ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.
2018/19 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 7, 8 и 9 классы.

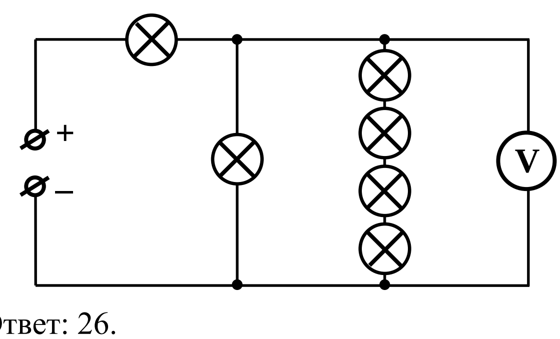
Задание отборочного этапа состояло из тестовой части I (компьютерная проверка, задачи с изменяющимися параметрами) и части II, которая проверялась жюри олимпиады.

Часть I . Тестовое задание (пример варианта).

Вопрос 1 (7 баллов):
Дон Румата Эсторский неспешно ехал по дороге на лошади со скоростью 3 м/с, когда встретил колонну арканарских гвардейцев. Согласно уставу гвардии, на марше в колонне гвардейцы всегда идут со скоростью 7,2 км/час строго на расстоянии 2 м друг от друга. Дон Румата проехал мимо колонны за 1 мин 36 с. Сколько гвардейцев было в колонне?
Ответ: 241.
Комментарий: Скорость Дона Руматы относительно колонны равна 5 м/с, поэтому длина колонны 96с×5м/с=480 м, что соответствует 240 «промежуткам» между 241 гвардейцами.

Вопрос 2 (8 баллов):
Согласно закону Фурье, количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционально разности температур по разные стороны от него и обратно пропорционально толщине слоя. Допустим, что два слоя теплоизоляции изготовлены из одного материала, но «внешний» имеет в три раза большую толщину, чем «внутренний». Между слоями – вещество, которое очень хорошо проводит тепло. Температура внутри равна $t_1 = 24°C$, а снаружи $t_2 = 4°C$. Какова температура вещества между слоями? Ответ запишите в градусах Цельсия, без указания единиц.
Ответ: 19.
Комментарий: Поскольку общий поток тепла, текущий через единицу площади, для всех слоев должен быть одинаков, то разность температур для более толстого слоя должна быть в три раза больше, чем для более тонкого (температуру «очень хорошо проводящего тепло» вещества считаем примерно одинаковой в любой точке). Значит, $t - 4°C = 3\times(24°C - t)$, откуда находим, что $t = 19°C$.

Вопрос 3 (10 баллов):
В схеме, показанной на рисунке, все шесть ламп накаливания одинаковы. Вольтметр, имеющий очень большое внутреннее сопротивление, показывает напряжение 8 В. Известно, что у ламп сопротивление зависит от температуры нити, и поэтому ток через любую из них пропорционален корню квадратному из приложенного к ней напряжения. Какое напряжение покажет вольтметр, если в этой схеме подключить его к клеммам источника? Ответ запишите в Вольтах, без указания единиц.



Ответ: 26.
Комментарий: На каждой из 4 последовательно соединенных лампах напряжение по 2 В, поэтому протекающий через них ток в 2 раза меньше, чем через лампу 1, подключенную параллельно им (на которой напряжение 8 В). Значит, ток через лампу «на входе» цепи в 1,5 раза больше, чем через лампу 1, и напряжение на ней 2,25×8 В=18 В. Напряжение на входе цепи 8 В + 18 В = 26 В.

Часть II. Возможные решения и критерии оценивания.

1. (**«Мы еще встретимся!»**) Два автомобиля ехали по МКАД в противоположных направлениях вдоль разделительной полосы с постоянными скоростями. Они встретились один раз, затем второй раз – спустя время t_1 после первого. Сразу после второй встречи тот, что ехал быстрее, увеличил свою скорость на 11%, а тот, что ехал медленнее – уменьшил свою скорость на 11%. Поэтому в третий раз они встретились спустя время t_2 после второго. Известно, что t_2 больше t_1 на 3%. Найдите отношение начальных скоростей автомобилей v_1 / v_2. Различием длин кольца для автомобилей пренебречь.

Решение:

Время между встречами автомобилей равно частному от деления длины кольца (которая, по условию, одинакова для обоих автомобилей) на скорость их сближения. Скорость сближения равна сумме скоростей автомобилей. Если большую скорость увеличить на 11%, а меньшую – уменьшить на столько же процентов, то их сумма обязательно **увеличится**. Это означает, что время между встречами **уменьшится**, что противоречит условию. Таким образом, задача не имеет решения.

Это можно подтвердить и расчетом. Пусть L – длина кольца. Тогда $t_1 = \dfrac{L}{v_1 + v_2}$.

Договоримся, что «первый» автомобиль – это тот, что ехал быстрее, то есть $\dfrac{v_1}{v_2} > 1$. Тогда после второй встречи скорости автомобилей стали равны $(1+z)\cdot v_1$ и $(1-z)\cdot v_2$. Здесь $z = 0{,}11$ задает изменение скоростей. Поэтому $t_2 = \dfrac{L}{(1+z)v_1 + (1-z)v_2}$, и можно выразить соотношение времен $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{v_1 + v_2}{(1+z)v_1 + (1-z)v_2}$, которое по условию равно $\dfrac{t_2}{t_1} = 1 + y$, где $y = 0{,}03$. Следовательно, $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{z + zy - y}{z + zy + y} < 1$, если $y > 0$. Если бы время t_2 было **меньше** t_1 на 3%, то задача имела бы решение: для $z = 0{,}11$ и $y = -0{,}03$ получим, что $\dfrac{v_1}{v_2} \approx 1{,}78 > 1$.

Ответ: задача не имеет решения.

Критерии оценивания задачи 1 («Мы еще встретимся!»).

действия	**макс. балл**
Присутствует правильное утверждение (формула), выражающее время встречи через скорость сближения	**2**
Объяснено, что скорость сближения увеличивается при указанном изменении скоростей автомобилей	**2**
Сделан вывод, что время встреч должно уменьшиться	**5**
Дан ответ, что задача не имеет решения (либо эквивалентный)	**1**
ВСЕГО	**10***

*Если участник указал на отсутствие решения, и предложил изменение условия, при котором задача будет иметь решение, и в качестве ответа привел ответ измененной задачи, то такое решение также оценивалось максимальным баллом. Если проведены правильные вычисления, и в качестве ответа предложен $\dfrac{v_1}{v_2} \approx 0{,}58$ (без указания на его противоречие с условием), то выставлялась оценка **5** баллов.

2. («**Серебро и золото**») Три одинаковых серебряных шара разместили на изолирующих подставках таким образом, что их центры образовывали правильный треугольник, соединили тонкими изолированными проводами и зарядили от источника постоянного напряжения. Потом их аккуратно разъединили, убрали провода и разнесли на расстояния, значительно превышающие их диаметр. Небольшим золотым шариком на изолирующей ручке по очереди коснулись на некоторое время каждого из трех шаров. После этого на золотом шарике, который до первого касания не был заряжен, оказался заряд $q = 15{,}5$ мкКл, а на том серебряном шаре, которого коснулись третьим – заряд $Q_3 = 62$ мкКл. Какие заряды остались на двух других серебряных шариках?

Решение:

В силу симметрии схемы зарядки очевидно, что все три серебряных шара получат одинаковый заряд. Обозначим его Q. Так как шары разнесли на большое расстояние, то влиянием двух удаленных шаров на распределение заряда между серебряным шаром и золотым шариком при контакте можно пренебречь. Тогда во всех трех случаях суммарный заряд серебряного шара и золотого шарика распределяется между ними в одном и том же отношении. Пусть α – доля общего заряда, оказывающаяся у золотого шарика. С учетом этого запишем заряды шаров после каждого соприкосновения. После первого: $q_1 = \alpha \cdot Q$ и $Q_1 = (1-\alpha)\cdot Q$. Далее заряд первого серебряного шара не изменяется, а суммарный заряд золотого шарика и второго серебряного шара равен $(1+\alpha)\cdot Q$. Поэтому после второго касания: $q_2 = \alpha(1+\alpha)\cdot Q$ и $Q_2 = (1-\alpha)(1+\alpha)\cdot Q = (1-\alpha^2)\cdot Q$. Далее заряд второго серебряного шара не изменяется. Наконец, после третьего касания (перед ним суммарный заряд золотого шарика и третьего серебряного шара равен $(1+\alpha+\alpha^2)\cdot Q$): $q_3 = \alpha(1+\alpha+\alpha^2)\cdot Q \equiv q$ и $Q_3 = (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)\cdot Q = (1-\alpha^3)\cdot Q$. Как видно из этих выражений, $\dfrac{q}{Q_3} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \dfrac{q}{Q_3+q} = 0{,}2$. Ясно, что к этому выводу можно было прийти и сразу после того, как мы договорились об определении α. Но при наличии всех формул мы можем решить задачу в общем виде. В самом деле, теперь мы можем найти начальный заряд серебряных шаров $Q = \dfrac{Q_3}{1-\alpha^3} = \dfrac{(Q_3+q)^3}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 62{,}5$ мкКл. Соответственно заряды, оставшиеся на серебряных шарах, $Q_1 = (1-\alpha)\cdot Q = \dfrac{Q_3(Q_3+q)^2}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 50$ мкКл и $Q_2 = (1-\alpha^2)\cdot Q = \dfrac{Q_3(Q_3+q)(Q_3+2q)}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 60$ мкКл.

Ответ: на двух других серебряных шариках остались заряды $Q_1 = \dfrac{Q_3(Q_3+q)^2}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 50$ мкКл и $Q_2 = \dfrac{Q_3(Q_3+q)(Q_3+2q)}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 60$ мкКл.

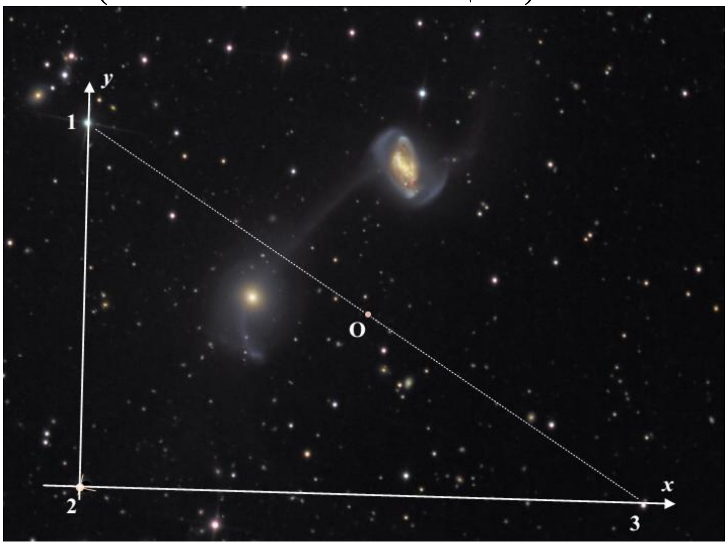
Критерии оценивания задачи 2 («Серебро и золото»).

действия	**макс. балл**
Объяснено, что три серебряных шара в результате зарядки приобрели одинаковые заряды	**2**
Правильно используется в решении большая величина расстояния между шарами после разнесения	**2**
Объяснено, что в условиях задачи суммарный заряд серебряного шара и золотого шарика распределяется между ними в одном и том же отношении при	**4**

всех касаниях	
Правильно найдена величина $\alpha = 0{,}2$	**4***
Правильно найдена величина $Q_1 = 50$ мкКл	**3***
Правильно найдена величина $Q_2 = 60$ мкКл	**3***
ВСЕГО	**18**

*Допускается решение «в числах», без получения формул в общем виде. В этом случае от максимальной оценки задачи отнимается **1** балл (оценка при правильном обоснованном решении и правильных ответах **17** баллов). При получении правильных формул и неправильных численных ответах отнимается по **1** баллу за **каждый** неправильный ответ.

3. («**Галактическая навигация**») Обитатели системы O часто совершают полеты в плоскости (xy), в которой система декартовых координат связана с тремя удачно расположенными в этой плоскости яркими объектами (обозначенными на рисунке цифрами 1,2 и 3). Расстояние между 1 и 2 $a = 60$ кпс (парсек (пс) – астрономическая единица длины 1 пс $\approx 3{,}2$ св.года $\approx 3 \cdot 10^{16}$ м), а между 2 и 3 $b = 80$ кпс, угол между осями x и y прямой, а система O лежит точно между 1 и 3. Для ориентации в данной плоскости корабли оснащены телескопами, постоянно нацеленными на объекты 1, 2 и 3, свет от которых фокусируется на фотодатчиках. Датчики отрегулированы так, что при нахождении корабля рядом с системой O их токи одинаковы и равны $I_0 = 120$ мА (ток датчика пропорционален мощности поступающего светового сигнала). Определите координаты корабля в этой системе координат, если токи датчиков равны $I_1 = 37{,}5$ мА, $I_2 = 60$ мА и $I_3 = 300$ мА. На каком расстоянии от системы O находится в этот момент корабль? Поглощением света в межзвездной среде можно пренебречь.



Решение:

Добавим третью координатную ось (z), перпендикулярную нашей плоскости. Пусть x , y и z – координаты корабля (в кпс). Тогда расстояния от корабля до ярких объектов 1,2,3 удовлетворяют соотношениям: $r_1^2 = x^2 + (a-y)^2 + z^2$, $r_2^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $r_3^2 = (b-x)^2 + y^2 + z^2$. По условию поглощением света в межзвездной среде можно пренебречь. Тогда поток энергии излучения (энергия, проходящая в единицу времени через единицу площади волнового фронта), распределяющейся на некотором расстоянии r от источника по поверхности сферы площадью $4\pi \cdot r^2$. Следовательно, мощность излучения, попадающего в «приемное окно» датчика, обратно пропорционально квадрату расстояния до соответствующего объекта. При нахождении корабля радом с системой O все три объекта находятся от него на одинаковом расстоянии $r_0 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Таким образом, ток датчика с номером i равен $I_i = I_0 \dfrac{a^2 + b^2}{4 r_i^2}$. Следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ay = r_1^2 = \dfrac{I_0}{I_1} \dfrac{a^2 + b^2}{4}$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r_2^2 = \dfrac{I_0}{I_2} \dfrac{a^2 + b^2}{4}$. Вычитая эти соотношения, находим, что $y = \frac{a}{2} + \frac{a^2 + b^2}{8a}\left(\frac{I_0}{I_2} - \frac{I_0}{I_1}\right) = 5$ кпс. Аналогично комбинируя выражение $x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - 2bx = r_3^2 = \frac{I_0}{I_3}\frac{a^2 + b^2}{4}$ с выражением для r_2^2, получим $x = \frac{b}{2} + \frac{a^2 + b^2}{8b}\left(\frac{I_0}{I_2} - \frac{I_0}{I_3}\right) = 65$ кпс. Теперь мы обнаруживаем, что наш корабль вылетел из «привычной» плоскости, так как $z^2 = \frac{I_0}{I_2}\frac{a^2 + b^2}{4} - x^2 - y^2 = 750$ кпс^2. Так как z входит в уравнения только в форме квадрата, то могут быть два возможных значения $z \approx \pm 27{,}4$ кпс. Ясно, что координаты системы О $x_0 = \frac{b}{2} = 40$ кпс и $y_0 = \frac{a}{2} = 30$ кпс. Поэтому расстояние от корабля до системы О $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} = 20\sqrt{5}$ кпс $\approx 44{,}7$ кпс.

Ответ: координаты корабля $x = 65$ кпс, $y = 5$ кпс и $z \approx \pm 27{,}4$ кпс, расстояние от корабля до системы О $r \approx 44{,}7$ кпс.

Критерии оценивания задачи 3 («Галактическая навигация»).

действия	**макс. балл**
Записаны правильные выражения для расстояний до объектов через искомые координаты корабля	**3x1=3**
Доказано, что ток мощность принимаемого датчиком излучения обратно пропорциональна квадрату расстояния до соответствующего объекта	**4**
Записаны правильные уравнения, связывающие координаты корабля с отношениями токов фотодатчиков	**3x2=6**
Правильно найдена координата $x = 65$ кпс (с ошибкой не более 0,3 кпс)	**2***
Правильно найдена координата $y = 5$ кпс (с ошибкой не более 0,2 кпс)	**2***
Обнаружено, что корабль покинул плоскость (xy)	**2***
Правильно найдена координата $z \approx \pm 27{,}4$ кпс (с ошибкой не более 0,3 кпс)	**2x1=2***
Правильно найдено расстояние $r \approx 44{,}7$ кпс (с ошибкой не более 0,5 кпс)	**1***
ВСЕГО	**22**

*Допускается решение «в числах», без получения формул в общем виде.

4. (**«Обогреватель»**) Домик гляциологов на леднике, в котором было только одно помещение, оборудовали обогревателем с автоматической регулировкой и тщательно заделали все щели: можно считать, что при закрытой двери потери тепла происходят только путем теплопроводности. Регулятор нагревательного элемента работает следующим образом: когда температура в домике падает на $2°C$ ниже «заданной» температуры, нагревательный элемент включается и работает с постоянной мощностью, зависящей только от заданной регулятору температуры. После достижения этой температуры нагревательный элемент выключается. Гляциолог, долгое время проводящий в домике, обнаружил, что при температуре на улице, равной $t_1 = -8°C$,

интервал времени между двумя включениями нагревателя равен $T_1 = 81$ мин, а при температуре $t_2 = -24°C$ этот период уже был равен $T_2 = 90$ мин. При этом регулятору постоянно задана одна и та же температура $t_0 = +24°C$. Считая, что полная теплоемкость домика с содержимым меняется слабо, и что влиянием тепла, выделяемым самим гляциологом, можно пренебречь, определите период включений нагревателя при внешней температуре $t_3 = -21°C$. При какой температуре на улице нагреватель перестанет выключаться (если не изменять регулировку)? Каков минимальный период включений нагревателя (из всех возможных при этой регулировке)?

Решение:

Пусть C – теплоемкость домика с содержимым. От момента, когда нагревательный элемент (НЭ) выключается и до его нового включения спустя время $T_{ост}$ домик отдает тепло $Q_{ост} = C \cdot \Delta t$ (здесь $\Delta t \equiv 2°C$). В тестовой части (вопрос 2) было рассказано о законе Фурье, согласно которому количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционально разности температур по разные стороны от него. Значит, мощность оттока тепла в ходе остывания при наружной температуре t равна $P_{ост} \approx A \cdot (t_0 - t)$, где A – некоторая постоянная. Здесь мы пренебрегаем изменением разности температур: для всех заданных значений t выполняется соотношение $(t_0 - t) \geq 16\Delta t$, и вносимая ошибка меньше $\frac{1}{16} \approx 6\%$. Точность можно немного повысить, если при вычислении мощности оттока тепла использовать «среднюю» разность температур – в этом случае $P_{ост} \approx A \cdot \left(t_0 - \frac{\Delta t}{2} - t\right) \equiv A \cdot (t_{ср} - t)$. Пока оставим более простое и несколько менее точное выражение. Значит, $T_{ост} \approx \frac{C \cdot \Delta t}{A(t_0 - t)}$.

Обозначив мощность нагревателя P, для времени обратного нагревания (ясно, что $Q_н = C \cdot \Delta t$) находим: $T_н \approx \frac{C \cdot \Delta t}{P - A(t_0 - t)}$. Следовательно, период включений нагревателя

$$T = T_{ост} + T_н \approx \frac{C \cdot \Delta t}{A(t_0 - t)} + \frac{C \cdot \Delta t}{P - A(t_0 - t)} = \frac{C\,\Delta t\,P}{A^2} \cdot \frac{1}{(t_0 - t)\left(\frac{P}{A} - t_0 + t\right)}.$$

Введем обозначение $t_c \equiv t_0 - \frac{P}{A}$. Нетрудно заметить, что это – такое значение внешней температуры, при котором мощности нагревателя хватает только на компенсацию оттока тепла, и нагреватель после включения удерживает температуру постоянной, но не может ее увеличить. Таким образом, при температуре снаружи, меньшей или равной t_c, нагреватель перестает выключаться. Из условия ясно, что $t_c < t_2 < 0°C$. Тогда обратный период включений (эту величину в физике называют *частотой*) оказывается квадратичной функцией внешней температуры: $\frac{1}{T} = \frac{A^2}{C\,\Delta t\,P} \cdot (t_0 - t)(t - t_c)$. График этой функции – парабола с корнями t_0 и t_c, а между ними есть точка максимума (соответствующая минимальному периоду) $t_m = \frac{t_0 + t_c}{2}$. Ясно, что $\frac{1}{T_1} = \frac{A^2}{C\,\Delta t\,P} \cdot (t_0 - t_1)(t_1 - t_c)$. Следовательно, $\frac{A^2}{C\,\Delta t\,P} = \frac{1}{T_1(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}$, то есть $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{(t_0 - t)(t - t_c)}{(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}$. Это соотношение для температуры t_2 позволяет найти t_c: $T_1(t_0 - t_1)(t_1 - t_c) = T_2(t_0 - t_2)(t_2 - t_c)$, откуда $t_c = \frac{t_2(t_0 - t_2)T_2 - t_1(t_0 - t_1)T_1}{(t_0 - t_2)T_2 - (t_0 - t_1)T_1} = -48°C$.

Теперь легко найти и остальные ответы: $T_3 = T_1 \cdot \dfrac{(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_0 - t_3)(t_3 - t_c)} = 85\dfrac{1}{3}$ мин = 85 мин 20 с.

Минимальный период соответствует $t_m = \dfrac{t_0 + t_c}{2} = -12°C$ и равен $T_m = T_1 \cdot \dfrac{4(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_0 - t_c)^2} = 80$ мин. Если перейти к уточненному результату, то формула для периода будет выглядеть так: $T = T_1 \cdot \dfrac{(t_{cp} - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_{cp} - t)(t - t_c)}$, а формула для даст значение $t_c = \dfrac{t_2(t_{cp} - t_2)T_2 - t_1(t_{cp} - t_1)T_1}{(t_{cp} - t_2)T_2 - (t_{cp} - t_1)T_1} \approx -47{,}4°C$. Таким образом, изменение результата чуть более 1%. Другие «уточненные» результаты: $T_3 = T_1 \cdot \dfrac{(t_{cp} - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_{cp} - t_3)(t_3 - t_c)} \approx 85{,}17$ мин и $T_m = T_1 \cdot \dfrac{4(t_{cp} - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_{cp} - t_c)^2} \approx 79{,}85$ мин (изменение периодов около 0,2%).

Ответ: при внешней температуре $t_3 = -21°C$ период $T_3 \approx 85{,}2$ мин, нагреватель перестанет выключаться при $t \le t_c \approx -47{,}4°C$, минимальный период включений нагревателя $T_m \approx 80$ мин.

Критерии оценивания задачи 4 («Обогреватель»).

действия	**макс. балл**
Установлено, что мощность оттока тепла пропорциональна разности внутренней и наружной температур	**2**
Записаны правильные выражения для $T_{ост}$ и $T_н$, с введением необходимых констант (C, P и A)*.	**2х3=6**
Записано выражение для периода (частоты) включений и доказано существование точек, отвечающих прекращению выключений (t_c) и минимуму периода (t_m).	**2**
Указана связь t_c, t_m и t_0	**2**
С помощью значений периода при t_1 и t_2 получена общая формула для периода	**4**
Правильно найден $T_3 \approx (85{,}2 \pm 0{,}2)$ мин***	**3****
Правильно найдена $t_c \approx (-47{,}5 \pm 0{,}5)°C$ ***	**3****
Правильно найден $T_m \approx (79{,}9 \pm 0{,}2)$ мин***	**3****
ВСЕГО	**25**

*Выражения для «приближенного» и «уточненного» подходов оцениваются одинаково.
**Допускается решение «в числах», без получения формул в общем виде.
***При непопадании в интервал начисляется **2** балла только при наличии правильной формулы, иначе баллы не начисляются.