*. (12 баллов)

Решение:

I. $x\geq 0,\ x^2-2x+(a+x)^2=1;\ 2x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$;

$D/4=1-2a+a^2-2a^2+2=3-2a-a^2$.

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=\left(1-a\pm\sqrt{3-2a-a^2}\right)\!\big/2$,

$$\text{если}\ \begin{cases}3-2a-a^2>0,\\ a-1<0,\\ a^2-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3<a<1,\\ a<1,\\ a\le -1\end{cases} \Leftrightarrow -3<a\le -1.$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x=\left(1-a+\sqrt{3-2a-a^2}\right)\!\big/2$, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0,\\ a-1\le 0,\end{cases}\\ a^2-1<0,\\ \begin{cases}a^2-1=0,\\ a-1>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-3,\\ a=1,\end{array}\right.\\ a\le 1,\end{cases}\\ -1<a<1,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-1,\\ a=1,\end{array}\right.\\ a>1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-3,\\ -1<a\le 1.\end{array}\right.$$

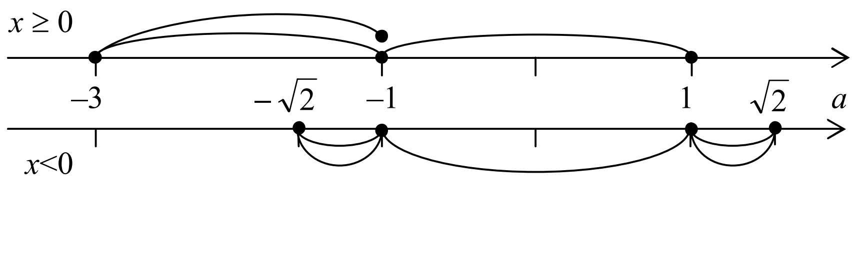
II. $x<0,\ x^2+2x+a^2-1=0$; $D/4=2-a^2$.

Уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2-a^2}$, если

$$\begin{cases}2-a^2>0,\\ a^2-1>0,\\ -1<0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}<a<-1,\\ 1<a<\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x=-1-\sqrt{2-a^2}$, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-a^2=0,\\ -1<0,\end{cases}\\ a^2-1<0,\\ \begin{cases}a^2-1=0,\\ -1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-\sqrt{2},\\ a=\sqrt{2},\\ -1\le a\le 1.\end{array}\right.$$



Ответ: $a\in\left(-3;-\sqrt{2}\right),\ \ x_{1,2}=\left(1-a\pm\sqrt{3-2a-a^2}\right)\!\big/2$;

$a\in(-1;1],\ \ x_1=\left(1-a+\sqrt{3-2a-a^2}\right)\!\big/2,\ \ x_2=-1-\sqrt{2-a^2}$;

$a\in\left(1;\sqrt{2}\right),\ \ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2-a^2}$.

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Решение:

Так как $TK = 4R\big/3,\ OK = R/3,\ BK = \sqrt{1-(1/3)^2}\,R = \sqrt{8}R\big/3;\ AB = AK\sqrt{3} = \sqrt{8/3}R$,

$AT = \sqrt{(4R/3)^2 + \left(\sqrt{8}R\big/3\right)^2} = \sqrt{8/3}R$. Следовательно, $AB = AT$, все ребра пирамиды равны.

Будем считать, что секущая плоскость проходит через медиану TG и пересекает ребро BC в точке M. Проведем $GF \parallel BC, F \in AD$, затем $DE \perp TF, E \in TF$, $EP \parallel BC, P \in TG$, и $PM \parallel DE, M \in BC$. PM – общий перпендикуляр к BC и TG.

Обозначим $a = AB = AT$. Тогда $FK = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $TK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$,

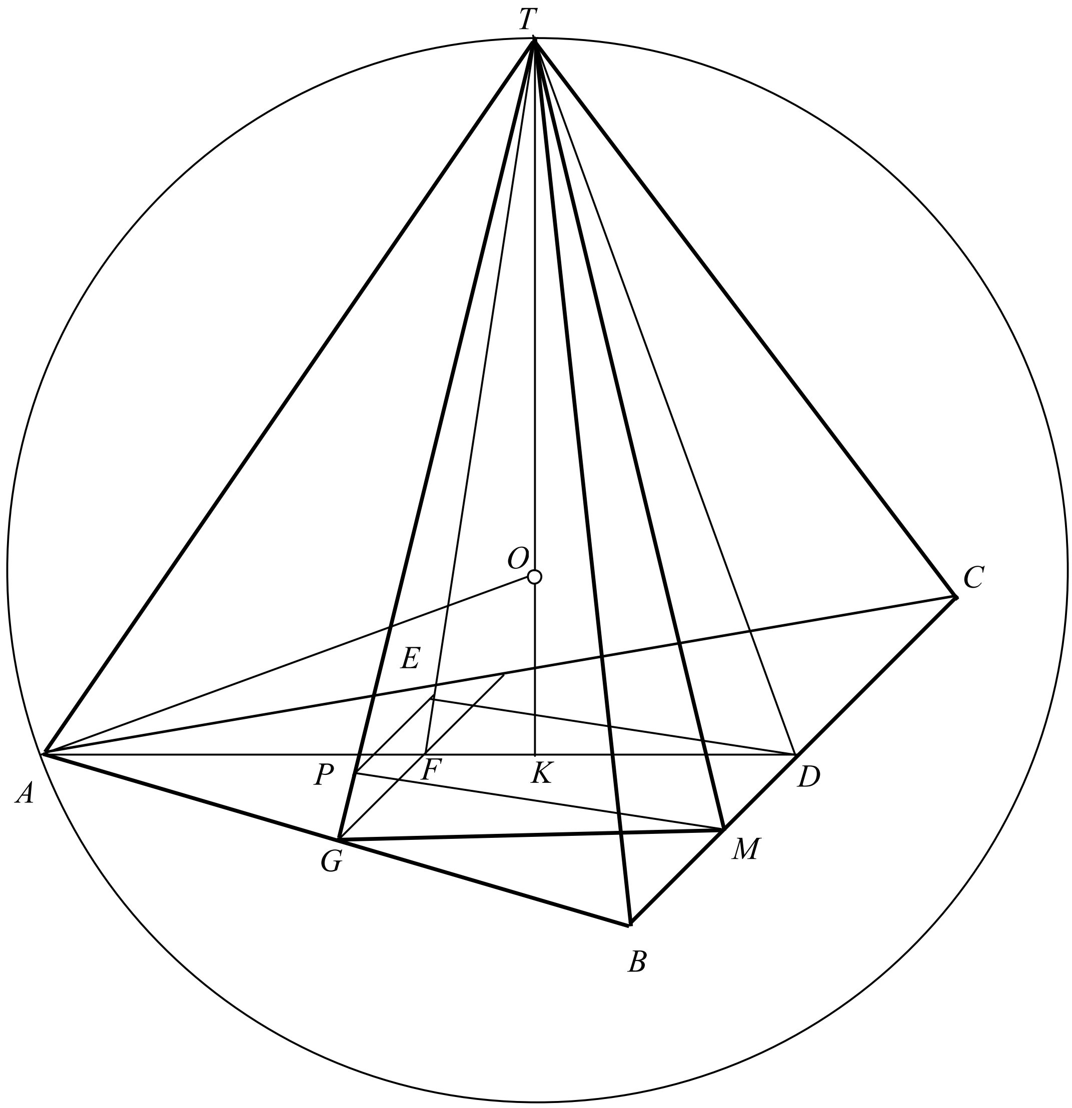
$FT = \sqrt{KT^2 + KF^2} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{3}{12\cdot 12}}\,a = \frac{\sqrt{11}}{4}a$, $ED = \frac{FD\cdot TK}{FT} = \frac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot 4}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4R}{\sqrt{33}}$.

$$S_{\Delta TGM} = \frac{1}{2}\cdot TG\cdot PM = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{11}}R^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}R^2.$$

$ET = \sqrt{TD^2 - ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{5a}{2\sqrt{11}}$; $\frac{ET}{FT} = \frac{5}{2\sqrt{11}}\cdot\frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{10}{11}$;

$$PE = MD = \frac{10}{11} GF = \frac{10}{11} \cdot \frac{a}{4} = \frac{5a}{22};\ BM = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{22}\right) a = \frac{3}{11} a.\ V_{TBMG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11} V_{TABC} = \frac{3}{22} V_{TABC}.$$

Отношение объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду, равно 3:19.



Пирамида – правильный тетраэдр (все его ребра равны).

$$TK = \frac{4R}{3},\ OK = \frac{R}{3},\ BK = \sqrt{1 - \frac{R}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} R,\ AB = BK\sqrt{3} = \sqrt{\frac{8}{3}} R,$$

$$BT = \sqrt{\frac{16}{9} R^2 + \frac{8}{9} R^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} R. \Rightarrow AB = BT.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2;\ 3:19$.

Решение варианта № 15

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $5/4$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

Решение: Пусть x — скорость Васи и Пети, v — скорость велосипедиста Коли, S — длина пути от дома до озера. Тогда Вася и Коля встретились через время $t=\dfrac{S}{x+v}$ после начала движения. После второго выезда Коли из дома встреча Пети и Коли произошла спустя время $t_1=\dfrac{S-xt}{x+v}$. От озера до дома Вася был в пути $2t$, а Петя — $t+2t_1$. По условию $t+2t_1=\dfrac{5t}{2}$. Следовательно, $\dfrac{2S-2xt}{x+v}=\dfrac{3S}{2(x+v)}\Rightarrow 4S-\dfrac{4xS}{x+v}=3S\Rightarrow \dfrac{4x}{x+v}=1\Rightarrow v=3x$.

Необходимо найти отношение $\dfrac{S}{x}$ к $2t$. Таким образом, искомая величина

$\dfrac{S}{2xt}=\dfrac{x+v}{2x}=\dfrac{x+3x}{2x}=2$. Ответ: в 2 раза медленнее.

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}<\dfrac{5}{6}$. (8 баллов)

Решение: ОДЗ: $|x|>\sqrt{5}$. $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}<\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-5}}<\dfrac{1}{6}$.

1) При $x>\sqrt{5}$ неравенство верно.

2) При $x<-\sqrt{5}$ приходим к неравенству $-x\sqrt{x^2-5}>6$, или $\left(-x\sqrt{x^2-5}\right)^2>36$,

$x^4-5x^2-36>0$, $(x^2+4)(x^2-9)>0$, $(x+3)(x-3)>0$. Поскольку $x<-\sqrt{5}$, то $x<-3$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup(\sqrt{5};+\infty)$.

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819\cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

Решение: Имеем геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, b_1q^2, \cdots, b_1q^{n-1}, \cdots$, причем $b_1q^{n-1}\in N$ для любого номера $n\in N$. Таким образом, b_1 и q являются натуральными числами. По условию $b_3+b_5+b_7=819\cdot 6^{2016}$, или $b_1q^2+b_1q^4+b_1q^6=2^{2016}\cdot 3^{2018}\cdot 7\cdot 13$, $b_1q^2(1+q^2+q^4)=2^{2016}\cdot 3^{2018}\cdot 7\cdot 13$. Натуральное число $1+q^2+q^4$ при любом $q\in N$ есть нечетное число, следовательно, $1+q^2+q^4=3^k\cdot 7^l\cdot 13^m$, где $k\in\{0,1,\ldots,2018\}$, $l,m\in\{0,1\}$.

1) Если $k=0$, то $1+q^2+q^4=7^l\cdot 13^m$, $l\in\{0,1\}$.

a) При $l=0$ получаем уравнение $q^2+q^4=13^m$, которое не имеет натуральных решений (дискриминант $D=1+4\cdot 13^m$ равен 5 при $m=0$, и равен 53 при $m=1$.

b) При $l=1$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-7=0$, которое не имеет натуральных решений ($D=29$).

c) При $l=1$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-90=0$, $q^2=9$, $q=3$. При этом $b_1=6^{2016}$.

2) Если $k=1$, то $1+q^2+q^4=3\cdot 7^l\cdot 13^m$, $l,m\in\{0,1\}$.

a) При $l=0$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-2=0$, $q^2=1$, $q=1$. При этом $b_1=6^{2016}\cdot 3\cdot 91$.

b) При $l=0$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-38=0,$ которое не имеет натуральных решений ($D=153$).

c) При $l=1$, $m=0$ получаем уравнение $q^2+q^4-20=0,$ $q^2=4,$ $q=2.$ При этом $b_1=2^{2014}\cdot 3^{2017}\cdot 13.$

d) При $l=1$, $m=1$ получаем уравнение $q^2+q^4-272=0,$ $q^2=16,$ $q=4.$ При этом $b_1=2^{2012}\cdot 3^{2017}.$

3) Если $k\in\{2,\ldots,2018\}$, $l,m\in\{0,1\}$, то $1+q^2+q^4=3^k\cdot 7^l\cdot 13^m.$ Для полученного биквадратного уравнения $q^2+q^4+1-3^k\cdot 7^l\cdot 13^m=0$ вычислим дискриминант $D=1-4(1-3^k\cdot 7^l\cdot 13^m)=3(4\cdot 3^{k-1}\cdot 7^l\cdot 13^m-1)$. Поскольку при $k\in\{2,\ldots,2018\}$, $l,m\in\{0,1\}$, число $4\cdot 3^{k-1}\cdot 7^l\cdot 13^m$ делится на 3, то $4\cdot 3^{k-1}\cdot 7^l\cdot 13^m-1$ не делится на 3, и $\sqrt{D}$ является иррациональным числом. Следовательно, уравнение $q^2+q^4+1-3^k\cdot 7^l\cdot 13^m=0$ натуральных корней не имеет.

Ответ: задача имеет четыре решения: 1) $q=1$; 2) $q=2$; 3) $q=3$; 4) $q=4$.

4. Решите неравенство $(\log_x^2(7x-6)-4)(\cos\pi x-1)\le 0.$ (8 баллов)

Решение:

$$(\log_x^2(7x-6)-4)(\cos\pi x-1)\le 0 \Leftrightarrow (\log_x(7x-6)-2)(\log_x(7x-6)+2)(\cos\pi x-1)\le 0$$

ОДЗ: $x\in(6/7,1)\cup(1,+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\pi x-1\le 0,\\ (\log_x(7x-6)-2)(\log_x(7x-6)+2)\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\pi x-1\ge 0,\\ (\log_x(7x-6)-2)(\log_x(7x-6)+2)\le 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in R,\\ (\log_x(7x-6)-\log_x x^2)(\log_x x^2(7x-6)-\log_x 1)\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2n,\ n\in Z,\\ (\log_x(7x-6)-\log_x x^2)(\log_x x^2(7x-6)-\log_x 1)\le 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(6/7,1)\cup(1,+\infty),\\ (x^2-7x+6)(7x^3-6x^2-1)\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2n,\ n\in Z,\quad x\in(6/7,1)\cup(1,+\infty),\\ (x^2-7x+6)(7x^3-6x^2-1)\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(6/7,1)\cup(1,+\infty),\\(x-1)^2(x-6)(7x^2+x+1)\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2n,\, n\in Z,\quad x\in(6/7,1)\cup(1,+\infty),\\(x-1)^2(x-6)(7x^2+x+1)\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(6/7,1)\cup(1,6],\\ x=2n,\, n\in N\setminus\{1,2,3\}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(6/7,1)\cup(1,6]\cup\{x=2n,\, n\in N\setminus\{1,2,3\}\}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}4\cos^2 2x\cdot\sin^2\dfrac{x}{3}+4\sin\dfrac{x}{3}-4\sin^2 2x\cdot\sin\dfrac{x}{3}+1=0,\\ \sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{\cos y}=0.\end{cases}$

(10 баллов)

Решение: Решим 1-е уравнение системы:

$$4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{3}+4\sin\frac{x}{3}-4\sin^2 2x\cdot\sin\frac{x}{3}+1=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{3}+4\cos^2 2x\cdot\sin\frac{x}{3}+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2\cos 2x\sin\frac{x}{3}+\cos 2x\right)^2+\sin^2 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos 2x\left(\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\right)=0,\\ \sin 2x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\dfrac{x}{3}=-\dfrac{1}{2},\\ \sin 2x=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\left(-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right),\, k\in Z,\\ x=3\left(-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\, k\in Z,\end{array}\right.\\ x=\dfrac{\pi n}{2},\, n\in Z,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+6\pi k,\, k\in Z,\\ x=-\dfrac{5\pi}{2}+6\pi k,\, k\in Z,\end{array}\right.\\ x=\dfrac{\pi n}{2},\, n\in Z,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+6\pi k,\, k\in Z,\\ x=-\dfrac{5\pi}{2}+6\pi k,\, k\in Z.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+6\pi k,\, k\in Z,\\ x=-\dfrac{5\pi}{2}+6\pi k,\, k\in Z,\end{array}\right.\\ \sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{\cos y}=0,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{2}+12\pi m,\, m\in Z,\\ \cos y=1/2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{5\pi}{2}+6\pi(2m+1),\, m\in Z,\\ \cos y=1/2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{2}+12\pi m,\, m\in Z\\ y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\, n\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{7\pi}{2}+12\pi m,\, m\in Z,\\ y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\, n\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{2}+12\pi m,\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{2}+12\pi m,\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $m,n\in Z$.

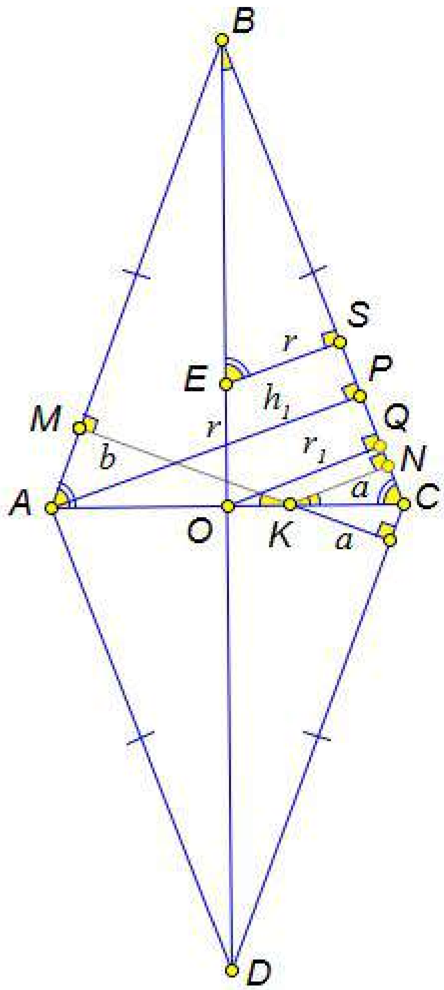
6. Найдите множество значений функции $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{6\log_{0,25}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)}$. (10 баллов)

Решение:

Пусть

$t=\sin x, t\in[-1;1] \quad\Rightarrow\quad u=\log_{0,25}(z), \quad z=\frac{t}{t+15}=1-\frac{}{t}$ (функция z(t) возрастает). При $t\in[-1;1]$ имеем $z\in\left[-\frac{1}{14};\frac{1}{16}\right]$, но по свойствам логарифмов $z>0$, следовательно, $z\in\left(0;\frac{1}{16}\right]$. Функция $u=\log_{0,25} z$ убывает, и при $z\in\left(0;\frac{1}{16}\right]$ имеем $u\in[2;+\infty)$. Далее имеем $u^{-1}\in(0;0,5]$, $\sqrt{6u^{-1}}\in(0;\sqrt{3}]$, $\operatorname{arctg}\sqrt{6u^{-1}}\in(0;\pi/3]$. Таким образом, множеством значений функции $y=f(x)$ является промежуток $(0;\pi/3]$.

Ответ: $E(y)=(0;\pi/3]$.



7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 8 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 3. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб.

Решение:

По условию: $KN=a=2$ - расстояние от точки K до прямой BC, $KM=b=8$ - расстояние от точки K до прямой AB, $r=3$ - радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Пусть O - точка пересечения диагоналей ромба, E -центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначим $BO=h$, $OQ=r_1$ - радиус окружности, вписанной в ромб $ABCD$, $AP=h_1$ - высота треугольника ABC, проведенная из вершины A к стороне BC.

1) $h_1=a+b=10$;

2) $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot h$, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot h_1$, $S_{ABC}=pr$;

3) $BC\cdot h_1=(AC+2BC)\cdot r \Rightarrow 10BC=3(AC+2BC) \Rightarrow 4BC=3AC$;

4) $AC\cdot h=BC\cdot h_1 \Rightarrow AC\cdot h=0{,}75AC\cdot h_1 \Rightarrow$

$h=7{,}5$;

5) $BE=h-r=4{,}5$, $\sin(\angle OBC)=\dfrac{ES}{BE}=\dfrac{r}{BE}=\dfrac{3}{4{,}5}=\dfrac{2}{3}$, $\cos(\angle OBC)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$,

$BC=\dfrac{h}{\cos(\angle OBC)}=\dfrac{7{,}5\cdot 3}{\sqrt{5}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

6) $r_1=0{,}5h_1=5$.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$, 5.

8. На оси Oy найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=0{,}5\left(x-(1/2)\right)^2$, угол между которыми равен $45°$. (12 баллов)

Решение:

На оси Oy найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=0{,}5\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$,угол между которыми равен $45°$.

Решение (без применения производной).

$y=0{,}5\cdot(x-1/2)^2$, $M(0;y_0)$. Уравнение $0{,}5\cdot(x-1/2)^2=y_0+kx$, или

$x^2-2\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x-2y_0+\dfrac{1}{4}=0$, имеет единственное решение, если $\dfrac{D}{4}=k^2+k+2y_0=0$.

Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1+k_2=-1$ (1), $k_1\cdot k_2=2y_0$ (2). Из условия $\alpha_2-\alpha_1=45°$, $\mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=1$ следует $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\alpha_2\cdot\mathrm{tg}\alpha_1}=1$, или $\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=1$. Отсюда, $k_2-k_1=1+k_2k_1$, $k_2-k_1=1+2y_0$, (3). Решая систему $\begin{cases}k_2-k_1=1+2y_0,\\ k_1+k_2=-1,\end{cases}$ находим $\begin{cases}k_2=y_0,\\ k_1=-y_0-1\end{cases}$ и $k_1k_2=-y_0^2-y_0$. Учитывая (2), получаем условие $2y_0=-y_0^2-y_0$, или $y_0^2+3y_0=0$. Возможны два решения. 1)

$y_0=0,\ M(0;0), k_1=-1, k_2=0$. Уравнения касательных: $y_1=-x;\ y_2=0$.

2) $y_0=-3,\ M(0;-3),\ k_1=2,\ k_2=-3$. Уравнения касательных: $y_1=2x-3;\ y_2=-3x-3$.

Ответ: $M(0;0)$ или $M(0;-3)$.

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $4x^2-16|x|+\left(2a+|x|-x\right)^2=16$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

Решение:

I. $x\le 0,\ x^2+4x+(a-x)^2=4;\ 2x^2-2(a-2)x+a^2-4=0$;

$D/4=a^2-4a+4-2a^2+8=12-4a-a^2$.

Уравнение имеет два различных неположительных корня $x_{1,2}=\left(a-2\pm\sqrt{12-4a-a^2}\right)/2$,

если $\begin{cases}12-4a-a^2>0,\\ a-2<0,\\ a^2-4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<a<2,\\ a<2,\\ a\le -2\end{cases}\Leftrightarrow -6<a\le -2$.

Уравнение имеет ровно один неположительный корень $x=\left(a-2-\sqrt{12-4a-a^2}\right)/2$, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0,\\ a-2\le 0,\end{cases}\\ a^2-4<0,\\ \begin{cases}a^2-4=0,\\ a-2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-6,\\ a=2,\end{array}\right.\\ a\le 2,\end{cases}\\ -2<a<2,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-2,\\ a=2,\end{array}\right.\\ a>2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-6,\\ -2<a\le 2.\end{array}\right.$$

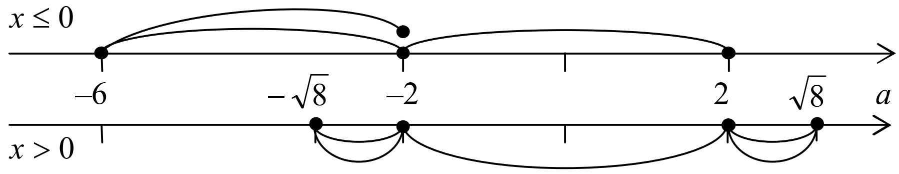
II. $x>0,\ x^2-4x+a^2-4=0$; $D/4=8-a^2$.

Уравнение имеет два различных положительных корня $x_{1,2}=2\pm\sqrt{8-a^2}$, если

$$\begin{cases}8-a^2>0,\\ a^2-4>0,\\ 2>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{8}<a<-2,\\ 2<a<\sqrt{8}.\end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно один положительный корень $x=2+\sqrt{8-a^2}$, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}8-a^2=0,\\ 2>0,\end{cases}\\ a^2-4<0,\\ \begin{cases}a^2-4=0,\\ 2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-\sqrt{8},\\ a=\sqrt{8},\\ -2\le a\le 2.\end{array}\right.$$



Ответ: $a \in \left(-6;-\sqrt{8}\right)$, $x_{1,2} = \left(a - 2 \pm \sqrt{12 - 4a - a^2}\right)/2$;

$a \in \left(-2;2\right]$, $x_1 = \left(a - 2 - \sqrt{12 - 4a - a^2}\right)/2$, $x_2 = 2 + \sqrt{8 - a^2}$;

$a \in \left(2;\sqrt{8}\right)$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8 - a^2}$.

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Решение:

Так как $TK = 4R/3$, $OK = R/3$, $BK = \sqrt{1-(1/3)^2}\,R = \sqrt{8}R/3$; $AB = AK\sqrt{3} = \sqrt{8/3}R$,

$AT = \sqrt{\left(4R/3\right)^2 + \left(\sqrt{8}R/3\right)^2} = \sqrt{8/3}R$. Следовательно, $AB = AT$, все ребра пирамиды равны.

Будем считать, что секущая плоскость проходит через медиану TG и пересекает ребро BC в точке M. Проведем $GF \parallel BC, F \in AD$, затем $DE \perp TF, E \in TF$, $EP \parallel BC, P \in TG$, и $PM \parallel DE, M \in BC$. PM – общий перпендикуляр к BC и TG.

Обозначим $a = AB = AT$. Тогда $FK = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $TK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$,

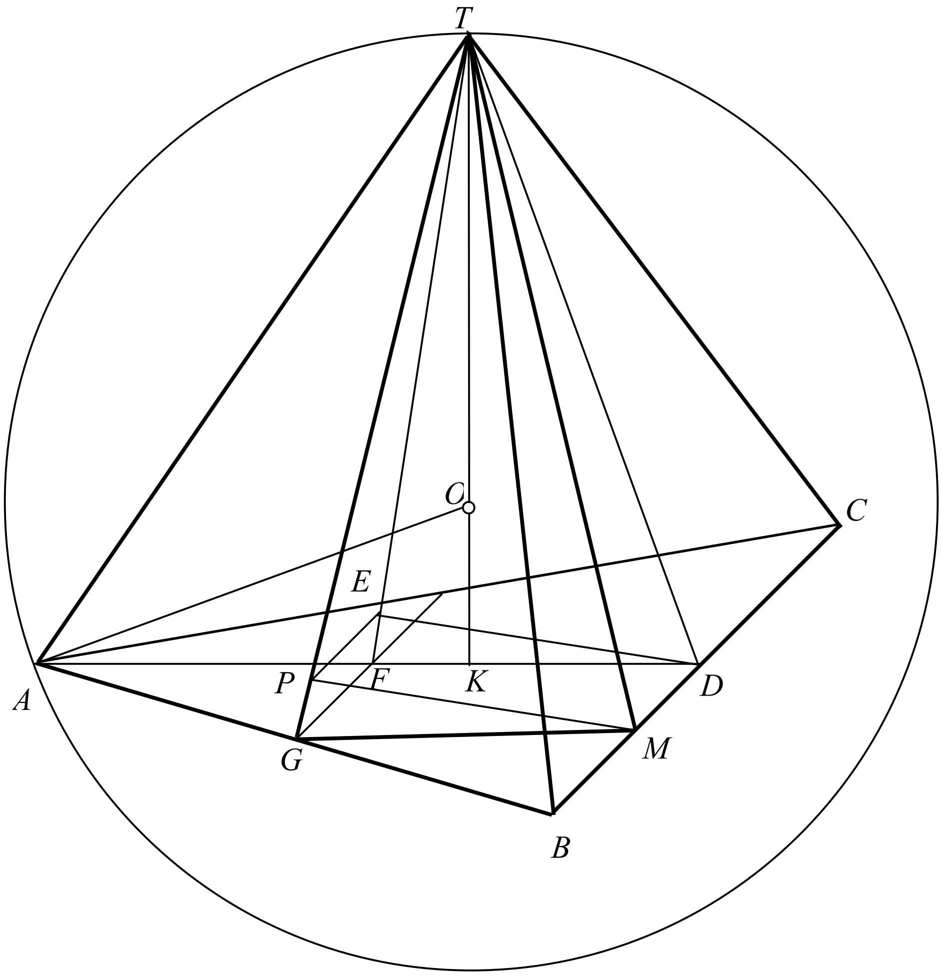
$$FT = \sqrt{KT^2 + KF^2} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{3}{12 \cdot 12}}\,a = \frac{\sqrt{11}}{4}a,\ ED = \frac{FD \cdot TK}{FT} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4R}{\sqrt{33}}.$$

$$S_{\Delta TGM} = \frac{1}{2} \cdot TG \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{11}}R^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}R^2.$$

$$ET = \sqrt{TD^2 - ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{5a}{2\sqrt{11}};\ \frac{ET}{FT} = \frac{5}{2\sqrt{11}} \cdot \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{10}{11};$$

$$PE = MD = \frac{10}{11}GF = \frac{10}{11} \cdot \frac{a}{4} = \frac{5a}{22};\ BM = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{22}\right)a = \frac{3}{11}a.\ V_{TBMG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}V_{TABC} = \frac{3}{22}V_{TABC}.$$

Отношение объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду, равно 3:19.



Пирамида – правильный тетраэдр (все его ребра равны).

$\frac{KD}{TD} = \frac{1}{3}$, $TD = 3KD = AD$, $AB = TB$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2$; $3:19$.

Статистические данные по написанию участниками олимпиады по математике заключительного этапа.

Ежегодно научно-методический отдел ведет аналитическую работу по результатам выполнения академических соревнований отборочного и заключительного этапов Олимпиады школьников «Шаг в будущее». Представленные ниже диаграммы дают представление о проценте выполнения заданий участниками олимпиады второго этапа, проводимого на базе МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2016 году и в сравнении с 2014 и 2015 годами.

Также, проанализированы олимпиады, прошедшие на базе региональных площадок в Барнауле, Заречном (Пензенская область), Кызыле (Республика Тыва), Якутске, Нижнем Новгороде и Ярославле.