ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ, 2018/19 учебный год.

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА.

10 и 11 классы.

Возможные решения и критерии проверки.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

Часть I (тестовое задание): пример варианта.

Вопрос 1 (7 баллов):

Цилиндрический медный стержень длиной 2 м вносят в область, где было создано электрическое поле с напряженностью 50 В/м и располагают так, что его ось составляет угол в 60° с направлением напряженности этого поля (каким оно было до внесения стержня). Найти разность потенциалов между концами стержня. Ответ запишите в Вольтах, без указания единиц измерения.

Ответ: 0.

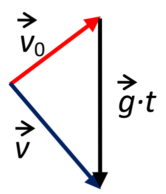
Комментарий: Разность потенциалов между двумя точками покоящегося проводника в статическом поле всегда равна нулю.

Вопрос 2 (8 баллов):

Маленький тяжелый шарик бросили с балкона под углом к горизонту со скоростью 9 м/с. Спустя время *t*, когда его скорость стала перпендикулярна исходной, она стала равна 12 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите *t*. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. Ответ запищите в секундах, без указания единиц измерения, с точностью до десятых.

Ответ: 1,5.

Комментарий: Достаточно записать в векторной форме равенство $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, а затем



«изобразить» его на векторной диаграмме. Поскольку по условию этот треугольник – прямоугольный, то $g^2t^2 = v_0^2 + v^2$, а из этого соотношения сразу получаем: $t = \dfrac{\sqrt{v_0^2 + v^2}}{g} \approx 1{,}5$ с.

Вопрос 3 (10 баллов):

Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором гелий сначала расширяется адиабатически, а затем в изобарном процессе возвращается к исходной температуре. Во всем процессе гелий совершил работу 735 Дж. Найдите работу, совершенную гелием в адиабатическом процессе. Ответ запишите в Дж, без указания единиц измерения, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

Ответ: 441.

Комментарий: Так как гелий вернулся к исходной температуре, то изменение его внутренней энергии равно нулю, и поэтому его работа во всем процессе равна полученному гелием количеству тепла. В адиабатическом процессе тепло не поступает, поэтому все 735 Дж получены гелием в изобарном процессе. Работа в изобарном процессе для одноатомного идеального газа составляет 2/5 от количества теплоты. Значит, остальные 3/5 общей работы совершены в адиабатическом процессе: 0,6×735 Дж = 441 Дж.

Часть II. *«НЕИЗВЕСТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ Д-РА Ф.Д.Ч.УИЛЛАРДА».*
Возможные решения и критерии оценивания.

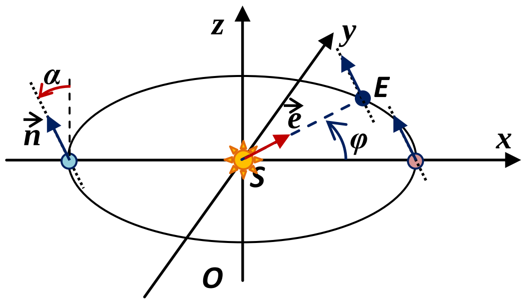
1. («**Тени на орбите**») В одном из проектов Ф.Д.Ч.Улларда, известного специалиста по криогенике, потребовалось разместить его установку на геостационарном спутнике. Так называют спутники, вращающиеся в плоскости земного экватора таким образом, что они все время находятся «над» одной точкой земной поверхности. Оборудование на спутнике работает от солнечных батарей, но поступление энергии от Солнца, конечно же, неравномерное. Энергопотребление установки было очень небольшим, поэтому ее нужно было снабдить аккумулятором, рассчитанным только на те периоды времени, когда свет от Солнца не достигает спутника. Какова может быть максимальная длительность такого периода? Какова может быть максимальная длительность периода «бесперебойного» освещения? При необходимости используйте следующие данные:

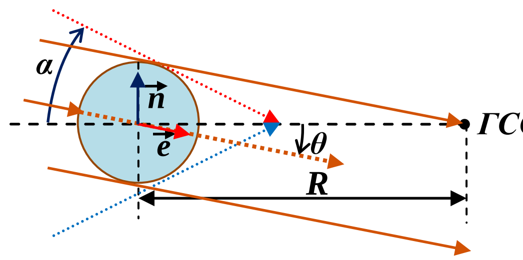
- Расстояние от Земли до Солнца меняется от $r_A \approx 152$ млн. км (от Афелия, который Земля проходит в июле) до $r_P \approx$ 147 млн. км (до Перигелия, который Земля проходит - в январе).
- Угловой размер Солнца при наблюдении с Земли $\beta \approx 32'$.
- Период обращения Земли вокруг Солнца $T_0 \approx 365{,}25$ суток.
- Радиус Земли $R_E \approx 6380$ км.
- Длительность земных суток $T = 24$ часа.
- Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g \approx 9{,}8$ м/с^2.
- Угол между осью собственного вращения Земли и перпендикуляром к плоскости орбиты движения Земли вокруг Солнца $\alpha \approx 23{,}44°$.

Решение:

Определим R – радиус орбиты ГСС. Период его обращения должен равняться земным суткам, то есть $\frac{2\pi R}{v} = T$ (v – скорость ГСС). С другой стороны, из уравнения для центростремительной компоненты ускорения спутника, которое создается силой притяжения к Земле (ее массу обозначим M) $m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$ следует, что $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

Следовательно, $R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$. С учетом того, что $\frac{GM}{R_E^2} = g$, это выражение приводится к виду $R = R_E \cdot \sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi^2 R_E}} \approx 6{,}62\,R_E \approx 42200$ км. Скорость спутника на этой орбите $v = \sqrt{\frac{gR_E^2}{R}} \approx 3{,}07$ км/с. За Землей существует область полной тени, в которую солнечные лучи не попадают. Из-за конечного размера Солнца эта область ограничена: ее длина $L_{\max} = \dfrac{2R_E}{\beta} \approx 1{,}4 \cdot 10^6$ км, что значительно больше R. Таким образом, сходимостью области земной тени в задаче о ГСС можно пренебречь (на самом деле те лучи, которые проходят у самого края Земли, испытывают преломление в земной атмосфере, что значительно сокращает размеры области полной тени, но она все равно остается достаточно велика). Но ГСС далеко не всегда проходит через эту область – ведь его орбита лежит в экваториальной плоскости Земли, которая наклонена по отношению к плоскости земной орбиты. Этот угол, как видно из рисунка слева, постоянно изменяется: ось вращения Земли сохраняет





постоянное направление в пространстве (вдоль этой оси направлен вектор $\vec{n}$ с единичной длиной), и в процессе движения Земли по орбите Солнце оказывается то «выше», то «ниже» экваториальной плоскости по отношению к $\vec{n}$. Например, вблизи положения летнего солнцестояния солнечные лучи падают «сверху» под углом α к экваториальной плоскости. Тогда область тени закрывает точки экваториальной плоскости на расстоянии не более $R_1 = \dfrac{R_E}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}51 R_E \approx 16000$ км от центра Земли. Значит, в этот период ГСС при движении по своей орбите не проходит через область полной тени. Аналогично обстоит дело вблизи положения зимнего солнцестояния. Однако есть моменты, когда Солнце оказывается вблизи экваториальной плоскости, и тогда на ГСС происходят солнечные затмения, создаваемые Землей. Понятно, что длительность затмений максимальна, когда Солнце попадает точно в экваториальную плоскость. Тогда ГСС преодолевает область полной тени, ширина которой практически равна земному диаметру. Если пренебречь кривизной орбиты ГСС на этом участке (длина орбиты ГСС больше диаметра Земли более чем в 20 раз), то максимальное время затмения $\tau_{\max} \approx \dfrac{2R_E}{v} \approx 69{,}2$ мин. Учет кривизны орбиты незначительно изменяет результат ($\tau_{\max} \approx \dfrac{2R}{v} \arcsin\left(\dfrac{R_E}{R}\right) \approx 69{,}4$ мин). Теперь определим периоды, когда затмений не бывает. Как видно из правого рисунка, ГСС проходит через область полной тени, если угол между солнечными лучами и экваториальной плоскостью $|\theta| < \gamma = \arcsin\left(\dfrac{R_E}{R}\right) \approx 8{,}7^\circ$. Введем в Солнечной Системе декартовы координаты: плоскость (xy) – плоскость земной орбиты, причем ось x проходит через положения солнцестояний. Тогда единичный вектор, направленный вдоль оси вращения Земли, имеет координаты $\vec{n} = (-\sin(\alpha), 0, \cos(\alpha))$. Введем еще один вектор с единичной длиной ($\vec{e}$, см. левый рисунок) – направленный вдоль радиуса орбиты Земли. Нетрудно заметить, что его координаты $\vec{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$, где φ – угол поворота Земли от положения летнего солнцестояния.

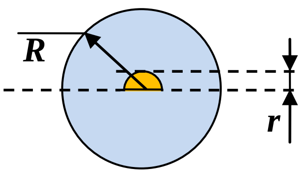
Как видно из правого рисунка, угол между этими векторами равен $90° + \theta$. Значит, $\sin(\theta) = -\cos(90° + \theta) = -\vec{n} \cdot \vec{e} = \sin(\alpha)\cos(\varphi)$. Поэтому условием прохождения через область полной тени является требование $\sin(\alpha)\,|\cos(\varphi)| < \frac{R_E}{R}$, то есть $|\cos(\varphi)| < \frac{R_E}{R\sin(\alpha)} \approx 0{,}380$. Значит, в течении года есть два «периода без затмений», длительность которых $t \approx \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{R_E}{R\sin(\alpha)}\right) \cdot T_0 \approx 137$ суток. Изменение расстояния между Солнцем и Землей и изменение ориентации орбиты ГСС по отношению к Солнцу в течении года, конечно же, влияют на поток солнечной энергии, падающей на спутник, однако для нашего исследования (в котором нас интересует только то, попадает ли в принципе солнечный свет на спутник или нет) эти факторы оказались несущественными.

Ответы: 69 минут, 137 суток.

Критерии оценивания задачи 1 («тени на орбите»).

действия	**макс. балл**
Найден радиус орбиты ГСС и скорость на этой орбите	**2**
Проведен анализ размеров о формы области полной тени за Землей	**1**
Используется утверждение о постоянстве ориентации земной оси	**1**
Отмечено, что область тени перемещается по отношению к экваториальной плоскости Земли	**3**
Указано, что длительность затмения максимальна, когда Солнце попадает в экваториальную плоскость Земли	**2**
Правильно найдена максимальная длительность затмения (диапазон 68-71 мин)	**3**
Правильно записано условия прохождения орбиты ГСС через область тени	**2**
Правильно описано изменение угла между солнечными лучами и экваториальной плоскостью	**4**
Правильно найдена длительность периода без затмений (137 ± 3 сут)	**2**
ВСЕГО	**20**

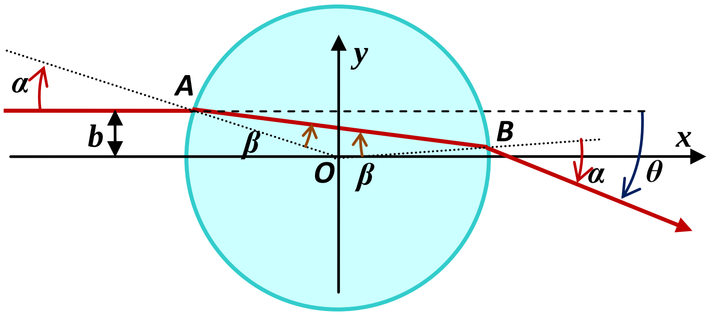
2. («**Лазерный пинцет**») Однажды в ходе эксперимента д-ру Уилларду было необходимо «подвесить» прозрачный шарик радиусом $R = 1{,}2$ мкм с массой $m = 10^{-12}$ г. Для этого он решил использовать два встречных лазерных пучка специального сечения – в виде

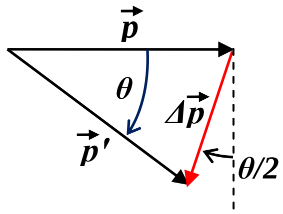


полукруга радиусом $r = 0{,}2$ мкм (см. рисунок). Они направлялись на шарик с двух сторон по центру шарика точно над его горизонтальным сечением. Показатель преломления вещества шарика $n = 2{,}5$, отражением света от его поверхности и поглощением света внутри можно пренебречь. Какой должна быть мощность пучков для удержания шарика? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2, скорость света $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. В квантовой теории свет можно рассматривать как поток фотонов – частиц, у которых энергия и импульс связаны соотношением $E = c \cdot |\vec{p}|$.

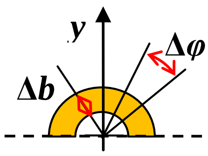
Решение:

Рассмотрим прохождение лучей через шарик. Пусть луч, падающий на поверхность шарика в точке A (см. рисунок), идет на расстоянии b от параллельной ему прямой, идущей через





центр шарика, в плоскости (xy). Тогда угол падения равен $\alpha = \arcsin\left(\frac{b}{R}\right)$, а угол преломления $\beta = \arcsin\left(\frac{b}{nR}\right)$. Поскольку треугольник AOB равнобедренный, то угол падения луча на поверхность шара изнутри равен β, а угол преломления (то есть выхода по отношению к радиусу в точке B) равен α. Нетрудно заметить, что общий угол поворота луча от исходного направления равен $\theta = 2(\alpha - \beta) = 2\left[\arcsin\left(\frac{b}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{b}{nR}\right)\right]$. Если рассматривать свет как поток фотонов, то следует сделать вывод, что их энергия не изменяется (в веществе шара нет поглощения). Следовательно, не изменяется и модуль импульса. Но тогда изменение импульса каждого фотона, прошедшего через шарик, будет равно $|\Delta\vec{p}| = 2|\vec{p}|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\frac{E}{c}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Проекция этого импульса на ось y, перпендикулярную первоначальному направлению движению, равна $\Delta p_y = -|\Delta\vec{p}|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{E}{c}\sin(\theta)$, и поэтому шарик при прохождении одного фотона получит импульс отдачи, проекция которого на ось y $\Delta p'_y = +\frac{E}{c}\sin(\theta)$. Отметим, что при $b << R$ эти выражения упрощаются: $\theta \approx \frac{2(n-1)}{nR}b$ и $\Delta p'_y \approx +\frac{E}{c}\cdot\frac{2(n-1)}{nR}b$. Теперь обратим



внимание, что энергия светового потока в пучке равномерно распределена по площади полукруга , то есть на единицу площади в единицу времени приходится энергия $\frac{2P}{\pi r^2}$, где P – мощность светового пучка. Рассмотрим малую часть площади пучка, ограниченную интервалом значений расстояния от оси $(b, b+\Delta b)$ и интервалом значений угла φ, отсчитываемого от оси y, $(\varphi, \varphi+\Delta\varphi)$. Энергия, приходящаяся на эту часть в единицу времени, равна $\frac{2P}{\pi r^2}\cdot b\Delta\varphi\cdot\Delta b$. Ясно также, что проекция импульса отдачи, переданного от этой части светового пучка шарику в единицу времени, на ось , равна $\Delta F_y = \frac{1}{c}\frac{2(n-1)}{nR}b\frac{2P}{\pi r^2}\cdot b\Delta\varphi\cdot\Delta b\cdot\cos(\varphi)$.(сила как раз и равна импульсу, передаваемому в единицу времени). Осталось понять, что у двух встречных пучков x–компоненты сил сократятся (как и компоненты вдоль направления, перпендикулярного x и y), а y–

компоненты удвоятся. Тогда ясно, что вклад в общую силу, действующую на шарик по оси y, от этой части площади пучков, равен $\Delta F_y = \frac{8(n-1)P}{\pi cnR}\frac{b^2}{r^2}\cdot\Delta b\cdot\cos(\varphi)\Delta\varphi$. Сумма по всем возможным значениям $0 \le b \le r$ и $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le +\frac{\pi}{2}$ дает: $\sum b^2\Delta b = \frac{1}{3}\sum\Delta(b^3) = \frac{r^3}{3}$ и $\sum\cos(\varphi)\Delta\varphi = \sum\Delta[\sin(\varphi)] = 2$ (участники, знакомые с интегрированием, могут выполнить эту часть с помощью него). Итак, результирующая сила направлена перпендикулярно пучкам и равна $F_y = \frac{16(n-1)r}{3\pi cnR}P$. Чтобы она уравновесила вес шарика, должно выполняться равенство $mg = \frac{16(n-1)r}{3\pi cnR}P$, откуда находим: $P = \frac{3\pi cnR}{16(n-1)r}mg \approx 18$ мкВт.

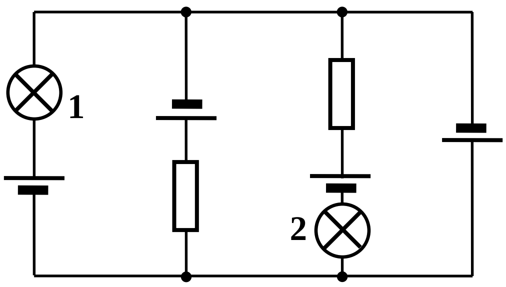
Ответ: $P = \frac{3\pi cnR}{16(n-1)r}mg \approx 18$ мкВт.

Критерии оценивания задачи 2 («лазерный пинцет»).

действия	**макс. балл**
Идея о том, что сила появляется из-за поворота потока импульса пуска при преломлении	**3**
Используется правильная связь мощности с плотностью потока импульса (есть формула типа «поток импульса=P/площаль/с»)	**3**
Правильно описан ход лучей в шаре	**2**
Правильно вычислен угол отклонения луча	**2**
Получена правильная формула изменения импульса (модуль, вектор, проекция)	**2**
Правильно вычислена сила (если ошибка в интегрировании, или в проецировании, или сила вычислена по «среднему значению, без суммирования вкладов от разных участков – **2** балла)	**5**
Получена правильная формула для мощности (если те же недостатки – **1** балл)	**2**
Правильный численный ответ (от 17 до 19 мкВт)	**1**
ВСЕГО	**20**

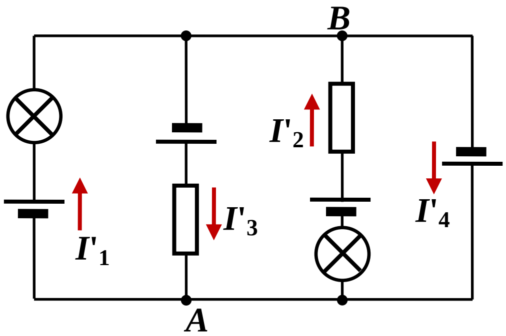
Комментарий: Данные этой задачи не совсем реалистичны: создание пучков с таким сечением в области расположения шарика технически проблематично. Для этого как минимум нужно использовать лазер с длиной волны, намного меньше 0,2 мкм (за пределами оптического диапазона). Само вещество имеет низкую плотность и высокий для такого излучения коэффициент преломления. На самом деле подбор параметров был осуществлен таким образом, чтобы у участников была возможность воспользоваться параксиальным приближением с высокой точностью, и избежать вычисления сложного интеграла (некоторые участники, впрочем, сумели справиться с интегрированием и без использования условия малости углов). В реальности анализ работы лазерного пинцета проводится несколько сложнее, но сама идея его реалистична – такие установки действительно используются и в научном эксперименте, и в прикладных разработках, особенно в медико-биологической области. В 2018 году за создание лазерного пинцета Артур Ашкин получил Нобелевскую премию по физике.

3. («**Нелинейный светильник**») Как-то на досуге Ф.Д.Ч.Уиллард решил собрать светильник из двух одинаковых ламп, двух одинаковых резисторов и четырех одинаковых аккумуляторов. У него был довольно точный амперметр, и он измерил силу тока в цепи при подключении одной лампы к одному аккумулятору. Она оказалась равной $I_1 = 1{,}50$ А. Затем он измерил силу тока аккумулятора при подключении к нему двух ламп, соединенных параллельно. Теперь сила тока оказалась равна $I_2 = 2{,}40$ А. Наконец, он измерил силу тока в цепи из одного аккумулятора и одного резистора: она была равна $I_0 = 0{,}40$ А. Тогда исследователь собрал светильник по схеме, показанной на рисунке. Во сколько раз отличались в нем мощности потребления ламп 1 и 2? Известно, что у этих ламп сила тока пропорциональна корню квадратному из приложенного напряжения. Получите в ответе численное значение, добившись максимальной возможной точности (ошибка показаний амперметра – половина единицы последнего указанного разряда).



Решение:

Начнем с того, как нужно использовать данные задачи. Пусть $\mathcal{E}$ и r – ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора, а R – сопротивление резистора. Согласно условию, напряжение на лампе можно связать с протекающим через нее током соотношением $U = \alpha \cdot I^2$, где α – постоянный коэффициент. Тогда при подключении одной лампы $\mathcal{E} - I_1 r = \alpha \cdot I_1^2$, а при подключении двух $\mathcal{E} - I_2 r = \alpha \cdot \left(\frac{I_2}{2}\right)^2$. Разделив эти уравнения одно на другое, найдем, что $\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 (4I_1 - I_2)}{(2I_1 - I_2)(2I_1 + I_2)} r \equiv \bar{I}\, r$. Подставив значения I_1 и I_2, найдем, что $\bar{I} = 4{,}00$ А. Тогда для подключения резистора: $\mathcal{E} = I_0(r + R) = \bar{I} r$, то есть $R = \frac{\bar{I} - I_0}{I_0} r = 9r$. Теперь, используя найденные отношения, запишем уравнения закона Ома для схемы светильника вместе с уравнением непрерывности тока. При этом обозначим токи в ветвях так, как показано на рисунке, и обозначим разность потенциалов точек A и B $\varphi_A - \varphi_B \equiv U$. Тогда:



$$\begin{cases} U = -\bar{I} \cdot r + I_1' \cdot r + \alpha \cdot I_1'^2 \\ U = -\bar{I} \cdot r + I_2' \cdot 10r + \alpha \cdot I_2'^2 \\ U = \bar{I} \cdot r - I_3' \cdot 10r \\ U = \bar{I} \cdot r - I_4' \cdot r \\ I_1' + I_2' = I_3' + I_4' \end{cases}$$

Эта система уравнений позволяет найти все неизвестные, но при аналитическом решении она приводит к уравнению высокой степени, поэтому лучше ее решать именно «в числах». Для этого введем безразмерные переменные $x_i \equiv \frac{I_i'}{\bar{I}}$, $i = 1,2,3,4$ и $u \equiv \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{U}{\bar{I} r}$. Учтем также, что $\alpha = \frac{\bar{I} - I_1}{I_1^2} r = \frac{\bar{I}(\bar{I} - I_1)}{I_1^2} \frac{r}{\bar{I}} = \frac{40}{9} \frac{r}{\bar{I}}$. Тогда наша система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} x_1^2+\dfrac{9}{40}x_1-\dfrac{9}{40}(1+u)=0 \\ x_2^2+\dfrac{9}{4}x_2-\dfrac{9}{40}(1+u)=0 \\ x_3=0{,}1-0{,}1u \\ x_4=1-u \\ x_1+x_2=x_3+x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{8}{9}[-0{,}1+\sqrt{0{,}01+z}\,] \\ x_2=\dfrac{8}{9}[-1+\sqrt{1+z}\,] \\ z=\dfrac{8}{45}(1+u) \\ \sqrt{1+z}+\sqrt{0{,}01+z}=\dfrac{55}{18}-\dfrac{11}{2}z \end{cases}.$$

Теперь все свелось к решению последнего уравнения для переменной z, а затем через нее выражаются токи через обе лампы. Его можно решить графически, но проще решить его численно – например, с помощью программы Excel, вычислив в соседних колонках значения правой и левой частей уравнения. Тогда найдем, что $z \approx 0{,}25760 \pm 0{,}00001$. Сам по себе корень можно найти и с большей точностью, но это не имеет особого смысла – токи измерены с точностью около 1%, так что мы и так сохранили два «запасных» порядка для промежуточных вычислений. Теперь легко можно найти, что $x_1 \approx 0{,}46947 \pm 0{,}00001$ и $x_2 \approx 0{,}13661 \pm 0{,}00001$ (и здесь указаны ошибки <u>вычислений</u> при решении уравнений). Как видно, точность результатов при таком подходе определяется в основном точностью данных измерений. Поэтому для величин токов через лампы (в этих выражениях будем указывать реальную точность) следует принять $I_1' \approx (1{,}878 \pm 0{,}005)$ A и $I_2' \approx (0{,}546 \pm 0{,}005)$ A. Мощность, потребляемая лампой $P = U(I)\cdot I = \alpha \cdot I^3$, и поэтому $\dfrac{P_1}{P_2} = \left(\dfrac{I_1'}{I_2'}\right)^3 = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3 \approx 40{,}6 \pm 1{,}1$. Здесь важно понимать, что относительная ошибка в этом результате увеличивается: как видно, само отношение мы находим с точностью чуть лучше 1%, поэтому его куб мы получаем с точностью чуть лучше 3%, поскольку при малых отклонениях $\dfrac{\Delta(a^3)}{a^3} \approx 3\dfrac{\Delta a}{a}$.

Ответ: $\dfrac{P_1}{P_2} \approx 40{,}6 \pm 1{,}1$.

Критерии оценивания задачи 3 («нелинейный светильник»).

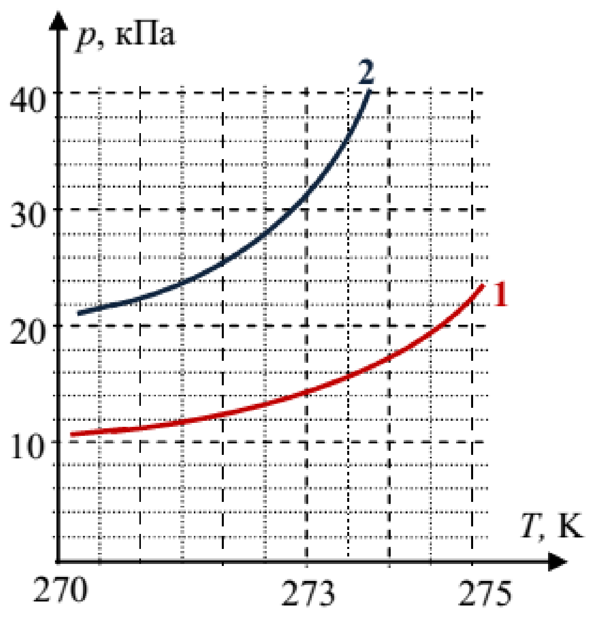
действия	**макс. балл**
Правильно записаны соотношения, позволяющие использовать заданные результаты измерений (по **1** баллу за каждое)	**3**
Правильно записана ПОЛНАЯ система уравнений, из которых токи через лампы могут быть выражены через заданные токи: уравнения Кирхгофа, закона Ома и т.д. (при неполной системе за каждое недостающее уравнение – **1** балл)*	**4**
Система сведена к одному (двум) уравнению(-ям), которое(-ые) может(-гут) быть решено(-ы) графически или численно**	**2**
Предложен и реализован путь решения, приведший к правильному решению этого уравнения (уравнений)**	**2**
Установлено, что отношение мощностей равно кубу отношения токов	**1**
Получен правильный численный ответ (от 40 до 41, если попадание только в интервал от 39,5 до 41,5 – **1** балл)	**2**
Предложена разумная оценка точности результата	**1**

ВСЕГО	**15**

*в целом предполагается, что полная система содержит 5 уравнений для 5 неизвестных: например (как в приведенном варианте) это 4 тока в ветвях и напряжение $\varphi_A - \varphi_B \equiv U$, или это может быть система 4 уравнений Кирхгофа для 4 контурных токов, в которой 5-е засчитывается, хотя и явно не написано (уравнение непрерывности тока в этом случае выполняется автоматически); таким образом за **одно** правильное уравнение, не включенное ни в какую систему (и «автоматически» выполненные требования отсутствуют), баллы не ставились.

**участник мог не сводить явно систему к одному уравнению, а свести ее к двум или даже трем, которые он будет решать графически или численно, и если на своем (пусть, возможно, и менее удобном для вычислений) пути он достиг цели (нашел правильное решение), то баллы за эти пункты ставятся полностью; однако в случае, когда построить правильное решение не удалось, баллы за первый из этих пунктов ставятся только, если получено одно уравнение или два, которые могут быть решены совместно; если правильное численное решение построенной системы приведено, но не указан метод его получения (нет ни графика, ни ссылки на численный метод или использованную программу), то баллы за второй из этих пунктов не ставились!

4. («**Смесь паров**») В лабораторных журналах Ф.Д.Ч. Уилларда был найден отчет об одном интересном эксперименте. В нем исследовалось поведение давления смеси сухого воздуха и паров двух довольно необычных синтезированных исследователем веществ при изменении объема смеси. На рисунке показаны зависимости давлений насыщенных паров этих веществ от температуры (в той области значений температуры, в которой проводились исследования). В качестве примера ниже приведена таблица значений давления смеси в сосуде под поршнем при разных объемах для некоторой постоянной температуры. В журнале отмечено, что «полученная в этом опыте изотерма обладает интересной особенностью – на ней заметен только один излом, положение которого отмечено в таблице "звездочкой"». Определите температуру изотермы и вычислите количества веществ 1 и 2 в смеси.



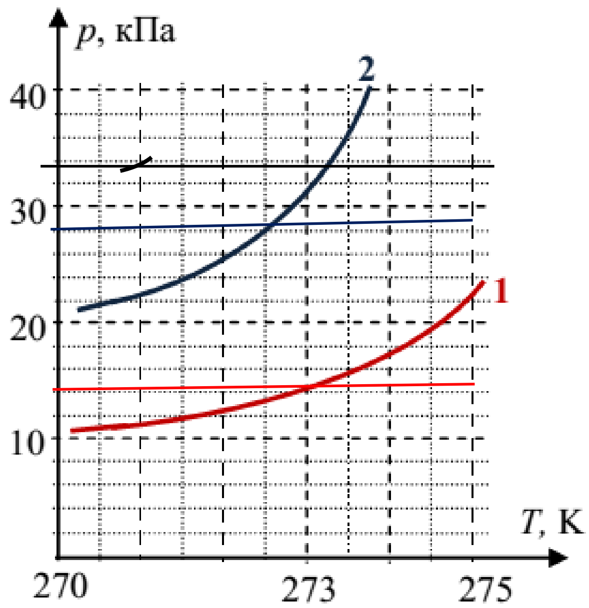
Найдите, до какой температуры нужно нагреть смесь при объеме 40 л, чтобы в ней не осталось жидких компонент. Известно, что в жидком состоянии эти вещества не смешиваются. Опыт проводился в невесомости, и никакие из компонент смеси не покидали сосуда.

Таблица:

V, л	30,0	40,0	50,0*	60,0	70,0
p, кПа	127,61	104,16	90,08	75,07	64,34

Решение:

Давление смеси создается суммой парциальных давлений сухого воздуха и паров веществ. Обозначим ν – количество сухого воздуха в смеси, ν_1 и ν_2 – количества веществ 1 и 2. Тогда, пока оба вещества находятся только в газообразном состоянии, давление равно $p = (\nu + \nu_1 + \nu_2)\dfrac{RT}{V}$. Точка излома на изотерме паровоздушной смеси появляется, когда пар начинает конденсироваться (до этого изотерма – гладкая гипербола). Единственность излома означает, что оба вещества начинают конденсироваться одновременно, то есть парциальное давление каждого из них становится равным давлению насыщенного пара при одном и том же значении объема. Значит, в точке излома $p_0V_0 = (\nu + \nu_1 + \nu_2)RT = \nu RT + p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 – давления насыщенных паров 1 и 2 при температуре T. Кроме того, $\dfrac{RT}{V_0} = \dfrac{p_1}{\nu_1} = \dfrac{p_2}{\nu_2} \Rightarrow \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}$. Запишем выражение для давления при значении объема $V_A < V_0$: $p_A = p_1 + p_2 + \dfrac{\nu RT}{V_A}$. Исключая из этого выражения и уравнения $p_0 = p_1 + p_2 + \dfrac{\nu RT}{V_0}$ значение νRT, получим: $p_1 + p_2 = \dfrac{p_0V_0 - p_AV_A}{V_0 - V_A}$. Например, для $V_A = 30$ л найдем, что $p_1 + p_2 = \dfrac{p_0V_0 - p_AV_A}{V_0 - V_A} \approx 33{,}785$ кПа. Аналогично для $V_B = 40$ л $p_1 + p_2 \approx 33{,}76$ кПа, и для большей точности возьмем среднее этих значений: $p_1 + p_2 \approx 33{,}77$ кПа. Теперь мы можем воспользоваться графиком давлений насыщенных паров: температура изотермы соответствует температуре, при которой сумма этих давлений равна найденному значению. Кривую зависимости $p_1 + p_2$ от температуры можно строить «поточечным» суммирований значений давлений. Тогда можно заметить, что с неплохой точностью нам подходит $T \approx 271{,}0$ К. Отметим, что при этом значении температуры $p_1 \approx 11{,}26$ кПа и $p_2 \approx 22{,}51$ кПа (конечно, последний разряд здесь указан «про запас» – реальная точность позволяет уверенно находить значения с точностью не выше $\pm 0{,}2$ кПа). Как видно, $\dfrac{p_2}{p_1} \approx 2{,}0$. Значит,



$\dfrac{\nu_2}{\nu_1} \approx 2{,}0$. Это значение при аккуратной работе может быть определено с точностью около 3%. Кроме того, теперь мы можем определить $\nu_1 = \dfrac{p_1V_0}{RT} \approx 0{,}25$ моля и $\nu_2 \approx 0{,}50$ моля. При температуре изотермы и объеме $V_B = 40$ л оба вещества частично сконденсированы, и для их полного испарения температуру нужно повысить, чтобы давление каждой компоненты стало меньше или равно давлению насыщенного пара. Значит, для определения минимальной необходимой температуры нам нужно решить уравнение $\dfrac{\nu RT}{V_B} = p_H(T)$. Это можно сделать графически (построив на графике для каждого вещества прямую $p = \frac{\nu RT}{V_B}$ и найдя ее пересечение с $p_H(T)$ – см. построение на графике) или численно, сняв зависимость $p_H(T)$ и вычислив величину $\frac{p_H(T)}{T}$, а затем найти точку, где она равна $\frac{\nu R}{V_B}$. Как видно, в ходе изохорического нагревания при объеме $V_B = 40$ л вещество 2 полностью испарится при температуре $T_2 \approx 272{,}6$ К, а вещество 1 – при $T_1 \approx 273{,}0$ К. Значит, для полного испарения обеих компонент нужно нагреть смесь до 273 К.

Ответы: температура изотермы $T \approx 271$К, количества веществ $\nu_1 \approx 0{,}25$ моля и $\nu_2 \approx 0{,}50$ моля, для полного испарения обеих жидких компонент в объеме 40л нужно нагреть смесь до температуры $T_1 \approx 273$К.

Критерии оценивания задачи 4 («смесь паров»).

действия	**макс. балл**
Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона для точки излома и при меньшем объеме	**2**
Используется идея о том, что конденсация двух паров началась одновременно	**4**
Правильно вычислена p_1+p_2	**2**
Правильно определена температура изотермы (271±0,1)К (если попадание только в (271±0,3)К – **1** балл)	**4**
Правильно найдено ν_1 (0,25±0,05)моля	**2**
Правильно найдено ν_2 (0,50±0,05)моля	**2**
Записано правильное уравнение (выполнено правильное построение) для определения температуры полного испарения	**2**
Найдена температура полного испарения (273±0,2)К (если попадание только в (273±0,4)К – **1** балл)	**2**
ВСЕГО	**20**

7, 8 и 9 классы.

Возможные решения и критерии проверки.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

Часть I . Тестовое задание: пример варианта.

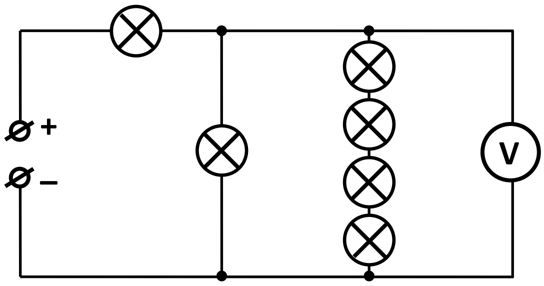
Вопрос 1 (7 баллов):
Дон Румата Эсторский неспешно ехал по дороге на лошади со скоростью 3 м/с, когда встретил колонну арканарских гвардейцев. Согласно уставу гвардии, на марше в колонне гвардейцы всегда идут со скоростью 7,2 км/час строго на расстоянии 2 м друг от друга. Дон Румата проехал мимо колонны за 1 мин 36 с. Сколько гвардейцев было в колонне?

Ответ: 241.

Комментарий: Скорость Дона Руматы относительно колонны равна 5 м/с, поэтому длина колонны 96с×5м/с=480 м, что соответствует 240 «промежуткам» между 241 гвардейцами.

Вопрос 2 (8 баллов):
Согласно закону Фурье, количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционально разности температур по разные стороны от него и обратно пропорционально толщине слоя. Допустим, что два слоя теплоизоляции изготовлены из одного материала, но «внешний» имеет в три раза большую толщину, чем «внутренний». Между слоями – вещество, которое очень хорошо проводит тепло. Температура внутри равна $t_1 = 24°C$, а снаружи $t_2 = 4°C$. Какова температура вещества между слоями? Ответ запишите в градусах Цельсия, без указания единиц.
Ответ: 19.
Комментарий: Поскольку общий поток тепла, текущий через единицу площади, для всех слоев должен быть одинаков, то разность температур для более толстого слоя должна быть в три раза больше, чем для более тонкого (температуру «очень хорошо проводящего тепло» вещества считаем примерно одинаковой в любой точке). Значит, $t - 4°C = 3\times(24°C - t)$, откуда находим, что $t = 19°C$.

Вопрос 3 (10 баллов):
В схеме, показанной на рисунке, все шесть ламп накаливания одинаковы. Вольтметр, имеющий очень большое внутреннее сопротивление, показывает напряжение 8 В. Известно, что у ламп сопротивление зависит от температуры нити, и поэтому ток через любую из них пропорционален корню квадратному из приложенного к ней напряжения. Какое напряжение покажет вольтметр, если в этой схеме подключить его к клеммам источника? Ответ запишите в Вольтах, без указания единиц.



Ответ: 26.
Комментарий: На каждой из 4 последовательно соединенных лампах напряжение по 2 В, поэтому протекающий через них ток в 2 раза меньше, чем через лампу 1, подключенную параллельно им (на которой напряжение 8 В). Значит, ток через лампу «на входе» цепи в 1,5 раза больше, чем через лампу 1, и напряжение на ней 2,25×8 В=18 В. Напряжение на входе цепи 8 В + 18 В = 26 В.

Часть II. Возможные решения и критерии оценивания.

1. («**Мы еще встретимся!**») Два автомобиля ехали по МКАД в противоположных направлениях вдоль разделительной полосы с постоянными скоростями. Они встретились один раз, затем второй раз – спустя время t_1 после первого. Сразу после второй встречи тот, что ехал быстрее, увеличил свою скорость на 11%, а тот, что ехал медленнее – уменьшил свою скорость на 11%. Поэтому в третий раз они встретились спустя время t_2 после второго.

Известно, что t_2 больше t_1 на 3%. Найдите отношение начальных скоростей автомобилей v_1 / v_2. Различием длин кольца для автомобилей пренебречь.

Решение:

Время между встречами автомобилей равно частному от деления длины кольца (которая, по условию, одинакова для обоих автомобилей) на скорость их сближения. Скорость сближения равна сумме скоростей автомобилей. Если большую скорость увеличить на 11%, а меньшую – уменьшить на столько же процентов, то их сумма обязательно **увеличится**. Это означает, что время между встречами **уменьшится**, что противоречит условию. Таким образом, задача не имеет решения.

Это можно подтвердить и расчетом. Пусть L – длина кольца. Тогда $t_1 = \frac{L}{v_1 + v_2}$.

Договоримся, что «первый» автомобиль – это тот, что ехал быстрее, то есть $\frac{v_1}{v_2} > 1$. Тогда после второй встречи скорости автомобилей стали равны $(1+z)\cdot v_1$ и $(1-z)\cdot v_2$. Здесь $z = 0{,}11$ задает изменение скоростей. Поэтому $t_2 = \frac{L}{(1+z)v_1 + (1-z)v_2}$, и можно выразить соотношение времен $\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_1 + v_2}{(1+z)v_1 + (1-z)v_2}$, которое по условию равно $\frac{t_2}{t_1} = 1 + y$, где $y = 0{,}03$. Следовательно, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{z + zy - y}{z + zy + y} < 1$, если $y > 0$. Если бы время t_2 было **меньше** t_1 на 3%, то задача имела бы решение: для $z = 0{,}11$ и $y = -0{,}03$ получим, что $\frac{v_1}{v_2} \approx 1{,}78 > 1$.

Ответ: задача не имеет решения.

Критерии оценивания задачи 1 («Мы еще встретимся!»).

действия	**макс. балл**
Присутствует правильное утверждение (формула), выражающее время встречи через скорость сближения	**2**
Объяснено, что скорость сближения увеличивается при указанном изменении скоростей автомобилей	**2**
Сделан вывод, что время встреч должно уменьшиться	**5**
Дан ответ, что задача не имеет решения (либо эквивалентный)	**1**
ВСЕГО	**10***

*Если участник указал на отсутствие решения, и предложил изменение условия, при котором задача будет иметь решение, и в качестве ответа привел ответ измененной задачи, то такое решение также оценивалось максимальным баллом. Если проведены правильные вычисления, и в качестве ответа предложен $\frac{v_1}{v_2} \approx 0{,}58$ (без указания на его противоречие с условием), то выставлялась оценка **5** баллов.

2. (**«Серебро и золото»**) Три одинаковых серебряных шара разместили на изолирующих подставках таким образом, что их центры образовывали правильный треугольник, соединили тонкими изолированными проводами и зарядили от источника

постоянного напряжения. Потом их аккуратно разъединили, убрали провода и разнесли на расстояния, значительно превышающие их диаметр. Небольшим золотым шариком на изолирующей ручке по очереди коснулись на некоторое время каждого из трех шаров. После этого на золотом шарике, который до первого касания не был заряжен, оказался заряд $q = 15{,}5$ мкКл, а на том серебряном шаре, которого коснулись третьим – заряд $Q_3 = 62$ мкКл. Какие заряды остались на двух других серебряных шариках?

Решение:

В силу симметрии схемы зарядки очевидно, что все три серебряных шара получат одинаковый заряд. Обозначим его Q. Так как шары разнесли на большое расстояние, то влиянием двух удаленных шаров на распределение заряда между серебряным шаром и золотым шариком при контакте можно пренебречь. Тогда во всех трех случаях суммарный заряд серебряного шара и золотого шарика распределяется между ними в одном и том же отношении. Пусть α – доля общего заряда, оказывающаяся у золотого шарика. С учетом этого запишем заряды шаров после каждого соприкосновения. После первого: $q_1 = \alpha \cdot Q$ и $Q_1 = (1-\alpha)\cdot Q$. Далее заряд первого серебряного шара не изменяется, а суммарный заряд золотого шарика и второго серебряного шара равен $(1+\alpha)\cdot Q$. Поэтому после второго касания: $q_2 = \alpha(1+\alpha)\cdot Q$ и $Q_2 = (1-\alpha)(1+\alpha)\cdot Q = (1-\alpha^2)\cdot Q$. Далее заряд второго серебряного шара не изменяется. Наконец, после третьего касания (перед ним суммарный заряд золотого шарика и третьего серебряного шара равен $(1+\alpha+\alpha^2)\cdot Q$): $q_3 = \alpha(1+\alpha+\alpha^2)\cdot Q \equiv q$ и $Q_3 = (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)\cdot Q = (1-\alpha^3)\cdot Q$. Как видно из этих выражений, $\dfrac{q}{Q_3} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \dfrac{q}{Q_3+q} = 0{,}2$. Ясно, что к этому выводу можно было прийти и сразу после того, как мы договорились об определении α. Но при наличии всех формул мы можем решить задачу в общем виде. В самом деле, теперь мы можем найти начальный заряд серебряных шаров $Q = \dfrac{Q_3}{1-\alpha^3} = \dfrac{(Q_3+q)^3}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 62{,}5$ мкКл. Соответственно заряды, оставшиеся на серебряных шарах, $Q_1 = (1-\alpha)\cdot Q = \dfrac{Q_3(Q_3+q)^2}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 50$ мкКл и $Q_2 = (1-\alpha^2)\cdot Q = \dfrac{Q_3(Q_3+q)(Q_3+2q)}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 60$ мкКл.

Ответ: на двух других серебряных шариках остались заряды $Q_1 = \dfrac{Q_3(Q_3+q)^2}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 50$ мкКл и $Q_2 = \dfrac{Q_3(Q_3+q)(Q_3+2q)}{Q_3^2+3qQ_3+3q^2} = 60$ мкКл.

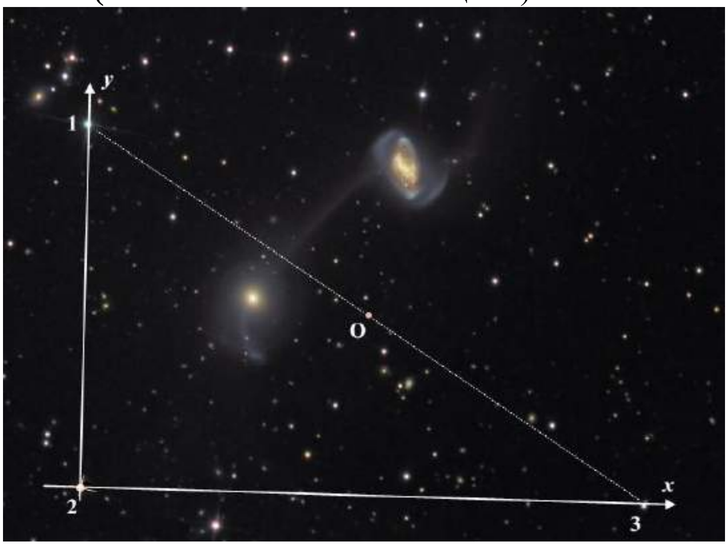
Критерии оценивания задачи 2 («Серебро и золото»).

действия	**макс. балл**
Объяснено, что три серебряных шара в результате зарядки приобрели одинаковые заряды	**2**
Правильно используется в решении большая величина расстояния между шарами после разнесения	**2**

Объяснено, что в условиях задачи суммарный заряд серебряного шара и золотого шарика распределяется между ними в одном и том же отношении при всех касаниях	**4**
Правильно найдена величина $\alpha = 0{,}2$	**4***
Правильно найдена величина $Q_1 = 50$ мкКл	**3***
Правильно найдена величина $Q_2 = 60$ мкКл	**3***
ВСЕГО	**18**

*Допускается решение «в числах», без получения формул в общем виде. В этом случае от максимальной оценки задачи отнимается **1** балл (оценка при правильном обоснованном решении и правильных ответах **17** баллов). При получении правильных формул и неправильных численных ответах отнимается по **1** баллу за **каждый** неправильный ответ.

3. (**«Галактическая навигация»**) Обитатели системы O часто совершают полеты в плоскости (xy), в которой система декартовых координат связана с тремя удачно расположенными в этой плоскости яркими объектами (обозначенными на рисунке цифрами 1,2 и 3). Расстояние между 1 и 2 $a = 60$ кпс (парсек (пс) – астрономическая единица длины 1 пс $\approx 3{,}2$ св.года $\approx 3\cdot 10^{16}$ м), а между 2 и 3 $b = 80$ кпс, угол между осями x и y прямой, а система O лежит точно между 1 и 3. Для ориентации в данной плоскости корабли оснащены



телескопами, постоянно нацеленными на объекты 1, 2 и 3, свет от которых фокусируется на фотодатчиках. Датчики отрегулированы так, что при нахождении корабля рядом с системой O их токи одинаковы и равны $I_0 = 120$ мА (ток датчика пропорционален мощности поступающего светового сигнала). Определите координаты корабля в этой системе координат, если токи датчиков равны $I_1 = 37{,}5$ мА, $I_2 = 60$ мА и $I_3 = 300$ мА. На каком расстоянии от системы O находится в этот момент корабль? Поглощением света в межзвездной среде можно пренебречь.

Решение:

Добавим третью координатную ось (z), перпендикулярную нашей плоскости. Пусть x, y и z – координаты корабля (в кпс). Тогда расстояния от корабля до ярких объектов 1,2,3 удовлетворяют соотношениям: $r_1^2 = x^2 + (a-y)^2 + z^2$, $r_2^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $r_3^2 = (b-x)^2 + y^2 + z^2$. По условию поглощением света в межзвездной среде можно пренебречь. Тогда поток энергии излучения (энергия, проходящая в единицу времени через единицу площади волнового фронта), распределяющейся на некотором расстоянии r от источника по поверхности сферы площадью $4\pi \cdot r^2$. Следовательно, мощность излучения, попадающего в «приемное окно» датчика, обратно пропорционально квадрату расстояния до соответствующего объекта. При нахождении корабля радом с системой O все три объекта находятся от него на одинаковом расстоянии $r_0=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Таким образом, ток датчика с номером i равен $I_i=I_0\frac{a^2+b^2}{4r_i^2}$. Следовательно, $x^2+y^2+z^2+a^2-2ay=r_1^2=\frac{I_0}{I_1}\frac{a^2+b^2}{4}$ и $x^2+y^2+z^2=r_2^2=\frac{I_0}{I_2}\frac{a^2+b^2}{4}$. Вычитая эти соотношения, находим, что $y=\frac{a}{2}+\frac{a^2+b^2}{8a}\left(\frac{I_0}{I_2}-\frac{I_0}{I_1}\right)=5$ кпс. Аналогично комбинируя выражение $x^2+y^2+z^2+b^2-2bx=r_3^2=\frac{I_0}{I_3}\frac{a^2+b^2}{4}$ с выражением для r_2^2, получим $x=\frac{b}{2}+\frac{a^2+b^2}{8b}\left(\frac{I_0}{I_2}-\frac{I_0}{I_3}\right)=65$ кпс. Теперь мы обнаруживаем, что наш корабль вылетел из «привычной» плоскости, так как $z^2=\frac{I_0}{I_2}\frac{a^2+b^2}{4}-x^2-y^2=750$ кпс^2. Так как z входит в уравнения только в форме квадрата, то могут быть два возможных значения $z\approx\pm 27{,}4$ кпс. Ясно, что координаты системы О $x_0=\frac{b}{2}=40$ кпс и $y_0=\frac{a}{2}=30$ кпс. Поэтому расстояние от корабля до системы О $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}=20\sqrt{5}$ кпс $\approx 44{,}7$ кпс.

Ответ: координаты корабля $x=65$ кпс, $y=5$ кпс и $z\approx\pm 27{,}4$ кпс, расстояние от корабля до системы О $r\approx 44{,}7$ кпс.

Критерии оценивания задачи 3 («Галактическая навигация»).

действия	**макс. балл**
Записаны правильные выражения для расстояний до объектов через искомые координаты корабля	**3x1=3**
Доказано, что ток мощность принимаемого датчиком излучения обратно пропорциональна квадрату расстояния до соответствующего объекта	**4**
Записаны правильные уравнения, связывающие координаты корабля с отношениями токов фотодатчиков	**3x2=6**
Правильно найдена координата $x=65$ кпс (с ошибкой не более 0,3 кпс)	**2***
Правильно найдена координата $y=5$ кпс (с ошибкой не более 0,2 кпс)	**2***
Обнаружено, что корабль покинул плоскость (xy)	**2***
Правильно найдена координата $z\approx\pm 27{,}4$ кпс (с ошибкой не более 0,3 кпс)	**2x1=2***
Правильно найдено расстояние $r\approx 44{,}7$ кпс (с ошибкой не более 0,5 кпс)	**1***
ВСЕГО	**22**

*Допускается решение «в числах», без получения формул в общем виде.

4. **(«Обогреватель»)** Домик гляциологов на леднике, в котором было только одно помещение, оборудовали обогревателем с автоматической регулировкой и тщательно заделали все щели: можно считать, что при закрытой двери потери тепла происходят только путем теплопроводности. Регулятор нагревательного элемента работает следующим

образом: когда температура в домике падает на $2°C$ ниже «заданной» температуры, нагревательный элемент включается и работает с постоянной мощностью, зависящей только от заданной регулятору температуры. После достижения этой температуры нагревательный элемент выключается. Гляциолог, долгое время проводящий в домике, обнаружил, что при температуре на улице, равной $t_1 = -8°C$, интервал времени между двумя включениями нагревателя равен $T_1 = 81$ мин, а при температуре $t_2 = -24°C$ этот период уже был равен $T_2 = 90$ мин. При этом регулятору постоянно задана одна и та же температура $t_0 = +24°C$. Считая, что полная теплоемкость домика с содержимым меняется слабо, и что влиянием тепла, выделяемым самим гляциологом, можно пренебречь, определите период включений нагревателя при внешней температуре $t_3 = -21°C$. При какой температуре на улице нагреватель перестанет выключаться (если не изменять регулировку)? Каков минимальный период включений нагревателя (из всех возможных при этой регулировке)?

Решение:

Пусть C – теплоемкость домика с содержимым. От момента, когда нагревательный элемент (НЭ) выключается и до его нового включения спустя время $T_{ост}$ домик отдает тепло $Q_{ост} = C \cdot \Delta t$ (здесь $\Delta t \equiv 2°C$). В тестовой части (вопрос 2) было рассказано о законе Фурье, согласно которому количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционально разности температур по разные стороны от него. Значит, мощность оттока тепла в ходе остывания при наружной температуре t равна $P_{ост} \approx A \cdot (t_0 - t)$, где A – некоторая постоянная. Здесь мы пренебрегаем изменением разности температур: для всех заданных значений t выполняется соотношение $(t_0 - t) \geq 16\Delta t$, и вносимая ошибка меньше $\frac{1}{16} \approx 6\%$. Точность можно немного повысить, если при вычислении мощности оттока тепла использовать «среднюю» разность температур – в этом случае $P_{ост} \approx A \cdot \left(t_0 - \frac{\Delta t}{2} - t\right) \equiv A \cdot (t_{ср} - t)$. Пока оставим более простое и несколько менее точное выражение. Значит, $T_{ост} \approx \frac{C \cdot \Delta t}{A(t_0 - t)}$. Обозначив мощность нагревателя P, для времени обратного нагревания (ясно, что $Q_н = C \cdot \Delta t$) находим: $T_н \approx \frac{C \cdot \Delta t}{P - A(t_0 - t)}$. Следовательно, период включений нагревателя

$$T = T_{ост} + T_н \approx \frac{C \cdot \Delta t}{A(t_0 - t)} + \frac{C \cdot \Delta t}{P - A(t_0 - t)} = \frac{C\,\Delta t\,P}{A^2} \cdot \frac{1}{(t_0 - t)\left(\frac{P}{A} - t_0 + t\right)}.$$

Введем обозначение $t_c \equiv t_0 - \frac{P}{A}$. Нетрудно заметить, что это – такое значение внешней температуры, при котором мощности нагревателя хватает только на компенсацию оттока тепла, и нагреватель после включения удерживает температуру постоянной, но не может ее увеличить. Таким образом, при температуре снаружи, меньшей или равной t_c, нагреватель перестает выключаться. Из условия ясно, что $t_c < t_2 < 0°C$. Тогда обратный период включений (эту величину в физике называют *частотой*) оказывается квадратичной функцией внешней температуры: $\frac{1}{T} = \frac{A^2}{C\,\Delta t\,P} \cdot (t_0 - t)(t - t_c)$. График этой функции – парабола с корнями t_0 и t_c, а между ними есть точка максимума (соответствующая минимальному периоду) $t_m = \frac{t_0 + t_c}{2}$. Ясно, что $\frac{1}{T_1} = \frac{A^2}{C\,\Delta t\,P} \cdot (t_0 - t_1)(t_1 - t_c)$. Следовательно, $\frac{A^2}{C\,\Delta t\,P} = \frac{1}{T_1(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}$, то есть $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{(t_0 - t)(t - t_c)}{(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}$. Это соотношение для температуры t_2 позволяет найти t_c: $T_1(t_0 - t_1)(t_1 - t_c) = T_2(t_0 - t_2)(t_2 - t_c)$, откуда $t_c = \frac{t_2(t_0 - t_2)T_2 - t_1(t_0 - t_1)T_1}{(t_0 - t_2)T_2 - (t_0 - t_1)T_1} = -48°C$. Теперь легко найти и остальные ответы: $T_3 = T_1 \cdot \frac{(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_0 - t_3)(t_3 - t_c)} = 85\frac{1}{3}$ мин = 85 мин 20 с. Минимальный период соответствует $t_m = \frac{t_0 + t_c}{2} = -12°C$ и равен $T_m = T_1 \cdot \frac{4(t_0 - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_0 - t_c)^2} = 80$ мин. Если перейти к уточненному результату, то формула для периода будет выглядеть так: $T = T_1 \cdot \frac{(t_{cp} - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_{cp} - t)(t - t_c)}$, а формула для даст значение $t_c = \frac{t_2(t_{cp} - t_2)T_2 - t_1(t_{cp} - t_1)T_1}{(t_{cp} - t_2)T_2 - (t_{cp} - t_1)T_1} \approx -47{,}4°C$. Таким образом, изменение результата чуть более 1%. Другие «уточненные» результаты: $T_3 = T_1 \cdot \frac{(t_{cp} - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_{cp} - t_3)(t_3 - t_c)} \approx 85{,}17$ мин и $T_m = T_1 \cdot \frac{4(t_{cp} - t_1)(t_1 - t_c)}{(t_{cp} - t_c)^2} \approx 79{,}85$ мин (изменение периодов около 0,2%).

Ответ: при внешней температуре $t_3 = -21°C$ период $T_3 \approx 85{,}2$ мин, нагреватель перестанет выключаться при $t \le t_c \approx -47{,}4°C$, минимальный период включений нагревателя $T_m \approx 80$ мин.

Критерии оценивания задачи 4 («Обогреватель»).

действия	**макс. балл**
Установлено, что мощность оттока тепла пропорциональна разности внутренней и наружной температур	**2**
Записаны правильные выражения для $T_{ост}$ и $T_н$, с введением необходимых констант (C, P и A)*.	**2x3=6**
Записано выражение для периода (частоты) включений и доказано существование точек, отвечающих прекращению выключений (t_c) и минимуму периода (t_m).	**2**
Указана связь t_c, t_m и t_0	**2**
С помощью значений периода при t_1 и t_2 получена общая формула для	**4**

периода	
Правильно найден $T_3 \approx (85{,}2 \pm 0{,}2)$ мин***	**3****
Правильно найдена $t_c \approx (-47{,}5 \pm 0{,}5)°C$ ***	**3****
Правильно найден $T_m \approx (79{,}9 \pm 0{,}2)$ мин***	**3****
ВСЕГО	**25**

*Выражения для «приближенного» и «уточненного» подходов оцениваются одинаково.

**Допускается решение «в числах», без получения формул в общем виде.

***При непопадании в интервал начисляется **2** балла только при наличии правильной формулы, иначе баллы не начисляются.

2018/19 учебный год, ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА.

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 БАЛЛОВ.

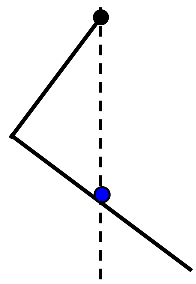
10 и 11 классы: задания и возможные решения

БИЛЕТ № 01 (ЧЕЛЯБИНСК).

Задание 1.

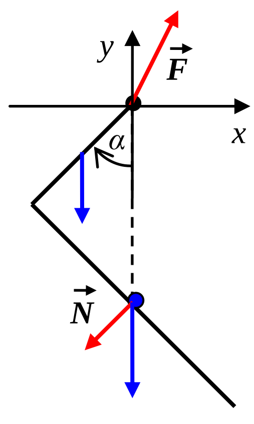
Вопрос: Кубик массы m покоится на очень шероховатой ($\mu \approx 1$) горизонтальной поверхности. При помощи какой минимальной силы его можно заставить начать вращение вокруг одного из своих горизонтальных ребер? Ускорение свободного падения равно g.

Задача: Уголок, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами $l_1 \equiv a = 20\,\text{см}$ и $l_2 = \frac{3}{2}a = 30\,\text{см}$. Его повесили за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости вдоль стенки, не касаясь ее). Затем в стену на одной вертикали с подвесом вбили горизонтально гладкий гвоздь – так, что теперь уголок опирается на гвоздь серединой длинного плеча. Во сколько раз и как изменилась из-за появления гвоздя величина силы, с которой уголок действует на подвес?



Ответ на вопрос: Ясно, что для придания вращения необходимо, чтобы момент внешней силы как минимум уравновесил момент силы тяжести, действующей на кубик. Момент силы тяжести относительно одного из нижних ребер равен $M_g = mg\frac{a}{2}$. Минимальная сила будет соответствовать максимальной величине плеча силы, которое равно $l_{\max} = a\sqrt{2}$. Поэтому $F_{\min} = \frac{M_g}{l_{\max}} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$. При этом горизонтальная проекция силы будет равна $F_{||} = \frac{F_{\min}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{2} < \mu mg$, то есть кубик не будет скользить.

Решение задачи: Из сил, приложенных к уголку, только сила реакция гвоздя и вес короткого плеча имеют ненулевые моменты относительно шарнира. Правило моментов (с учетом однородности уголка массы m): $\frac{2m}{5}g\frac{a}{2}\sin(\alpha) - N\frac{3a}{4} = 0 \Rightarrow N = \frac{4mg}{25}$. Здесь мы учли, что $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$. Из условия равновесия сил находим:



$$\left\{\begin{aligned} F_x &= N\sin(\alpha) = \frac{12mg}{125} \\ F_y &= mg + N\cos(\alpha) = \frac{141mg}{125} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{3\sqrt{89}}{25}mg.$$

Ясно, что до появления гвоздя сила реакции шарнира была равна mg, поэтому из-за появления гвоздя эта сила увеличилась в $\frac{3\sqrt{89}}{25} \approx 1{,}13$ раза.

Задание 2.

Вопрос: Как связаны между собой изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа и полученное им количество теплоты в изобарном процессе?

Задача: ν = 2 моля одноатомного идеального газа находится в теплоизолирующем вертикальном цилиндре с подвижным поршнем площадью S и массой m. Дно цилиндра равномерно заряжено зарядом q, а поршень — зарядом $(-q)$. Расстояние между дном сосуда и поршнем намного меньше диаметра цилиндра. Газ медленно получает от нагревателя количество теплоты Q. На какое расстояние при этом сдвинется поршень? Считайте, что электрическое поле остается однородным, трения нет. Диэлектрическая проницаемость газа равна единице, электрическая постоянная ε_0, ускорение свободного падения g, давление над поршнем равно p_0.

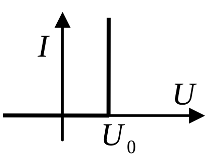
Ответ на вопрос: Рассмотрим изменение объема газа от V_1 до V_2. Изменение внутренней энергии при постоянном давлении p, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $\Delta U = \Delta\left(\frac{3}{2}\nu RT\right) = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}p(V_2 - V_1)$. Работа газа в изобарном процессе равна $A = p(V_2 - V_1) = \frac{2}{3}\Delta U$. Поэтому $Q = A + \Delta U = \frac{5}{3}\Delta U$.

Решение задачи: Поскольку электрическое поле однородно, сила притяжения между поршнем и дном цилиндра не зависит от положения поршня: $F_{эл} = |q_-|\,E_+ = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$. Поэтому давление p газа во время опыта постоянно (с учетом наружного атмосферного давления и веса поршня): $p = p_0 + \frac{mg + q^2/(2\varepsilon_0 S)}{S}$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в вопросе, замечаем, что полученное газом количество теплоты связано с работой по перемещению поршня соотношением $Q = \frac{5}{2}A \Rightarrow pS\cdot\Delta h = \frac{2}{5}Q$. Поэтому смещение поршня равно $\Delta h = \frac{4}{5}\frac{\varepsilon_0 QS}{2\varepsilon_0(p_0 S^2 + mgS) + q^2}$.

Задание 3.

Вопрос: Допустим, что для некоторого элемента цепи связь тока с приложенным напряжением дается уравнением $I = f(U)$, где f – известная функция. Как нужно рассчитывать мощность, которую будет потреблять этот элемент при подключении к клеммам источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r?

Задача: К источнику постоянной ЭДС подключают гирлянду из последовательно соединенных резистора и n одинаковых светодиодов, вольт-амперная характеристика



которых показана на рисунке ($U_0 = 1$В). Если включить в гирлянду $n_1 = 10$ светодиодов, то полная потребляемая ими мощность составит $P_1 = 175$Вт, если включить $n_2 = 28$ светодиодов, то $P_2 = 238$Вт. Определите «оптимальное» число светодиодов, при котором потребляемая мощность максимальна, а сила тока через каждый из светодиодов – минимальна (из возможных при этой мощности). Найти максимальную потребляемую мощность. Чему равна ЭДС источника?

Ответ на вопрос: В общем случае мощность, потребляемая элементом цепи, вычисляется по формуле $P = I \cdot U$. В случае заданной вольт-амперной характеристики необходимо исходить из того, что напряжение на элементе, подключенным к источнику, равно $U = \mathcal{E} - rI$. Значит, это напряжение находится из уравнения $U + r\,f(U) = \mathcal{E}$. Это уравнение может решаться как аналитически, так и графически, а затем вычисляется $P = U \cdot f(U)$.

Решение задачи: Рассмотрим гирлянду из n светодиодов, в которой течет ток (то есть ЭДС источника $\mathcal{E} > n \cdot U_0$). Сила тока $I = \dfrac{\mathcal{E} - n \cdot U_0}{R}$ (R – сопротивление «внешней» части цепи). Потребляемая гирляндой мощность $P = nU_0 I = nU_0 \dfrac{\mathcal{E} - n \cdot U_0}{R} \equiv P_0 \cdot n(\bar{n} - n)$. Здесь введены обозначения $P_0 \equiv \dfrac{U_0^2}{R}$ и $\bar{n} \equiv \dfrac{\mathcal{E}}{U_0}$. Как видно, зависимость мощности от числа светодиодов – квадратичная, и максимум мощности соответствует значению $n = \dfrac{\bar{n}}{2}$. Записав соотношения $P_1 = P_0 \cdot n_1(\bar{n} - n_1)$ и $P_2 = P_0 \cdot n_2(\bar{n} - n_2)$, получаем из них уравнение на $\bar{n}$: $P_2 \cdot n_1(\bar{n} - n_1) = P_1 \cdot n_2(\bar{n} - n_2)$. Таким образом, $\bar{n} = \dfrac{n_2^2 P_1 - n_1^2 P_2}{n_2 P_1 - n_1 P_2} = 45$. Следовательно, ЭДС источника $\mathcal{E} = \bar{n} U_0 = 45$ В. Поскольку число светодиодов – это целое число, а парабола симметрична относительно оси, то можно сделать вывод, что максимум мощности достигается при $n = 22$ и $n = 23$. По условию «оптимальности» на нужна меньшая сила тока, поэтому оптимальный режим соответствует $n_{опт} = 23$. Максимальная мощность $P_m = P_1 \cdot \dfrac{n_{опт}(\bar{n} - n_{опт})}{n_1(\bar{n} - n_1)} = \dfrac{253}{175} P_1 = 253$ Вт.

Задание 4.

Вопрос: При выполнении каких условий линзу можно считать «тонкой»?

Задача: Предмет и его прямое изображение располагаются на оси тонкой линзы перпендикулярно этой оси и симметрично относительно одного из фокусов линзы. Расстояние между предметом и изображением $l = 20$ см. Чему может равняться фокусное расстояние линзы?

Ответ на вопрос: При выводе формул, описывающих тонкие линзы, используются два приближения: пренебрегают смещением световых лучей вдоль плоскости линзы по сравнению с ее диаметром и считают малыми все углы между световыми лучами и главной оптической осью линзы (используются соотношения ***параксиального приближения*** $\sin(\alpha) \approx tg(\alpha) \approx \alpha$). Смещение луча вдоль плоскости линзы по величине порядка геометрической толщины самой линзы, то есть она действительна должна быть «тонкой»: ее толщина должна быть много меньше ее диаметра. Это требование также можно переформулировать следующим образом: диаметр линзы должен быть много меньше радиусов кривизны ограничивающих ее сферических поверхностей. Второе требование – то, что все рассматриваемые лучи должны быть параксиальными.

Решение задачи: Прямые изображения предметов (светящиеся точки которых есть действительные источники для линзы) создают рассеивающие линзы (при любом расстоянии от предмета до линзы) и собирающие линзы (когда расстояние от предмета до линзы меньше ее фокусного расстояния). В обоих случаях это изображение будет мнимым, то есть будет располагаться по одну сторону от линзы с предметом. Пусть a – расстояние от предмета до линзы, а $b=-|b|$ – расстояние от линзы до мнимого изображения. Для рассеивающей линзы оптическая сила отрицательна, а изображение находится ближе к линзе, чем предмет. Поэтому $a=|F|+\frac{l}{2}$, а $|b|=|F|-\frac{l}{2}$. Согласно формуле линзы $\frac{1}{|F|+\frac{l}{2}}-\frac{1}{|F|-\frac{l}{2}}=-\frac{1}{|F|}\Rightarrow |F|^2-l|F|-\frac{l^2}{4}=0$. Выбирая для $|F|$ положительный корень уравнения, находим: $|F|=\frac{(\sqrt{2}+1)l}{2}\approx 24{,}14$ см. Аналогично для собирающей линзы (мнимое изображение находится дальше от линзы, чем предмет: значения $a=F-\frac{l}{2}$, а $|b|=F+\frac{l}{2}$ приводят к уравнению $F^2-lF-\frac{l^2}{4}=0$, положительный корень которого снова $F=\frac{(\sqrt{2}+1)l}{2}\approx 24{,}14$ см. Ответ также можно записать в общем виде $F=\pm\frac{(\sqrt{2}+1)l}{2}\approx \pm 24{,}14$ см.

БИЛЕТ № 04 (МОСКВА).

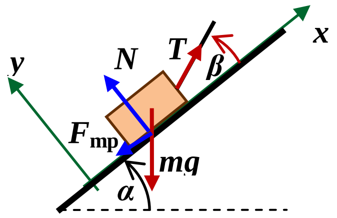
Задание 1.

Вопрос: Два бруска одинаковой массы в некоторый момент времени находятся на поверхностях, наклоненных под углом 30º к горизонту. Различаются только коэффициенты трения: для первой поверхности он равен $\mu_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, для второй – $\mu_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Во сколько раз отличаются силы трения, действующие на бруски?

Задача: Брусок массы $m=2$ кг равномерно втаскивают за нить вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=45°$ с горизонтом. Угол β, который нить составляет с наклонной плоскостью, выбран так, чтобы натяжение нити было наименьшим. При подъеме бруска таким образом на высоту $h=4{,}5$ м была совершена работа $A=100$ Дж. Чему может быть равен коэффициент трения бруска о плоскость? Нить считать невесомой и нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно $g\approx 10$ м/с^2.

Ответ на вопрос: Нетрудно заметить, что $\mu_2<tg(30°)=\frac{1}{\sqrt{3}}<\mu_1$, и поэтому первый брусок может покоиться на наклонной поверхности, а второй – соскальзывает по ней. В этом случае сила трения для первого бруска есть сила трения покоя, то есть она уравновешивает компоненту внешней силы тяжести, направленную вдоль плоскости: $F_1=mg\sin(30°)=\frac{mg}{2}$ (m – масса каждого из брусков). Сила трения для второго бруска – сила трения скольжения, то есть $F_2=\mu_2 N_2=\mu_2 mg\cos(30°)=\frac{mg}{4}$. Значит, сила трения, действующая на первый брусок, в два раза больше, чем сила трения, действующая на второй. Первый брусок в отдельно взятый момент времени может скользить по поверхности (если его «принудительно» запустили). Тогда и у него сила трения будет силой трения скольжения, и тогда отношение величин сил трения будет равно отношению коэффициентов трения, то есть сила трения, действующая на первый брусок, будет в этом случае в три раза больше, чем сила трения, действующая на второй.

Решение задачи: В первую очередь определим величину угла β. Запишем условие баланса сил в проекциях на оси x и y (см. рисунок) и выразим из них величину силы натяжения нити:



$$\begin{cases} T\cos(\beta) = mg\sin(\alpha) + \mu N \\ N = mg\cos(\alpha) - T\sin(\beta) \end{cases} \Rightarrow T = mg\frac{\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha)}{\cos(\beta)+\mu\sin(\beta)}.$$

Если ввести угол $\alpha_0 \equiv \mathrm{arctg}(\mu)$, то это выражение можно записать в виде $T = mg\dfrac{\sin(\alpha+\alpha_0)}{\cos(\beta-\alpha_0)}$, из которого очевидно, что минимум силы натяжения достигается при $\beta = \alpha_0$. Значит, сила, с которой при перемещении бруска тянут за нить, $F = T_{\min} = mg\dfrac{\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Работа этой силы $A = Fs\cos(\beta)$. Поскольку перемещение $s = \dfrac{h}{\sin(\alpha)}$, а $\cos(\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, то $A = mgh\dfrac{1+\mu\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{1+\mu^2}$. Значит, условие задачи приводит к квадратному уравнению для величины коэффициента трения: $\mu^2 - \dfrac{mgh\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{A}\mu + 1 - \dfrac{mgh}{A} = 0$, корни которого $\mu_{1,2} = z\,\mathrm{ctg}(\alpha) \pm \sqrt{z^2\mathrm{ctg}^2(\alpha) + 2z - 1}$, где $z \equiv \dfrac{mgh}{2A}$. При значениях данных из условия оба корня оказываются физически допустимыми: $\mu_1 \approx 0{,}77$ и $\mu_2 \approx 0{,}13$.

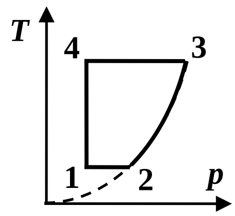
Строго говоря, в данной задаче необходимо проверить, что используемое значение β допустимо для заданного α и полученных μ. Дело в том, что при «слишком больших» β может произойти отрыв бруска от плоскости. Условие того, что брусок не отрывается от плоскости – это $N > 0$, то есть $T\sin(\beta) < mg\cos(\alpha)$. Подставив в это условия найденные значения T и β, обнаруживаем, что оно приводится к виду $\mu < \mathrm{ctg}(\alpha)$. Это требование также выполняется для обоих найденных значений коэффициента трения. Заметим, что существование этого ограничения также можно установить и из вида формулы для работы: ясно, что при протаскивании бруска по шероховатой поверхности $A > mgh$, и из этого требования получается такое же ограничение на допустимые μ.

ОТВЕТ: $\mu_{1,2} = \dfrac{mgh\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{2A} \pm \sqrt{\left(\dfrac{mgh\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{2A}\right)^2 + \dfrac{mgh}{A} - 1}$, то есть коэффициент трения может иметь одно из двух значений: $\mu_1 \approx 0{,}77$ или $\mu_2 \approx 0{,}13$.

Задание 2.

Вопрос: Запишите выражения для изменения внутренней энергии идеального газа в изобарном, изохорном и изотермическом процессах (через параметры состояний).

Задача: Постоянное количество неона участвует в циклическом процессе, диаграмма которого в координатах «давление – температура» показана на рисунке. Процессы 1-2 и 3-4 – изотермические, при изобарном сжатии над газом совершают работу $A = 2{,}5$ кДж. Диаграмма процесса 2-3 – участок параболы, проходящей через начало координат. Найти количество теплоты, подведенное к газу в процессе 2-3.



Ответ на вопрос: В любом процессе изменение внутренней энергии заданного количества идеального газа можно записать только через изменение его температуры: $\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T$, где ν – число степеней свободы молекулы газа, равное 3 для молекулы одноатомного газа, 5 для двухатомного и 6 для многоатомного. В соответствии с этим, изменение внутренней энергии в изотермическом процессе равно нулю ($(\Delta U)_{T=const} = 0$), а в изобарном и изохорном процессах может быть выражено через изменения объема и давления с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: $\nu RT = pV$, и поэтому $(\Delta U)_{p=const} = \frac{i}{2}p\Delta V$ и $(\Delta U)_{V=const} = \frac{i}{2}V\Delta p$.

Решение задачи: В данной задаче необходимо исследовать связь характеристик процессов 2-3 и 4-1 (это и есть изобарное сжатие). Поскольку изменение внутренней энергии в замкнутом процессе равно нулю, и изменение ее в изотермических процессах рано нулю, то эти процессы связаны соотношением $\Delta U_{23} + \Delta U_{41} = 0$. При изобарном сжатии работа над газом $A \equiv A'_{41} = -p_1(V_1 - V_4) = -\frac{2}{3}\Delta U_{41} = \frac{2}{3}\Delta U_{23}$ (мы учли, что неон – одноатомный газ). В процессе 2-3, согласно условию, $T = \alpha \cdot p^2$ (α – некоторый постоянный коэффициент). Это значит, что $pV = \nu RT = \alpha\nu R \cdot p^2$, то есть $p = \frac{V}{\alpha\nu R} \equiv \beta V$, то есть диаграмма этого процесса в координатах давление-объем есть прямая линия, проходящая через начало координат. Поэтому работа газа в таком процессе вычисляется как площадь трапеции (площадь под диаграммой процесса в координатах $p - V$): $A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = \frac{1}{2}\beta(V_3^2 - V_2^2) = \frac{1}{2}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{1}{3}\Delta U_{23}$. Следовательно, искомое количество теплоты, в соответствии с первым Началом термодинамики, равно $Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23} = \frac{4}{3}\Delta U_{23} = 2A = 5$ кДж. Как видно, в этом процессе тепло действительно подводится к газу.

ОТВЕТ: $Q_{23} = 2A = 5$ кДж.

Задание 3.

Вопрос: По гладким вертикальным направляющим в сильном магнитном поле падают медное и деревянное кольца примерно одинаковой массы. Линии индукции поля перпендикулярны плоскости колец. Какое из колец должно падать медленнее и почему?

Задача: Катушка индуктивности помещена между полюсами электромагнита так, что ось катушки совпадает с направлением индукции магнитного поля, которое почти однородно. Индуктивность катушки $L = 1$ мГн, а площадь ее поперечного сечения $S = 2$ см^2. Выводы обмотки соединили проводом, проходящим в плоскости, проходящей через ось катушки. Общее сопротивление обмотки и провода $R = 20$ Ом. Ток в обмотке электромагнита плавно изменяется. За время, в течении которого поле электромагнита увеличилось на $\Delta B = 3$ Тл, сила тока в катушке увеличилась на $\Delta I = 0{,}1$ А. Какой заряд прошел за это время по проводу? Число витков катушки $N = 6$.

Ответ на вопрос: В сильном поле даже небольшая неоднородность приведет к появлению в проводящем теле индукционных токов (токов Фуко). Поэтому в этом теле будет выделяться тепло, появляющееся из-за убыли кинетической энергии (можно также сослаться на правило Ленца – индукционные явления всегда противодействуют причине, вызвавший их появление, поэтому силы Ампера, действующие на индукционные токи, будут направлены против скорости тела. Значит, проводящее кольцо (медное) будет падать медленнее непроводящего (деревянного).

Решение задачи: В катушке возникает ЭДС индукции $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, которой противодействует ЭДС самоиндукции $L\frac{\Delta I}{\Delta t}$, где Δt мало. Тогда можно записать $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR$. Умножая это соотношение на Δt, находим, что $\Delta q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi - L\Delta I}{R}$. Изменение магнитного потока $\Delta\Phi = NS\Delta B$*, то есть $\Delta q = \frac{NS\Delta B - L\Delta I}{R} = 175$ мкКл.

ОТВЕТ: $\Delta q = \frac{NS\Delta B - L\Delta I}{R} = 175$ мкКл*.

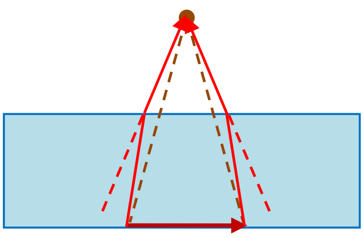
*В связи с тем, что численное значение $N = 6$ было сообщено участникам в ходе проведения олимпиады, засчитывались также решения с $N = 1$ или с числом N, используемом в качестве свободного параметра.

Задание 4.

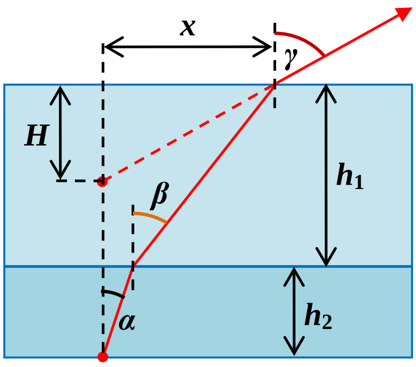
Вопрос: Почему рыбка в аквариуме, если ее разглядывать через поверхность воды, кажется крупнее, чем на самом деле? Ответ пояснить построением.

Задача: Две несмешивающиеся жидкости налиты в стакан так, что высота верхнего слоя жидкости h_1 в два раза больше высоты нижнего слоя жидкости h_2. Показатели преломления жидкостей – $n_1 = 1{,}5$ и $n_2 = 1{,}75$ соответственно. При взгляде «прямо сверху» видимое расстояние до дна сосуда от верхней границы жидкости равно $H = 8$ см. Найдите h_1 и h_2.

Ответ на вопрос: Этот эффект связан с преломлением лучей на границе раздела воздух-вода. Вода – оптически более плотная среда, и ход лучей, попадающих в глаз наблюдателя от краев расположенного под водой предмета показан на рисунке. Как видно, наблюдаемый угловой размер предмета увеличивается. Нужно, отметить, что этот эффект зависит от условий наблюдения – при наблюдении под значительным углом к поверхности воды более заметным становится эффект кажущегося «приподнимания» предмета над дном сосуда или водоема.



Решение задачи: Построим луч, идущий со дна на поверхность жидкости под малым углом



α. Закон преломления на границах жидкостей $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{n_1}{n_2}$ и $\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{1}{n_1}$ (для малых углов используем приближение $\sin(\alpha)\approx \mathrm{tg}(\alpha)\approx\alpha$). Поэтому $\gamma\approx n_1\beta\approx n_2\alpha$. Выразим отклонение этого луча от вертикали на поверхности верхнего слоя жидкости (расстояние x) через «видимое» расстояние по вертикали до точки на дне (это и есть видимое расстояние до дна сосуда при взгляде сверху): $x=H\,\mathrm{tg}(\gamma)\approx H\gamma\approx n_2H\alpha$. С другой стороны, это расстояние $x=h_2\,\mathrm{tg}(\alpha)+h_1\,\mathrm{tg}(\beta)\approx h_2\alpha+h_1\dfrac{n_2}{n_1}\alpha$. Из этих соотношений следует, что для всех малых α «видимое» положение дна одинаково и $n_2H\approx h_2+h_1\dfrac{n_2}{n_1}$. Поскольку по условию $h_1=2h_2$, то $h_2=\dfrac{n_1n_2H}{n_1+2n_2}=4{,}2$ см, а $h_1=\dfrac{2n_1n_2H}{n_1+2n_2}=8{,}4$ см.

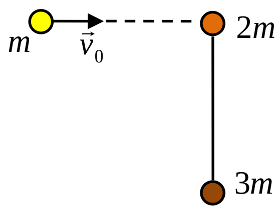
ОТВЕТ: $h_2=\dfrac{n_1n_2H}{n_1+2n_2}=4{,}2$ см, а $h_1=\dfrac{2n_1n_2H}{n_1+2n_2}=8{,}4$ см.

БИЛЕТ № 05 (КЕМЕРОВО)

Задание 1.

Вопрос: Три одинаковые небольшие массивные шайбы легкими жесткими соединены в равнобедренный прямоугольный треугольник с длиной катетов l. На каком расстоянии от ближайшей к нему шайбы находится центр масс конструкции?

Задача: На гладком горизонтальном столе лежат упругие шайбы с массами $2m$ и $3m$, связанные слегка натянутой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Еще одна шайба массы m налетает на систему со скоростью v_0 (перпендикулярно), и происходит абсолютно упругий лобовой удар с одной из шайб (см. рисунок). Найти угловую скорость вращения и величину силы натяжения нити после удара.



Ответ на вопрос: Введем систему координат с центром в вершине прямого угла треугольника и осями, направленными вдоль катетов. Координаты центра масс конструкции в этой системе координат $x_{ЦМ}=\dfrac{m\cdot 0+m\cdot 0+m\cdot l}{3m}=\dfrac{l}{3}$ и аналогично $y_{ЦМ}=\dfrac{l}{3}$. Ясно, что ближайшей к центру масс является шайба, расположенная в вершине прямого угла, расстояние до которой $r_{\min}=\sqrt{x_{ЦМ}^2+y_{ЦМ}^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}l$ (расстояния до двух других шайб $r'=\dfrac{\sqrt{5}}{3}l$).

Решение задачи: Удар небольших стальных шайб происходит быстро. Кроме того, линия удара перпендикулярна нити, и за время удара сила натяжения нити не успевает существенно измениться. Поэтому шайба $3m$ не успевает набрать заметной скорости. Тогда удар шайб m и $2m$ можно рассчитывать как обычный лобовой упругий удар. Тогда из законов сохранения энергии и проекции импульса на направление $\vec{v}_0$ получаем:

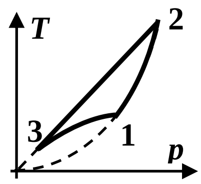
$$\left\{\begin{array}{l} mv_0 = 2mv_2 + mv_1 \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{2mv_2^2}{2} + \dfrac{mv_1^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow v_2 = \frac{2}{3}v_0 .$$

Следовательно, скорость центра масс шайб, связанных нитью, равна $V = \frac{2}{5}v_2 = \frac{4}{15}v_0$. Итак, центр масс движется поступательно, и относительно него шайбы движутся по окружностям с угловой скоростью $\omega = \frac{v_2 - V}{r_2} = \frac{2/3 - 4/15}{3/5}\frac{v_0}{l} = \frac{2v_0}{3l}$. Так как трения нет, то такой характер движения сохранится и далее – угловая скорость меняться не будет. Вместе с ней не изменяется и сила натяжения нити, создающая центростремительное ускорение шайб: $T = 2m\omega^2 \frac{3}{5}l = \frac{8mv_0^2}{15l}$.

Задание 2.

Вопрос: Диаграмму циклического процесса над идеальным газом в координатах p-V подвергли «масштабному преобразованию»: давление и объем в каждой точке изменили в одно и то же количество раз ($p \to kp$ и $V \to kV$). Чему равно отношение КПД «нового» и «старого» циклов?

Задача: На графике в координатах «давление – температура» показан цикл постоянного количества одноатомного идеального газа, являющегося рабочим телом тепловой машины. Диаграмма процесса 1-2 – участок параболы, проходящей через начало координат, процесса 2-3 – участок прямой, проходящей через начало координат, а процесс 3-1 – адиабатический. Модуль работы в адиабатическом процессе составляет 60% от работы газа в процессе 1-2. Найти КПД цикла.



Ответ на вопрос: При описанном масштабном преобразовании все работы (вычисляемые как площади под диаграммами процессов $p(V)$) и внутренние энергии (которые для идеального газа пропорциональны произведению давления на объем) изменятся пропорционально квадрату «масштабного» коэффициента: $A \to k^2A$ и $U \to k^2U$. Такой же вывод, в соответствии с I Началом термодинамики, относится и к количествам теплоты ($Q \to k^2Q$). Поэтому КПД циклов не изменяются, и искомое соотношение равно 1.

Решение задачи: Идентифицируем процессы в нашем цикле: в процессе 1-2 $T = const \cdot p^2$. В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона $T = \frac{pV}{\nu R}$, и поэтому в этом процессе $p = \alpha \cdot V$, то есть давление газа растет пропорционально объему. Работа газа равна площади под диаграммой процесса в координатах $p - V$ (площади трапеции), то есть

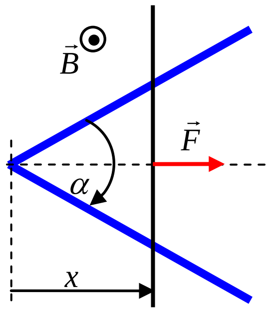
$$A_{12} = \frac{p(V_1) + p(V_2)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2 + V_1)(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2) .$$

При этом изменение температуры $\Delta T = \frac{1}{\nu R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{\alpha}{\nu R}(V_2^2 - V_1^2)$, поэтому $A_{12} = \frac{\nu R}{2}\Delta T$. К газу подводится количество теплоты $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = A_{12} + \frac{3}{2}\nu R \Delta T = 4A_{12}$. Процесс 2-3 ($T = const \cdot p$) очевидно является изохорным охлаждением (работа не совершается, теплота отводится от газа). В процессе 3-1 теплообмена нет, а работа отрицательна и, согласно условию, $A_{31} = -0{,}6A_{12}$. Таким образом, теплота нагревателя $Q_H = Q_{12} = 4A_{12}$, а работа в цикле $A = A_{12} + A_{31} = 0{,}4A_{12}$. Следовательно, КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_H} = 0{,}1$.

Задание 3.

Вопрос: Кольцо из гибкого провода лежит на столе без перехлестов в «не расправленном» состоянии. В пространстве есть магнитное поле, перпендикулярное поверхности стола? Участки провода раздвигают, расправляя кольцо. Куда будут направлены силы Ампера, действующие на эти участки?

Задача: Проводник, согнутый под углом α, расположен в горизонтальной плоскости. Металлический стержень может без трения скользить перпендикулярно биссектрисе угла. Индукция однородного вертикального магнитного поля равна B. К стержню приложена горизонтальная сила $F = kx$, где расстояние x отсчитывается от вершины угла. Определить максимальную скорость стержня. В процессе движения стержень не теряет контакта с обеими сторонами угла. Сопротивление единицы длины стержня равно ρ, сопротивление проводника и контакта пренебрежимо мало.



Ответ на вопрос: При изменении площади контура в процессе «расправления» магнитный поток через контур будет изменяться, и в контуре возникнет индукционный ток. На этот ток со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера. В соответствии с правилом Ленца, индукционные явления всегда препятствует причине, вызвавшей их появление. Поэтому силы Ампера обязательно будут направлены внутрь контура, препятствуя увеличению его площади.

Решение задачи: Приложим к стержню силу F, тогда при движении стержня будет увеличиваться площадь треугольника, образованного стержнем и «уголком» из проводника: $S = x^2 \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Поток магнитной индукции $\Phi = BS$, ЭДС индукции, возникающая в контуре $|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = 2Bx\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dx}{dt} = 2Bx\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)v$. Сопротивление участка стержня, по которому течет ток, $R = 2\rho x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. В стержне возникнет ток, пропорциональный скорости: $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B}{\rho}v$.

Сила Ампера, действующая на проводник, $F_A = IB2x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2B^2xv}{\rho}\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Уравнение движения стержня: $ma = F - F_A$, то есть $ma = x\left[k - \frac{2B^2v}{\rho}\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$. Скорость стержня достигнет максимального значения, когда ускорение станет равным нулю. Значит, $k-\dfrac{2B^2v_{\max}}{\rho}\mathrm{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=0$, и $v_{\max}=\dfrac{k\rho}{2B^2}\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Задание 4.

Вопрос: Оптическая сила линзы. Формула линзы.

Задача: Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1=F,\quad F_2=\dfrac{F}{2}$. Главные оптические оси линз совмещены. Точечный источник света расположен на расстоянии $a_1=\dfrac{3F}{2}$ перед первой линзой, а его изображение – на расстоянии $b_2=\dfrac{F}{3}$ за второй линзой. На каком расстоянии L друг от друга находятся линзы?

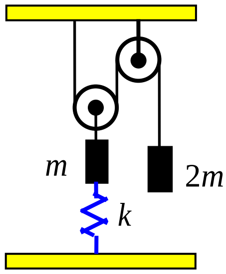
Ответ на вопрос: Линза – прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. Такие тела обладают способностью фокусировать параллельные пучки параксиальных световых лучей (то есть лучей, идущих под малым углом к главной оптической оси линзы). Главным фокусом линзы называют точку, в которой фокусируются лучи, идущие параллельно ее главной оптической оси. Расстояние от плоскости линзы до фокуса – фокальное расстояние линзы. Оптической силой линзы называют величину, обратную фокусному расстоянию: $D\equiv\dfrac{1}{F}$. Единицей измерения оптической силы является диоптрия (1 дптр = 1 м$^{-1}$). В случае собирающей линзы фокус является действительным (в нем пересекаются световые лучи), а фокусное расстояние и оптическая сила считаются положительными. В случае рассеивающих линз (фокус является мнимым – параллельный пучок лучей после прохождения линзы расходится так, что продолжения лучей пересекаются в плоскости) фокусное расстояние и оптическая сила линзы считаются отрицательными. Если диаметр линзы намного меньше радиусов кривизны ее сферических поверхностей, то ее толщина намного меньше диаметра. Если при этом мы рассматриваем только параксиальные лучи, то для описания прохождения лучей через линзу можно использовать приближение тонкой линзы. В рамках этого приближения оптическая сила линзы, помещенной в однородную среду, определяется формулой $D=(n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)$, где n – показатель преломления вещества линзы относительно окружающей среды, а радиусы поверхностей линзы $R_{1,2}$ считаются положительными для выпуклой поверхности и отрицательными для вогнутой. Расстояния от светящейся точки a и расстояние до ее изображения b для тонкой линзы связаны ***формулой линзы*** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=D=\dfrac{1}{F}$. В этой формуле a и b считаются положительными для действительных источников или изображений, и отрицательными – для мнимых.

Решение задачи: По формуле линзы для первой линзы $F_1=F,\ a_1=\dfrac{3F}{2}\Rightarrow b_1=3F$. Аналогично для второй линзы $F_2=\dfrac{F}{2},b_2=\dfrac{F}{3}\Rightarrow a_2=-F$. Таким образом, изображение источника, создаваемое первой линзой, находится на расстоянии $f_1=3F$ за ней и при этом оно является мнимым источником для второй линзы и находится за второй линзой на расстоянии F. Поэтому расстояние между линзами $L = 2F$.

БИЛЕТ № 06 (НИЖНИЙ НОВГОРОД).

Задание 1.

Вопрос: Как связаны между собой законы изменения координаты и скорости при гармонических колебаниях вдоль одной прямой?



Задача: В системе, изображенной на рисунке, массы грузов равны m и $2m$, жесткость пружины k, блоки, нить и пружина - невесомые, блоки вращаются без трения, нить по блокам не скользит. Груз $2m$ смещают из положения равновесия вниз на расстояние s, после чего грузы совершают гармонические колебания. Найдите максимальные скорости колеблющихся грузов. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ на вопрос: Ясно, что закон изменения скорости получается дифференцированием закона изменения координаты. Если $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, то $v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$. Закон изменения скорости можно переписать в виде $v(t) = \omega x_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \equiv v_m \cos(\omega t + \varphi_v)$. Это означает, что .амплитуда колебаний скорости отличается от амплитуды колебаний координаты на множитель, равный циклической частоте колебаний ($v_m = \omega x_m$), и колебания скорости опережают по фазе колебания координаты на $\frac{\pi}{2}$.

Решение задачи: Направим ось x вертикально вниз. В положении равновесия грузов: $2mg - T = 0$ и $mg + k\Delta l_0 - 2T = 0$, где Δl_0 - удлинение пружины в положении равновесия, T – сила натяжения нити. Из этих уравнений получаем $\Delta l_0 = \frac{3mg}{k}$. При смещении груза $2m$ от положения равновесия вниз груз m смещается вверх на $\frac{s}{2}$ и пружина дополнительно растягивается на $\frac{s}{2}$. Максимальные скорости грузов достигаются при прохождении положения равновесия, причем скорость груза m при натянутой нити всегда в два раза меньше, чем скорость груза $2m$. Запишем закон сохранения энергии для колеблющихся грузов:

$$\frac{2mv_0^2}{2} + \frac{m(v_0/2)^2}{2} + \frac{k\Delta l_0^2}{2} = -2mgs + mg\frac{s}{2} + \frac{k(\Delta l_0 + s/2)^2}{2},$$

где v_0 – максимальная скорость груза $2m$. Таким образом, $9mv_0^2 = k^2 s^2 \Rightarrow v_0 = \frac{s}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Максимальная скорость груза m в два раза меньше $v_0' = \frac{s}{6}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Отметим, что амплитуда ускорения груза 1 не может быть больше ускорения свободного падения (это соответствует провисанию нити), и поэтому полученный результат верен только при $\frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{k}{m}} \le g \Leftrightarrow s \le \frac{9mg}{k}$. При больших s условие задачи некорректно – колебания грузов в действительности не являются гармоническими.

Задание 2.

Вопрос: Внутренняя энергия и абсолютная температура идеального газа.

Задача: Горизонтальный теплоизолированный сосуд цилиндрической формы массой m закрыт с торцов и перегорожен подвижным поршнем массой $M >> m$. Сосуд и поршень покоятся в невесомости, с обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального одноатомного газа. Сосуду коротким ударом сообщают скорость v, направленную вдоль оси сосуда. На сколько изменится температура ΔT газа после затуханий колебаний поршня? Трение между поршнем и стенками сосуда, теплоемкость поршня и стенок не учитывать. Масса газа пренебрежимо мала. Универсальная газовая постоянная R.

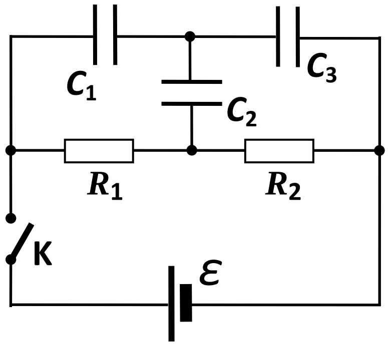
Ответ на вопрос: Шкала абсолютных температур – шкала Кельвина, в которой за начало отсчета температуры принят «абсолютный ноль» – температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. Один градус этой шкалы приравнен к градусу шкалы Цельсия (расстояние между температурой плавления льда и температурой кипения воды при нормальном атмосферном давлении равна 100 К). Внутренняя энергия молекулярной системы есть сумма энергий ее молекул. В модели идеального газа средняя потенциальная энергия взаимодействия молекул считается пренебрежимо малой (мы пренебрегаем взаимодействием молекул всегда, кроме «редких» моментов соударений). Поэтому внутренняя энергия идеального газа есть сумма кинетических энергий молекул и она равна произведению числа молекул на среднюю кинетическую энергию молекулы. Согласно теореме Больцмана, в состоянии теплового равновесия при абсолютной температуре T в молекулярной системе на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится энергия, равная $\frac{kT}{2}$, где постоянная Больцмана k выражается через универсальную газовую постоянную и число Авогадро $k = \frac{R}{N_A}$. Поэтому внутренняя энергия ν молей идеального газа из молекул с i степенями свободы $U = N_A \nu \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \nu RT$. Например, для одноатомного идеального газа $U = \frac{3}{2} \nu RT$. С помощью уравнения Менделева-Клапейрона внутренняя энергия также может быть выражена через давление и объем газа $U = \frac{i}{2} pV$.

Решение задачи: Так как система сосуд-поршень-газ замкнута, запишем закон сохранения импульса: $mv = (m + M + m_г)V$, где V – скорость движения системы после прекращения колебаний. Запишем изменение механической энергии системы $\Delta E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2}(m + M + m_г)V^2$, и учтем, что $m, m_г << M$. Тогда получим $\Delta E = \frac{m(M - m)v^2}{2M}$. Эта энергия, отданная газу, пойдет на увеличение его внутренней энергии ΔU. Поскольку $\Delta U = \nu C_V \Delta T = 2 \cdot \frac{3}{2} R \Delta T = 3R\Delta T$, то $\Delta T = \frac{m(M - m)v^2}{6MR} \approx \frac{mv^2}{6R}$.

Задание 3.

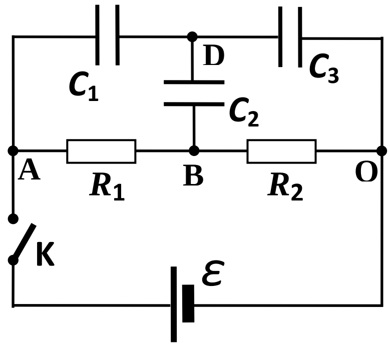
Вопрос: Схема из конденсаторов и резисторов подключается к источнику постоянного напряжения. В каком случае после завершения переходных процессов заряды конденсаторов могут зависеть от величин сопротивлений резисторов, а в каком – нет?

Задача: Перед сборкой схемы, изображенной на рисунке, все конденсаторы были разряжены. Емкости конденсаторов равны: $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ; сопротивления резисторов $R_1 = 25$ Ом, $R_2 = 10$ Ом. ЭДС источника $\mathcal{E} = 9$ В, его внутреннее сопротивление равно $r = 1$ Ом. Найдите установившийся заряд на конденсаторе C_2 после замыкания ключа. Какая из его пластин заряжена положительно?



Ответ на вопрос: Заряды конденсаторов пропорциональны напряжениям на них. Эти напряжения определяются из условий баланса напряжений, в которые также входят ЭДС источника и напряжения на резисторах. Напряжения на резисторах в установившемся (стационарном) состоянии схемы отличны от нуля и зависят от сопротивлений резисторов только в том случае, когда по резисторам текут токи. Итак, заряды конденсаторов могут зависеть от величин сопротивлений резисторов после завершения переходных процессов только в том случае, если в схеме есть замкнутые контура, по которым текут токи и после установления стационарного режима. Если таких контуров нет, и в установившемся режиме токи через все резисторы отсутствуют, то напряжения не зависят от номиналов резисторов.

Решение задачи: Будем отсчитывать потенциалы в схеме от точки O. Тогда потенциал точки B будет равен падению напряжения на сопротивлении R_2, то есть $\varphi_B = IR_2$. Величину потенциала точки D найдем из условия, что сумма зарядов в месте соединения обкладок всех трех конденсаторов равна 0. Заряды каждого из конденсаторов равны: $q_1 = C_1(\varphi_A - \varphi_D) = C_1(\mathcal{E} - Ir - \varphi_D)$, $q_2 = C_2(\varphi_B - \varphi_D)$, $q_3 = C_3\varphi_D$.



Ток, текущий по замкнутому контуру, $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}$. С учетом полярности записи напряжений на конденсаторах условие сохранения заряда $-q_1 - q_2 + q_3 = 0$. Следовательно,

$$C_1\left(-\mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}r}{R_1 + R_2 + r} + \varphi_D\right) + C_2\left(-\frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2 + r} + \varphi_D\right) + C_3\varphi_D = 0,$$

откуда $\varphi_D = \dfrac{\mathcal{E}\,[C_1(R_1 + R_2) + C_2R_2]}{(C_1 + C_2 + C_3)(R_1 + R_2 + r)}$. Значит, $q_2 = \dfrac{\mathcal{E}\,C_2\,[C_3R_2 - C_1R_1]}{(C_1 + C_2 + C_3)(R_1 + R_2 + r)} = \dfrac{15}{22}$ мкКл ()или примерно 682 нКл). Как видно, положительно заряженной оказалась нижняя обкладка конденсатора C_2.

Задание 4.

Вопрос: Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием 25 см и тонкая рассеивающая линза, модуль фокусного расстояния которой в два раза больше, плотно прижаты друг к другу. Чему будет равно фокусное расстояние «составной» линзы?

Задача: Рассеивающая линза дает изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = \frac{1}{5}$. Если вплотную к ней приставить тонкую собирающую линзу, то эта система создает прямое изображение с увеличением $\Gamma_2 = \frac{1}{3}$. Определить, с каким увеличением получится изображение от одной собирающей линзы. Расстояние от линзы до предмета во всех случаях одинаково.

Ответ на вопрос: При плотном прижатии тонких линз их оптические силы складываются. У собирающей линзы $D_1 = \frac{1}{F} = 4$ дптр, а у рассеивающей $D_2 = -\frac{1}{2F} = -2$ дптр. Поэтому оптическая сила составной линзы $D = D_1 + D_2 = +\frac{1}{2F} = +2$ дптр. Значит, ее фокусное расстояние $\frac{1}{D} = 2F = 50$ см.

Решение задачи: Из формулы линзы можно получить выражение для увеличения через фокусное расстояние F, расстояние от предмета до линзы d и расстояние от линзы до изображения f: $\Gamma = -\frac{f}{d} = \frac{F}{F-d}$. Отметим, что в этом выражении увеличение дается с учетом знака – у прямого изображения увеличение считается положительным, у перевернутых – отрицательным. Тогда (заметим, что для рассеивающей линзы изображение всегда прямое, так что $\Gamma_1 > 0$): $\frac{F_1}{F_1 - d} = +\frac{1}{5} \Rightarrow F_1 = -\frac{d}{4} \Rightarrow D_1 = -\frac{4}{d}$, и для двух линз (по условию изображение прямое) $\frac{F}{F-d} = +\frac{1}{3} \Rightarrow F = -\frac{d}{2} \Rightarrow D_C = -\frac{2}{d}$ (то есть система двух линз – все-таки рассеивающая, ибо для собирающей линзы изображение бывает прямым только при $d < F$!). Соответственно $D_C = D_1 + D_2 \Rightarrow -\frac{2}{d} = -\frac{4}{d} + D_2 \Rightarrow D_2 = \frac{2}{d} \Rightarrow F_2 = \frac{d}{2}$. Таким образом, увеличение одной второй линзы $\Gamma_2 = \frac{F_2}{F_2 - d} = -1$ (то есть размер изображения равен размеру предмета, и оно перевернутое).

БИЛЕТ № 07 (МОСКВА).

Задание 1.

Вопрос: Суммарная кинетическая энергия двух тел одинаковой массы в результате абсолютно неупругого соударения уменьшилась ровно в два раза. Каким был угол между векторами скоростей тел до соударения?

Задача: При взрыве снаряда, летевшего вертикально, в механическую энергию была преобразована часть энергии заряда, в 10 раз превосходящая кинетическую энергию снаряда перед взрывом. В результате взрыва снаряд раскололся на три осколка. На долю двух осколков – с массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 3$ кг – пришлась 50% и 25% общей кинетической энергии соответственно, причем угол разлета этих осколков составил 90°. Третий осколок полетел в горизонтальном направлении. Пренебрегая массой пороховых газов, найти массу третьего осколка.

Ответ на вопрос: При абсолютно неупругом соударении прекращается относительное движение тел, и после удара их скорости одинаковы. Обозначим $\vec{v}_{1,2}$ скорости тел до удара, и $\vec{V}$ – их общую скорость после удара. Тогда из закона сохранения импульса следует, что $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{V} \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2\vec{V}$. Возведем это соотношение в квадрат: $v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\alpha) = 4V^2$, где α – искомый угол. По условию $\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = 2\frac{2mV^2}{2}$, откуда $v_1^2 + v_2^2 = 4V^2$. Значит, $\cos(\alpha) = 0$ (вопрос в условии имеет смысл, только если обе скорости не равны нулю), то есть $\alpha = 90°$.

Решение задачи: В рамках заданных в условии предположений (сумма масс осколков равна массе снаряда, кинетическая энергия и импульс пороховых газов пренебрежимо малы) законы сохранения импульса и энергии можно записать в виде:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{V} - m_3\vec{v}_3\ , \qquad (1)$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_3v_3^2}{2} = 11\frac{MV^2}{2}\ , \qquad (2)$$

причем $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\vec{V}$ - скорость снаряда перед взрывом. Кроме того, по условию $m_1v_1^2 = \frac{11}{2}MV^2$, $m_2v_2^2 = \frac{11}{4}MV^2$. Подставляя эти соотношения в (2), получим, что $m_3v_3^2 = \frac{11}{4}MV^2$. Возводя (1) в квадрат и учитывая перпендикулярность пар векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и $\vec{V}$ найдем, что $m_3^2v_3^2 + M^2V^2 = m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2$. С учетом полученных выражений

$$\frac{11}{4}m_3 + m_1 + m_2 + m_3 = m_1\frac{11}{2} + m_2\frac{11}{4} \Rightarrow m_3 = \frac{18m_1 + 7m_2}{15} = 2\,\text{кг}.$$

ОТВЕТ: $m_3 = \frac{18m_1 + 7m_2}{15} = 2$ кг.

Задание 2.

Вопрос: Чему равна работа массы m идеального газа в процессе, уравнение которого в координатах плотность давление имеет вид $p(\rho) = p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$, а плотность изменяется от $3\rho_0$ до $2\rho_0$? Константы ρ_0 и p_0 считать известными.

Задача: Над постоянным количеством идеального газа производят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изотерм. Работа в этом цикле положительна и она в $k = 2$ раза меньше, чем количество теплоты, полученное газом в процессе изохорного нагревания. Абсолютная температура «более горячей» изотермы в $n = 1{,}6$ раза выше, чем температура «более холодной». Пусть этот процесс – цикл рабочего тела тепловой машины. Чему равен КПД этого цикла?

Ответ на вопрос: В этом процессе $p(V) = p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{m}V\right)$, то есть в координатах давление-объем диаграмма процесса – прямая линия. Работа равна площади под этой диаграммой (площади трапеции), то есть $A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$. Ясно, что $p_1 = \frac{2}{3}p_0$, $p_2 = \frac{1}{2}p_0$, $V_1 = \frac{m}{3\rho_0}$, и $V_2 = \frac{m}{2\rho_0}$. Поэтому $A_{12} = \frac{7p_0 m}{72\rho_0}$.

Решение задачи: Ясно, что идеальный газ в этом цикле получает тепло в процессах изохорного нагревания (обозначим его Q) и в процессе изотермического расширения, в котором подведенное тепло равно совершенной работе A_+ (по I Началу термодинамики $Q = A + \Delta U$, а в изотермическом процессе $\Delta U = 0$). Следовательно, теплота нагревателя $Q_H = Q + A_+$. Работа в цикле равна сумме положительной работы в процессе изотермического расширения A_+ и отрицательной – в процессе изотермического сжатия A_-. В изотермических процессах, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $p(V) = \frac{\nu RT}{V}$ (ν – количество вещества, а T – абсолютная температура), и поэтому даже без вычисления интеграла $A_{12} = \int\limits_{V_1}^{V_2} p(V)dV$ ясно, что при одинаковом количестве вещества и одинаковом соотношении граничных объемов модули работ пропорциональны абсолютным температурам изотерм. Поэтому $A_- = -\frac{1}{n}A_+$, и работа в цикле $A = \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_+ = \frac{n-1}{n}A_+$. По условию $A = \frac{Q}{k}$, поэтому $A_+ = \frac{n}{k(n-1)}Q$. Следовательно, $Q_H = \frac{k(n-1)+n}{k(n-1)}Q$, и поэтому КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{n-1}{k(n-1)+n} = \frac{3}{14} \approx 0{,}214$.

ОТВЕТ: $\eta = \frac{n-1}{k(n-1)+n} = \frac{3}{14} \approx 0{,}214$.

Задание 3.

Вопрос: Как вычисляется потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов? Найдите максимальную кинетическую энергию каждого из двух тел одинаковой массы, с одинаковым зарядом q, отпущенных без начальной скорости с расстояния l в пустом пространстве? Электрическая постоянная равна ε_0.

Задача: Три одинаковых небольших тела массой m с зарядом q каждое удерживают на горизонтальной плоскости в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Какое расстояние s пройдет каждое из тел, если их отпустить? Какую максимальную скорость u приобретут тела в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость равен μ. Электрическая постоянная равна ε_0.

Ответ на вопрос: Потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов вычисляется как сумма энергий попарных взаимодействий. Для каждой пары зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r_{12}, энергия взаимодействия $U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$. Два одинаковых тела в предложенном примере будут разгоняться симметрично, и одинаковая максимальная кинетическая энергия каждого из них достигается при удалении на очень большое расстояние (энергия взаимодействия практически рана нулю). Если пренебречь излучением, то максимальная кинетическая энергия каждого из тел равна половине начальной энергии взаимодействия, то есть $E_K^{(\max)} = \dfrac{q_1 q_2}{8\pi\varepsilon_0 l}$.

Решение задачи: Благодаря симметрии системы все три тела пройдут одинаковое расстояние. К моменту остановки работа сил трения будет равна изменению потенциальной энергии взаимодействия тел. Три тела образуют три пары, а расстояние между телами в результате смещения на s увеличится от a до $a+s\sqrt{3}$ (радиус описанной около треугольника со стороной a окружности равен $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, а тела смещаются в точности по радиусам этой окружности, то есть $\dfrac{a}{\sqrt{3}}+s=R'=\dfrac{a'}{\sqrt{3}} \Rightarrow a'=a+s\sqrt{3}$). Сила трения скольжения на горизонтальной плоскости $F_{mp}=\mu mg$, поэтому $3\mu mg\cdot s = 3\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+s\sqrt{3}}\right)$. Из этого соотношения следует, что $s=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu mga}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Ответ имеет смысл, если $\mu<\dfrac{\sqrt{3}\,q^2}{4\pi\varepsilon_0 mga^2}$ (в противном случае трение не позволит телам сдвинуться с места). Для смещений $x<s$ кинетическая энергия тел может быть найдена из закона изменения энергии: $\dfrac{3mv^2}{2}==3\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+x\sqrt{3}}\right)-3\mu mg\cdot x$. Выразим отсюда кинетическую энергию одного тела через величину $z\equiv(a+x\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 \mu mg}{\sqrt{3}\,q^2}}$. Это выражение имеет вид $\dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}+\mu mg\dfrac{a}{\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{q^2\mu mg}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}}}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$. Из очевидного неравенства $\dfrac{(z-1)^2}{z}\geq 0$ следует, что при любом $z\geq 0$ справедливо неравенство $z+\dfrac{1}{z}\geq 2$, причем равенство (то есть минимальное значение этого выражения) достигается при $z=1$. При этом значении выражение для кинетической энергии сворачивается в полный квадрат. Значит, максимум скорости определяется формулой $u=\sqrt{\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 am}}-\sqrt{\dfrac{2\mu ga}{\sqrt{3}}}$. Этот ответ имеет смысл при том же требовании к μ.

ОТВЕТ: $s=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu mga}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $u=\sqrt{\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 am}}-\sqrt{\dfrac{2\mu ga}{\sqrt{3}}}$ при $\mu<\dfrac{\sqrt{3}\,q^2}{4\pi\varepsilon_0 mga^2}$; при большем значении коэффициента трения $s=0$ и $u=0$.

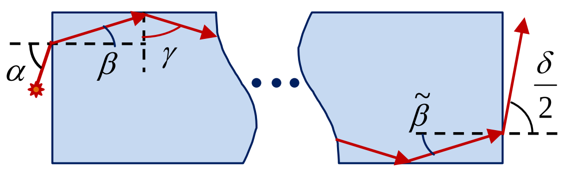
Задание 4.

Вопрос: Опишите явление полного внутреннего отражения.

Задача: Точечный источник света расположен перед торцом длинного стеклянного цилиндрического световода с показателем преломления *n*. Источник расположен на оси цилиндра. Чему равен угол δ между крайними лучами конического светового пучка, выходящего из противоположного торца световода?

Ответ на вопрос: Явление полного внутреннего отражения состоит в том, что при падении на границу раздела двух сред из оптически более плотной 1 в оптически менее плотную 2 с углами падения $\alpha \geq \alpha_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ преломленный луч отсутствует, и энергия падающего луча в отсутствие поглощения полностью переходит в энергию отраженного луча. Здесь $n \equiv \frac{n_1}{n_2}$ – относительный показатель преломления сред. Угол $\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ называется углом полного внутреннего отражения. Можно обратить внимание, что в такой ситуации закон преломления света предсказывает для синуса угла преломления невозможное значение $\sin(\beta) \geq 1$.

Решение задачи: Постольку источник «точечный» (то есть его размеры много меньше диаметра световода) и расположен вблизи торца, то максимальный угол падения лучей от него на этот торец близок к 90°. Поскольку источник расположен на оси цилиндра, пучок лучей в световоде



распространяется, оставаясь симметричным относительно оси, и поэтому максимальный угол преломления при выходе из «дальнего» торца равен $\delta/2$. Согласно закону преломления, максимальный угол преломления на «ближнем» торце световода равен $\beta_{\max} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin(\alpha_{\max})\right) \approx \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Минимальный угол падения на боковую поверхность $\gamma_{\min} \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Здесь могут быть две ситуации в зависимости от соотношения этого угла с углом полного внутреннего отражения $\gamma_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Если $\gamma_{\min} \geq \gamma_0$ (это соответствует тому, что $\sin(\gamma_{\min}) \approx \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n}$, то есть $n \geq \sqrt{2}$), то все лучи, попавшие в световод, испытывают полное внутреннее отражение на боковых поверхностях и доходят до дальнего торца ($\tilde{\beta}_{\max} = \beta_{\max}$). Поэтому $\frac{\delta}{2} = \arcsin[n\sin(\beta_{\max})] \approx \alpha_{\max}$. Значит, в этом случае угол раствора пучка близок к 180°. Если же $\gamma_{\min} < \gamma_0$ ($n < \sqrt{2}$), то в распространяться по «длинному» световоду с многократным отражением от боковой поверхности смогу только лучи с $\gamma \geq \gamma_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. В этом случае $\tilde{\beta}_{\max} = \frac{\pi}{2} - \gamma_0$, и $\frac{\delta}{2} = \arcsin[n\sin(\tilde{\beta}_{\max})] = \arcsin(\sqrt{n^2 - 1})$. Таким образом, в этом случае $\delta = 2\arcsin(\sqrt{n^2 - 1})$.

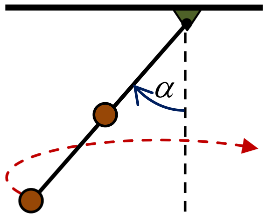
ОТВЕТ: $\delta = 2\arcsin(\sqrt{n^2 - 1})$ при $n < \sqrt{2}$, и δ близок к 180° при $n \geq \sqrt{2}$ (засчитывается также ответ, что при $n \geq \sqrt{2}$ δ равен удвоенному максимальному углу падения лучей от источника на торец световода).

БИЛЕТ № 08 (УФА).

Задание 1.

Вопрос: Конический маятник – материальная точка, подвешенная в вакууме в однородном поле тяжести на невесомой нерастяжимой нити, вращающаяся по окружности в горизонтальной плоскости. Как зависит период его вращения от угла отклонения нити от вертикали?

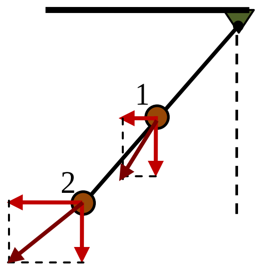
Задача: К нижнему концу легкого жесткого стержня длиной L прикрепили маленький тяжелый шарик, а к его середине – второй, точно такой же. Верхний конец стержня закрепили шарнирно на потолке. Конструкцию отклонили от вертикали и подтолкнули таким образом, что во время движения стержень все время образует с вертикалью один и тот же угол α. С какой угловой скоростью вращается стержень? Трением в шарнире и сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g.



Ответ на вопрос: При вращении груза в горизонтальной плоскости вертикальная составляющая силы натяжения нити должна уравновешивать вес груза ($F\cos(\alpha) = mg$), а «радиальная» – создавать центростремительное ускорение груза при вращении ($F\sin(\alpha) = m\omega^2 L\sin(\alpha)$). Разделив эти соотношения друг на друга, вычисляем угловую скорость вращения $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos(\alpha)}}$. Период вращения конического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos(\alpha)}{g}}$, то есть он пропорционален корню квадратному из косинуса угла отклонения маятника от вертикали.

Решение задачи: Вертикальные (y) компоненты сил, с которыми стержень действует на шарики, уравновешивают веса шариков: $F_{1y} = F_{2y} = mg$. Радиальные (x) компоненты создают центростремительные ускорения: $F_{1x} = m\omega^2 \dfrac{L}{2}\sin(\alpha)$ и $F_{2x} = m\omega^2 L\sin(\alpha)$. По III закону Ньютона, точно с такими же по величине, но противоположными по направлению силами шарики действуют на стержень (именно эти силы показаны на рисунке). Сумма моментов сил, приложенных к «легкому» стержню, должна равняться нулю. Запишем это требование:

$$mg\frac{L}{2}\sin(\alpha) + mgL\sin(\alpha) - m\omega^2\frac{L}{2}\sin(\alpha)\frac{L}{2}\cos(\alpha) - m\omega^2 L\sin(\alpha)L\cos(\alpha) = 0.$$



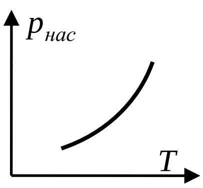
Выражая из него угловую скорость вращения, получаем: $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{5L\cos(\alpha)}}$.

Задание 2.

Вопрос: Насыщенные и ненасыщенные пары. Зависимость давления насыщенного пара от температуры.

Задача: В очень прочном баллоне объемом $V = 90$ л находится 134 г смеси метана (CH_4), кислорода (O_2) и азота (N_2). При температуре $t_1 = 33°C$ давление в баллоне равнялось $p_1 = 1{,}4 \cdot p_0$, где $p_0 \approx 101$ кПа – нормальное атмосферное давление. Слабая электрическая искра подожгла метан, вызвав реакцию $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$, причем в ходе этой реакции оба реагента израсходовались полностью. После завершения реакции содержимое баллона охладили до температуры $t_2 = 100°C$. Каким стало давление в баллоне? Растворением углекислого газа пренебречь.

Ответ на вопрос: Насыщенным называют пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью Это равновесие динамическое – молекулы постоянно переходят из пара в жидкость и обратно, но в равновесии эти потоки в среднем уравновешиваются. Соответственно на границе жидкости с ненасыщенным паром доминирует испарение – жидкость переходит в пар, и пар в присутствии жидкости со временем становится насыщенным. Выходу молекул из жидкости в пар препятствуют межмолекулярные силы притяжения, и для интенсивного испарения жидкости обычно нужно сообщать энергию (теплоту парообразования) для увеличения потенциальной энергии взаимодействия молекул. При увеличении температуры увеличивается кинетическая энергия молекул, и они легче преодолевают притяжение соседей. Поэтому переход молекул из жидкости в пар становится намного интенсивнее, и динамическое равновесие устанавливается при более высокой плотности насыщенного пара. Вместе с плотностью и температурой пара растет нелинейным образом давление насыщенного пара (давление, плотность и абсолютная температура пара с молярной массой μ связаны соотношением $p = \dfrac{\rho RT}{\mu}$). Типичная форма графика зависимости $p_{нас}(T)$ показана на рисунке.

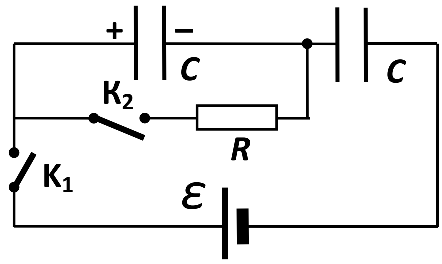


Решение задачи: Обозначим количества веществ: азота – ν_1, метана – ν_2, кислорода – ν_3. Из уравнения Менделеева-Клапейрона и закона Дальтона следует, что $p_1 V = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) R T_1$. Из этого соотношения находим, что $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \dfrac{p_1 V}{R T_1} \approx 5$ молей. Поскольку в ходе последующей реакции и метан, и кислород израсходовались полностью, то $\nu_3 = 2\nu_2$. Кроме того, масса смеси . $m = \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3$. Решая полученную систему, найдем, что $\nu_1 = 0{,}5$ моля, $\nu_2 = 1{,}5$ моля, и $\nu_3 = 3$ моля. Согласно уравнению реакции, в результате сгорания метана в баллоне образовалось $\nu_2 = 1{,}5$ моля CO_2 и $\nu_3 = 3$ моля H_2O. Давление, создаваемое азотом и углекислым газом при 100°C, равно $p_2' = (\nu_1 + \nu_2)\dfrac{RT_2}{V} \approx 68{,}9$ кПа. Если бы вся вода находилась в газообразном состоянии, то ее давление тоже бы определялось аналогичным уравнением, то есть $p_2'' = \nu_3 \dfrac{RT_2}{V} \approx 103{,}3$ кПа. Но это больше, чем давление насыщенного пара при этой температуре, и поэтому так быть не может – на самом деле часть пара сконденсировалась, и $p_2'' = p_{нас}(T_2) \approx 101$ кПа. Поэтому давление в баллоне стало равно $p_2 = p_2' + p_2'' \approx 170$ кПа.

Задание 3.

Вопрос: Незаряженный конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения и зарядили до максимального заряда. Чему равен КПД зарядки, то есть отношение энергии, переданной конденсатору, к работе, произведенной источником?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, «левый» конденсатор изначально был заряжен до напряжения $U_0 = \mathcal{E}/2$. Сначала замкнули ключ К$_1$, а затем, спустя некоторое время – ключ К$_2$. Какое количество тепла выделится в резисторе R после этого? Внутреннее сопротивление источника и сопротивление соединительных проводов пренебрежимо малы.



Ответ на вопрос: В процессе зарядки напряжение на конденсаторе растет до максимального значения, равного ЭДС источника. Поэтому источник переместит заряд $q = C\mathcal{E}$, и совершит работу $A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$. Увеличение энергии конденсатора $\Delta E_C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$. Таким образом, $\frac{\Delta E_C}{A} = 0{,}5$, и КПД зарядки изначально не заряженного конденсатора равен 50 %.

Решение задачи: После замыкания ключа К$_1$ источник дозаряжает батарею из двух конденсаторов одинаковой емкости. Обозначим конечный заряд «левого» конденсатора на этой стадии q_1, а «правого» – q_2. Из условия баланса напряжений $\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}$. Кроме того, по закону сохранения заряда (сумма зарядов пластин конденсаторов, соединенных только друг с другом, не может измениться) $-q_1 + q_2 = -C\frac{\mathcal{E}}{2}$. Поэтому новые заряды конденсаторов равны $q_1 = \frac{3C\mathcal{E}}{4}$ и $q_1 = \frac{C\mathcal{E}}{4}$. После замыкания ключа К$_2$ «левый» конденсатор оказывается закорочен резистором, и он полностью разряжается. В ходе разряда через резистор протекает заряд $\Delta q' = \frac{3C\mathcal{E}}{4}$. Кроме того, через этот же резистор течет ток зарядки «правого» конденсатора, который должен зарядится до заряда $C\mathcal{E}$ (напряжение на «левом» конденсаторе падает до нуля, а сумма напряжений должна уравновешивать ЭДС источника). Для этого источнику нужно переместить на «правый» конденсатор заряд $\Delta q'' = \frac{3C\mathcal{E}}{4}$. Полный протекший через резистор после замыкания ключа К$_2$ заряд $\Delta q = \Delta q' + \Delta q'' = \frac{3C\mathcal{E}}{2}$. При этом напряжение на резисторе падало от начального значения $\frac{3\mathcal{E}}{4}$ до нуля по линейному (как функция протекшего заряда) закону. Значит, выделившееся в резисторе количество теплоты $Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathcal{E}}{4}\cdot\frac{3C\mathcal{E}}{2} = \frac{9C\mathcal{E}^2}{16}$. Такой же ответ можно получить и из закона сохранения энергии: $Q = A_{ист} - \Delta E_C$.

Задание 4.

Вопрос: От чего зависит поперечное увеличение изображения предмета, создаваемого тонкой собирающей линзой на экране?

Задача: При помощи тонкой линзы на экране создано изображение пламени небольшой свечи, расположенного на главной оптической оси линзы перпендикулярно ей. При этом отношение линейных размеров изображения и самого пламени было равно $|\Gamma| = \frac{1}{3}$. Не двигая свечу, линзу переместили на расстояние $s = 50$ см вдоль ее оптической оси. После перемещения и подбора положения экрана отношение размеров стало равно $|\Gamma'| = 2$. Найти оптическую силу линзы.

Ответ на вопрос: Из построения хода лучей для линзы ясно, что поперечное увеличение предмета равно отношению расстояний от линзы до изображения b и от линзы до источника a: $\Gamma_\perp = -\frac{b}{a}$ (увеличение принимают отрицательным, когда изображение перевернуто.). Из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{F}{F-a}$. Таким образом, увеличение зависит от соотношения расстояния от предмета до линзы и фокусного расстояния линзы. Для разных действительных источников $a > 0$ мы можем получить $\Gamma_\perp > 1$ (при $0 < a < F$), $\Gamma_\perp < 0, |\Gamma_\perp| > 1$ (при $F < a < 2F$) и $\Gamma_\perp < 0, |\Gamma_\perp| < 1$ (при $a > 2F$).

Решение задачи: Так как изображение создается на экране, то оно действительное. Следовательно, линза является собирающей, а изображение перевернутое. В этом случае увеличение обычно считают отрицательным, причем $\Gamma = -\frac{b}{a}$, и с учетом формулы линзы $b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma = \frac{F}{F-a}$. Следовательно, для первого изображения $\frac{F}{F-a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 4F$. Для увеличения изображения линзу нужно было придвинуть ближе к свече. Поэтому после перемещения линзы $a \to a - s \Rightarrow \frac{F}{F-a+s} = -2 \Rightarrow a - s = \frac{3}{2}F \Rightarrow F = \frac{2}{5}s$. Следовательно, оптическая сила линзы $D = \frac{5}{2s} = 5$ Дптр.

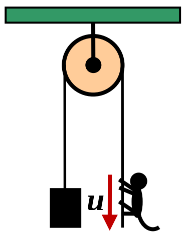
7, 8 и 9 классы: задания и возможные решения

БИЛЕТ № 12 (ЧЕЛЯБИНСК).

Задание 1.

Вопрос: Тяжелый груз поднимают на прочной веревке, перекинутой через легкий неподвижный блок, вращающийся без трения. Сначала, действуя с силой F_1, груз разгоняют с ускорением 1м/с^2, а затем, действуя с силой F_2, груз перемещают с постоянной скоростью 2 м/с. Как изменятся величины сил, если блок заменить на такой же, но с существенно большей массой (увеличатся, уменьшатся, останутся неизменными)? Ответ объяснить.

Задача: Легкая нерастяжимая веревка перекинута через легкий блок, вращающийся без трения. На одном конце веревки прикреплен груз, который удерживают на месте. На другом конце неподвижно повисла обезьянка. В некоторый момент времени обезьянка начинает, перебирая лапами, вытягивать мимо себя веревку с постоянной скоростью $u = 2$ м/с, и сразу после этого груз аккуратно отпускают. Спустя какое время скорости обезьянки и груза окажутся равны? Масса обезьянки на 10% больше массы груза. Веревка по блоку не скользит, ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Ответ на вопрос: При разгоне груза скорость вращения блока тоже должна увеличиваться. Для этого сумма моментов сил, приложенных к массивному блоку, должна отличаться от нуля – сила, с которой действуют на веревку, должна быть больше веса груза. Таким образом, при замене груза на массивный сила, необходимая для разгона груза, должна увеличиться: $F_1' > F_1$. При равномерном движении груза вращение блока тоже должно быть равномерным (если веревка не скользит по блоку), и в этом случае момент сил натяжения веревки должен равняться нулю. Поэтому сила натяжения веревки со стороны поднимающего устройства должна равняться весу груза, независимо от массы блока, то есть $F_2' = F_2$.

Решение задачи: Направим координатную ось x вертикально вниз. Сумма длин вертикальных отрезков нити от блока до груза и обезьяны должна уменьшаться со скоростью u. Следовательно, координаты груза x_1 и координата обезьяны x_2 должны удовлетворять соотношению $x_1 + x_2 = const - ut$. Следовательно, изменения этих координат за малое время Δt связаны соотношением $\Delta x_1 + \Delta x_2 = -u\Delta t$, которое означает, что в любой момент времени проекции скоростей на ось x связаны: $v_1 + v_2 = -u$. Движение, согласно условию, начинается таким образом, что при $t = 0$ скорость груза $v_1(0) = 0$. Значит, $v_2(0) = -u$. Рассуждая аналогично, замечаем, что проекции ускорений грузов также связаны: $a_1 + a_2 = 0$. Кроме того, эти ускорения удовлетворяют уравнениям движения, следующим из II закона Ньютона: $ma_1 = mg - T$ и $1{,}1 \cdot ma_2 = 1{,}1 \cdot mg - T$ (где T – сила натяжения нити). С учетом связи ускорений первое уравнение дает $-ma_2 = mg - T$. Вычитая это соотношение из второго уравнения, найдем, что $2{,}1 \cdot ma_2 = 0{,}1 \cdot mg \Rightarrow a_2 = \frac{g}{21}$. Соответственно $a_1 = -\frac{g}{21}$, и законы изменения скоростей груза и обезьянки записываются в виде $v_1(t) = -\frac{g}{21}t$ и $v_2(t) = -u + \frac{g}{21}t$. Момент времени, когда скорости равны, определяется из уравнения $-\frac{g}{21}t = -u + \frac{g}{21}t$, откуда

$t = \frac{21u}{2g} = 2{,}1$с.

ОТВЕТ: $t = \frac{21u}{2g} = 2{,}1$с.

Задание 2.

Вопрос: Как производится измерение температуры? Опишите шкалу температур Цельсия.

Задача: Ученик 8 класса на лабораторной работе налил в калориметр кипящую воду, и стал бросать туда чайной ложкой мокрый снег (состоящий на 80% из кристалликов льда и на 20% из жидкой воды, находящихся в равновесии). После таяния двух ложек снега температура воды в калориметре стала равна $t_2 = 80°C$. Какое минимальное количество ложек нужно еще бросить в калориметр, чтобы снег перестал таять? Можно считать, что в каждой ложке всегда одно и то же количество снега, и калориметр не переполняется. Теплоемкостью калориметра пренебречь. Удельная теплота плавления льда λ = 336 кДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4,2 кДж/(кг·°C).

Ответ на вопрос: Для измерения температуры тела оно приводится в тепловое равновесие с термометром – стандартным телом с индикацией температуры, проградурованной в соответствии с некоторой температурной шкалой. Для градуировки термометра по шкале Цельсия используются две «реперные» точки: температура плавления льда при нормальном атмосферном давлении принимается за 0°С, а температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении принимается за 100°С. Между этими точками шкала разделяется на градусы равномерно, и от них в обе стороны распространяется с таким же шагом.

Решение задачи: Обозначим массу добавляемой порции снега m, а начальную массу воды в калориметре M. Ясно, что находящиеся в равновесии компоненты мокрого снега имели температуру 0°С, а кипящая вода имела температуру $t_0 = 100°C$. Тогда уравнение теплового баланса для установления равновесия после добавления двух порций позволяет найти массу порции: $\lambda \cdot 1{,}6m + c \cdot 2mt_2 = cM(t_0 - t_2) \Rightarrow m = \dfrac{cM(t_0 - t_2)}{2(0{,}8 \cdot \lambda + ct_2)}$. Снег перестанет таять после добавления n-ой ложки, если температура станет равна 0°С (последняя порция при этом может и не растаять целиком). Таким образом, должно выполняться требование

$$n \cdot \lambda \cdot 0{,}8m \geq cM\,t_0 \Rightarrow n \geq \frac{cM\,t_0}{0{,}8\lambda m} = \frac{2t_0}{t_0 - t_2}\left(1 + 1{,}25\frac{ct_2}{\lambda}\right) = 22{,}5.$$

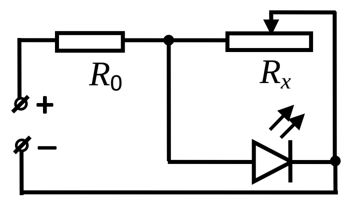
Значит, после 23-ей ложки снег перестает таять (23-я ложка растает частично, а 24-я вовсе не будет таять). То есть «еще» (кроме двух начальных) нужно добавить 21 ложку.

ОТВЕТ: 21 ложку.

Задание 3.

Вопрос: Когда светодиод находится в «открытом» состоянии, напряжение на нем практически не зависит от протекающего тока. Пусть это напряжение равно 6 В. Какова величина силы тока, протекающего через светодиод, если он потребляет мощность 9 Вт?

Задача: Цепь питания светодиода собрана по схеме, показанной на рисунке. Яркость его свечения регулируется с помощью реостата. При сопротивлении реостата $R_1 = 10$ Ом мощность, потребляемая светодиодом, равна $P_1 = 4{,}5$ Вт, при $R_2 = 15$ Ом – $P_2 = 5{,}1$ Вт. Какую мощность будет потреблять светодиод при максимальном сопротивлении реостата, равном $R_3 = 30$ Ом? Можно считать, что источник идеальный, и что напряжение на светодиоде не зависит от протекающего тока.



Ответ на вопрос: Потребляемая элементом цепи мощность $P = U \cdot I$. Значит, $I = \dfrac{P}{U_0} = 1{,}5$ А.

Решение задачи: Пусть U – напряжение на клеммах источника, а U_0 – напряжение на светодиоде, которое, согласно условию, постоянно. Тогда ток в ветви с источником $I = \dfrac{U - U_0}{R_0}$. Сила тока через реостат $I_x = \dfrac{U_0}{R_x}$, и поэтому ток через светодиод $I_D = I - I_x = \dfrac{U - U_0}{R_0} - \dfrac{U_0}{R_x}$. Следовательно, зависимость мощности, потребляемой светодиодом, от сопротивления реостата описывается формулой $P_D = \dfrac{U_0(U - U_0)}{R_0} - \dfrac{U_0^2}{R_x} \equiv P_0 - \dfrac{U_0^2}{R_x}$. Запишем эту формулу для трех значений сопротивления реостата:

$$\begin{cases} P_1 = P_0 - \dfrac{U_0^2}{R_1} \\ P_2 = P_0 - \dfrac{U_0^2}{R_2} \\ P_3 = P_0 - \dfrac{U_0^2}{R_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 - P_1 = U_0^2\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) \\ P_3 - P_2 = U_0^2\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}\right) \end{cases} \Rightarrow P_3 = (1+z)P_2 - zP_1.$$

Здесь $z \equiv \dfrac{R_1(R_3 - R_2)}{R_3(R_2 - R_1)}$. В нашем случае $z = 1$, и $P_3 = 2P_2 - P_1 = 5{,}7$ Вт. Задачу можно решать «в числах» (сразу подставляя в эти уравнения величины сопротивлений) – тогда выкладки становятся более простыми. Также можно заметить, что мощность есть линейная функция обратного сопротивления реостата, и что в нашем случае $\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}$. Тогда сразу ясно, что $P_2 - P_1 = P_3 - P_2 \Rightarrow P_3 = 2P_2 - P_1$.

ОТВЕТ: $P_3 = 2P_2 - P_1 = 5{,}7$ Вт.

Задание 4.

Вопрос: В чем состоит условие плавания тела на поверхности глубокого водоема?

Задача: На тонкий прочный стержень насажены два небольших шара одинакового радиуса: очень легкий – на конце стержня, тяжелый – на расстоянии четверти длины стержня от другого конца. Массы стержня и легкого шара намного меньше массы тяжелого. Нам нужно убедиться, что эта конструкция будет плавать на поверхности в глубоком водоеме. Если поместить ее в неглубокий бассейн, то она располагается в нем так, что свободный конец упирается в дно, а легкий шар плавает на поверхности. Мы измерили отношение объема его выступающей части к объему всего этого шара *k*. При каких *k* конструкция действительно будет плавать на глубине?

Ответ на вопрос: При плавании тела на поверхности глубокого водоема тело не касается дна, и поэтому вес тела должен уравновешиваться только силой Архимеда. Максимальная величина этой силы достигается при полном погружении тела, и равна весу вытесняемой телом жидкости. Для этого необходимо, чтобы масса тела не превышала массу жидкости в объеме тела. Это требование можно также сформулировать в виде «средняя плотность тела не должна превышать плотности жидкости».

Решение задачи: Так как шары одинаковы по объему, то величина силы Архимеда, действующая на легкий шар в бассейне (F_1) связана с величиной силы Архимеда, действующей на тяжелый шар (F_2) соотношением $F_1 = (1-k)F_2$. Пренебрегая весом легкого шара, запишем условие равновесия моментов сил относительно точки опоры (ясно, что плечо силы Архимеда и силы тяжести, действующих на тяжелый шар, в четыре раза меньше, чем плечо силы Архимеда, действующей на легкий шар): $F_1 l_1 + F_2 \dfrac{l_1}{4} = Mg\dfrac{l_1}{4}$. С учетом предыдущего соотношения находим, что $F_2 = \dfrac{Mg}{5-4k}$. Для плавания в глубоком водоеме нужно, чтобы максимальная сила Архимеда (когда оба шара погружены целиком) превышала вес всех тел, примерно равный весу тяжелого шара. Таким образом, должно выполняться требование $2F_2 > Mg \Rightarrow \dfrac{2Mg}{5-4k} > Mg \Rightarrow k > \dfrac{3}{4}$.

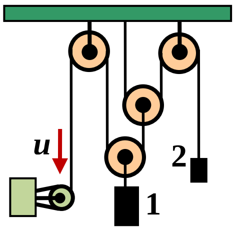
ОТВЕТ: при $k > \dfrac{3}{4}$.

БИЛЕТ № 14 (ЖЕЛЕЗНОВОДСК).

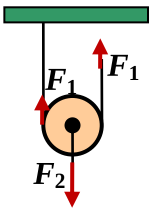
Задание 1.

Вопрос: Подвижный блок. Опишите соотношение сил и перемещений при использовании подвижного блока.

Задача: Система из двух легких прочных тросов, двух неподвижных и двух подвижных блоков и двух грузов подвешена к потолку (см. рисунок). Все блоки – легкие и вращаются без трения, тросы по блокам не скользят. Конец одного из тросов закреплен на шкиве выключенной лебедки, груз 2 удерживают на месте. Этот груз аккуратно отпускают, а затем почти сразу включают лебедку, которая начинает вытягивать трос с постоянной скоростью $u = 1{,}5$ м/с. За какое время груз 2 поднимется на высоту $h = 1{,}5$ м? Отношение масс грузов $m_1 : m_2 = 4$. Временем разгона грузов и их смещением при разгоне пренебречь.



Ответ на вопрос: Подвижный блок – простой механизм (показан на рисунке). При смещении свободного конца веревки, перекинутой через подвижный блок, оно поровну распределяется между двумя сторонами петли, и смещение оси блока будет в два раза меньше, чем смещение конца веревки: $s_1 = 2s_2$. При плавном равномерном движении блока (или если масса блока пренебрежимо мала при конечных ускорениях) сумма сил, приложенных к блоку, должна равняться нулю, и для легкой веревки сила, приложенная к оси блока, будет в два раза больше силы, натягивающей веревку: $2F_1 = F_2$. В результате подвижный блок не дает выигрыша в работе: $F_1 s_1 = F_2 s_2$.



Решение задачи: Направим координатную ось x вертикально вниз. Движение, согласно условию, начинается таким образом, что грузы в процессе разгона движутся под действием сил натяжения нитей. Если рассмотреть «верхний» из подвижных блоков, то, как следует из ответа, мы придем к выводу, что сила натяжения «левой» нити T_1 в два раза больше, чем «правой» (T_2). Уравнения движения грузов, следующие из II закона Ньютона, имеют вид: $m_1 a_1 = m_1 g - 2T_1 = m_1 g - 4T_2$ и $m_2 a_2 = m_2 g - T_2$. С учетом соотношения масс обнаруживается, что в процессе разгона $a_2 = a_1$, то есть $v_2(t) = v_1(t)$ (начальные скорости обоих грузов равны нулю). Сумма длин вертикальных отрезков «левой» нити в процессе движения системы после разгона должна уменьшаться со скоростью u, а сумма длин вертикальных отрезков «правой» - оставаться неизменной. Поэтому координаты грузов $x_{1,2}$ и координата верхнего блока $x_Б$ должны удовлетворять соотношениям $2x_1 - x_Б = const - ut$ и $x_2 + 2x_Б = const$. Следовательно, $4x_1 + x_2 = const - 2ut$. Значит, изменения этих координат за малое время Δt связаны соотношением $4\Delta x_1 + \Delta x_2 = -2u\Delta t$, и проекции скоростей грузов на ось x тоже связаны: $4v_1 + v_2 = -2u$. Таким образом, при $t = 0$ скорости грузов $v_1(0) = v_2(0) = -\frac{2u}{5}$. Так как скорости и дальше должны быть связаны этим соотношением при одинаковых ускорениях, то эти ускорения равны нулю, и скорости будут оставаться постоянными! Об этом можно было догадаться и без прямого вычисления, если обратить внимание, что при выключенной лебедке грузы находятся в равновесии. Итак, груз 2 поднимается вверх со скоростью $\frac{2u}{5}$. Поэтому искомое время подъема $t = \frac{5h}{2u} = 2{,}5$ с.

ОТВЕТ: $t = \frac{5h}{2u} = 2{,}5$ с.

Задание 2.

Вопрос: Что происходит с кинетической энергией и потенциальной энергией взаимодействия молекул H_2O при таянии льда? Ответ обосновать.

Задача: Ученик 8 класса на лабораторной работе поместил в калориметр $M = 115$ г мокрого снега (состоящего на 60% из кристалликов льда и на 40% из жидкой воды, находящихся в равновесии), и стал добавлять туда ложкой кипящую воду. После добавления одной ложки и установления равновесия масса ледяных кристаллов в калориметре стала равна $m_1 = 63$ г. Школьник добавил еще 11 ложек горячей воды. Какой стала температура содержимого калориметра после установления нового равновесия? Можно считать, что в каждой ложке всегда одно и то же количество воды, и калориметр не переполняется. Теплоемкостью калориметра пренебречь. Удельная теплота плавления льда λ = 336 кДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4,2 кДж/(кг·°С).

Ответ на вопрос: При таянии льда температура не меняется, а скорость движения молекул определяется именно температурой. Поэтому кинетическая энергия молекул остается неизменной. Вместе с тем их полная энергия в среднем увеличивается – это ясно из того соображения, что для плавления льду нужно сообщать энергию. Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия молекул при переходе воды из твердой в жидкую фазу увеличивается.

Решение задачи: Обозначим массу добавляемой порции кипятка m. Ясно, что находящиеся в равновесии компоненты мокрого снега имели температуру 0°С, а кипящая вода имела температуру $t_0 = 100°C$. Тогда уравнение теплового баланса для установления равновесия после добавления одной ложки порций позволяет найти массу порции: $\lambda \cdot (0{,}6M - m_1) = cmt_0 \Rightarrow m = \frac{\lambda \cdot (0{,}6M - m_1)}{ct_0} = 4{,}8$ г. Важно обратить внимание, что, пока лед в составе снега тает, температура всей жидкой воды в равновесных состояниях остается равной 0°С (теплота остывания кипятка идет только на таяние льда). При этом одна ложка позволяет растопить $0{,}6M - m_1 = 6$ г льда. Из этого ясно, после добавление еще 11 ложек кипятка весь лед растает. Ясно, что $\frac{m_1}{0{,}6M - m_1} = 10{,}5$ ложек кипятка растопят весь лед, а оставшиеся 0,5 ложки пойдут на нагрев всей воды. Поэтому

$$c(M + 11{,}5m)t = c \cdot 0{,}5m(t_0 - t) \Rightarrow t = \frac{m}{2(M + 12m)} t_0 = \frac{\lambda(0{,}6M - m_1)t_0}{2[M(ct_0 + 7{,}2\lambda) - 12m_1\lambda]} \approx +1{,}4°C.$$

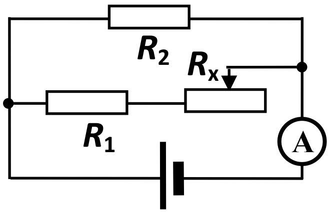
Здесь допустим «поэтапный» численный расчет.

ОТВЕТ: $t \approx +1{,}4°C$.

Задание 3.

Вопрос: Как сопротивление однородной проволоки зависит от ее геометрических параметров?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, используются проградуированный реостат, амперметр с очень малым внутренним сопротивлением и практически идеальный источник с ЭДС 24 В. Изменяя сопротивление реостата, фиксируем показания амперметра: при $R_a = 10$ Ом сила тока $I_a = 1{,}6$ А, а при $R_b = 40$ Ом она равна $I_b = 1{,}2$ А. Найдите сопротивления резисторов R_1 и R_2.



Ответ на вопрос: Сопротивление однородной проволоки зависит от площади ее поперечного сечения S и длины l и определяется формулой $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление материала проволоки. Для зачета вопроса достаточно указать, что сопротивление прямо пропорционально отношению длины к площади поперечного сечения, а коэффициент пропорциональности зависит от материала.

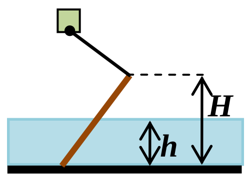
Решение задачи: Пусть Е – ЭДС источника (напряжение на его клеммах при разомкнутой цепи). Ток через амперметр равен сумме токов через обе ветви с резисторами: $I = \frac{\mathrm{E}}{R_1 + R_x} + \frac{\mathrm{E}}{R_2}$. Значит, сопротивления резисторов удовлетворяют системе уравнений $\frac{I_a}{\mathrm{E}} = \frac{1}{R_1 + R_a} + \frac{1}{R_2}$ и $\frac{I_b}{\mathrm{E}} = \frac{1}{R_1 + R_b} + \frac{1}{R_2}$. Вычитая эти уравнения, получаем уравнение для R_1: $\frac{I_a - I_b}{\mathrm{E}} = \frac{R_b - R_a}{(R_1 + R_a)(R_1 + R_b)}$, или $R_1^2 + (R_a + R_b)R_1 + R_a R_b - \frac{\mathrm{E}(R_b - R_a)}{I_a - I_b} = 0$. Выбирая положительный корень этого уравнения, находим, что $R_1 = -\frac{R_a + R_b}{2} + \sqrt{\frac{(R_b - R_a)^2}{4} + \frac{\mathrm{E}(R_b - R_a)}{I_a - I_b}} = 20$ Ом. Теперь из любого соотношения находим второе сопротивление, например: $R_2 = \frac{\mathrm{E}(R_1 + R_a)}{(R_1 + R_a)I_a - \mathrm{E}} = 30$ Ом.

ОТВЕТ: $R_1 = -\frac{R_a + R_b}{2} + \sqrt{\frac{(R_b - R_a)^2}{4} + \frac{\mathrm{E}(R_b - R_a)}{I_a - I_b}} = 20$ Ом, $R_2 = \frac{\mathrm{E}(R_1 + R_a)}{(R_1 + R_a)I_a - \mathrm{E}} = 30$ Ом.

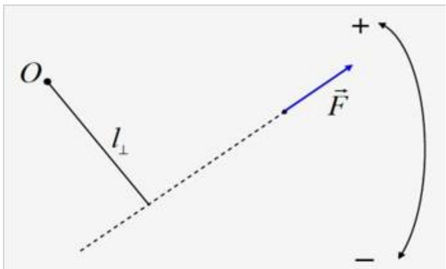
Задание 4.

Вопрос: Дайте определение момента силы и сформулируйте правило рычага.

Задача: Массивный однородный стержень верхним концом прикрепили к легкому прочному тросу (другой конец троса закреплен неподвижно). При этом нижним концом стержень опирался на пол бассейна, трос был перпендикулярен стержню, а верхний конец стержня находился на высоте $H = 0{,}9$ м. Трос оказался натянут с силой $T_0 = 80$ Н. Какой станет сила натяжения троса, если бассейн заполнить водой до глубины $h = 0{,}45$ м? Плотность материала стержня в два раза больше плотности воды, нижний конец стержня по дну бассейна не скользит.



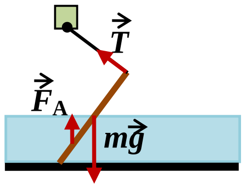
Ответ на вопрос: Плечом силы относительно оси называют расстояние от оси до линии



действия силы (в школьной программе рассматриваются только случаи, когда ось перпендикулярна плоскости возможного вращения тела). **Момент силы** – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении: $M = \pm|\vec{F}|\cdot l_\perp$.

Правило рычага утверждает, что в состоянии равновесия алгебраическая сумма моментов сил, приложенных к «рычагу» (протяженному твердому телу), равна нулю.

Решение задачи: Пока воды не было, на стержень действовали сила натяжения троса, сила тяжести и сила реакция дна. Плечо силы натяжения относительно точки опоры равно длине стержня L, а плечо силы тяжести – расстоянию от точки опоры до проекции середины стержня на дно (обозначим его l).



Запишем правило рычага: $T_0L - mgl = 0 \Rightarrow T_0 = \frac{l}{L}mg$. После появления воды к этим силам добавилась сила Архимеда. Ясно, что объем погруженной части стержня составляет часть $\frac{h}{H}$ от общего объема. С учетом соотношения плотностей ясно, что величина силы Архимеда равна $F_A = \frac{h}{2H}mg$. Кроме того, ее плечо $l_A = \frac{h}{H}l$. Запишем правило рычага для стержня относительно точки опоры в присутствии воды: $TL + F_Al_A - mgl = 0 \Rightarrow T = \frac{l}{L}mg\left(1-\frac{h^2}{2H^2}\right) = T_0\left(1-\frac{h^2}{2H^2}\right) = 70$ Н.

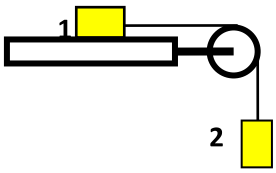
ОТВЕТ: $T = T_0\left(1-\frac{h^2}{2H^2}\right) = 70$ Н.

БИЛЕТ № 16 (МОСКВА).

Задание 1.

Вопрос: Под весом груза веревка длиной 1 м растягивается на 1 см. На сколько растянется под весом этого же груза такая же (по материалу и сечению) веревка длиной 2м? Ответ объяснить.

Задача: Два груза с одинаковой массой $m = 10$ кг прикреплены к разным концам легкой и прочной длинной веревки, перекинутой через свободно вращающийся блок. Груз 1 удерживают на горизонтальной поверхности (коэффициент трения между ним и поверхностью $\mu = 0{,}6$), а второй висит свободно. Вся система помещена в лифт. Лифт поехал вверх с ускорением $a = 5$ м/с^2, а грузы отпустили, и они пришли в движение (первый поехал вправо, набирая скорость, а второй – вниз). Найти удлинение веревки во время движения. Известно, что ее коэффициент жесткости $k = 4000$ Н/м. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Ответ на вопрос: Из вопроса ясно, что вес веревки не учитывается. Тогда сила натяжения веревки в обоих случаях в каждом сечении равна весу груза, и каждая половина веревки длиной 2 м растягивается так же, как одна веревка длиной 1 м. Следовательно, веревка длиной 2 м растянется на 2 см.

Решение задачи: Направим координатную ось x горизонтально вправо, а ось y вертикально вниз. Запишем уравнения движения для груза 1 в проекции на эти оси (ясно, что по y он движется вместе с поверхностью с ускорением лифта): $ma_x = T - F_{тр}$ и $ma = mg - N \Rightarrow N = m(g+a)$ (здесь T – сила натяжения нити, N – сила нормальной реакции поверхности). Поскольку груз 1 скользит, то $F_{тр} = \mu N = \mu m(g+a)$. Для груза 2 уравнение движения в проекции на y $ma_2 = mg - T$. При этом нерастяжимость нити приводит к связи ускорений: относительно лифта оба груза должны двигаться с одинаковыми по величине ускорениями. Таким образом, $a_2 = a_x - a$. Поэтому $ma_x = m(g+a) - T$, и, подставляя это соотношение в первое уравнение, находим: $T = \frac{1+\mu}{2}m(g+a)$. По закону Гука удлинение веревки $\Delta l = \frac{1+\mu}{2k}m(g+a) \approx 3$см.

ОТВЕТ: $\Delta l = \frac{1+\mu}{2k}m(g+a) \approx 3$см.

Задание 2.

Вопрос: Что произойдет, если мокрую снаружи кастрюлю с влажным снегом поставить на стол и щедро посолить снег, помешав его? Ответ обосновать.

Задача: Какую массу газа нужно сжечь, чтобы получить $V = 3$ литра кипящей воды из мокрого снега (масса которого на 60 % состоит из ледяных кристалликов и на 40 % из воды), имеющего температуру t_0 = 0 ºС? Снег помещен в железный котелок массы M = 500 г, а для его нагревания используется газовая горелка. Конструкция горелки такова, что на нагрев котелка и его содержимого тратится 50% количества теплоты, выделяющегося при сгорании газа. Плотность воды ρ = 1 г/см^3, удельная теплоемкость воды $c_в$ = 4,2 кДж/(кг·ºС), удельная теплоемкость железа $c_ж$ = 0,46 кДж/(кг·ºС), удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг, удельная теплота сгорания газа q = 34 МДж/кг.

Ответ на вопрос: Кастрюля примерзнет к столу. Добавка соли приведет к понижению температуры плавления льда, и ледяные кристаллы, входящие в состав снега, начнут таять. Теплота плавления будет забрана у окружающих тел, и поэтому кастрюля и вода на ее внешней поверхности и между столом и кастрюлей заметно охладятся, и вода, которая была по температуре близка к 0°С, замерзнет.

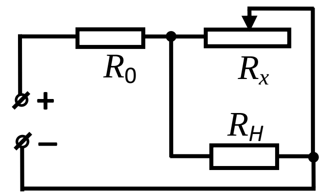
Решение задачи: Масса воды, которую требуется получить, $m_в = \rho V = 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 3$ кг, масса льда, который нужно растопить, $m_л = m_в \cdot 0{,}6 = 1{,}8$ кг. Количество теплоты, требующееся для растапливания льда при 0 С, равно $Q_1 = m_л \lambda = 1{,}8 \cdot 330 = 594$ кДж. Количество теплоты, требующееся для нагревания котелка и воды до температуры 100 С, $Q_2 = (Mc_ж + m_в c_в)\cdot(t - t_0) = (0{,}5 \cdot 0{,}46 + 3 \cdot 4{,}2)\cdot 100 = 1283$ кДж. Количество теплоты, которое должно выделится при сгорании газа, $Q_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{0{,}5} = 3754$ кДж. Масса газа $m = \frac{Q_3}{q} \approx 85{,}3$ г.

ОТВЕТ: $m = \frac{Q_3}{q} \approx 85{,}3$ г.

Задание 3.

Вопрос: Закон Джоуля-Ленца.

Задача: Цепь питания нагревательного элемента показана на рисунке. Его мощность регулируется с помощью реостата. При сопротивлении реостата, равном $R_1 = 5$ Ом, мощность, потребляемая нагревательным элементом $P_1 = 25$ Вт, а при $R_2 = 12$ Ом она равна $P_2 = 36$ Вт. Какую мощность будет потреблять нагревательный элемент при $R_x = R_3 = 18$ Ом?



Ответ на вопрос: При протекании тока в среде с сопротивлением выделяется тепло. Причина у этого тепловыделения та же, что и у появления сопротивления – это взаимодействие подвижных носителей заряда с атомами среды (например, электронов проводимости с кристаллической решеткой материала). В стационарном режиме мощность тепловыделения равна мощности работы электростатических сил по перемещению заряда, то есть , где и – напряжение на рассматриваемом участке цепи, а и – сила тока в этом участке. Для линейных элементов цепи, подчиняющихся закону Ома (, где и – сопротивление участка), можно использовать выражения .

Решение задачи: Пусть U – напряжение на клеммах источника. Тогда ток в ветви с источником $I = \dfrac{U}{R_0 + R_x R_H/(R_x + R_H)}$. Этот ток делится между нагревательным элементом и реостатом обратно пропорционально сопротивлениям, и поэтому ток через нагревательный элемент $I_H = \dfrac{R_x}{R_x + R_H} I = \dfrac{U R_x}{R_0 R_H + R_x(R_0 + R_H)}$. Тогда зависимость мощности, потребляемой нагревательным элементом, от сопротивления реостата описывается формулой $P_H = I_H^2 R_H \equiv U^2 R_N \left(\dfrac{R_x}{R_0 R_H + R_x(R_0 + R_H)}\right)^2$. Запишем эту формулу для величины $\dfrac{1}{\sqrt{P_H}} = \dfrac{R_0 + R_H}{U\sqrt{R_H}} + \dfrac{R_0\sqrt{R_H}}{U}\dfrac{1}{R_x} \equiv A + \dfrac{B}{R_x}$, которая проще зависит от сопротивления реостата. Теперь рассмотрим ее для трех значений этого сопротивления:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{P_1}} = A + \dfrac{B}{R_1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{P_2}} = A + \dfrac{B}{R_2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{P_3}} = A + \dfrac{B}{R_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{P_1}} - \dfrac{1}{\sqrt{P_2}} = B\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{P_2}} - \dfrac{1}{\sqrt{P_3}} = B\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{P_3}} = \frac{1+z}{\sqrt{P_2}} - \frac{z}{\sqrt{P_1}}.$$

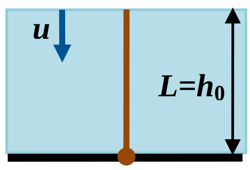
Таким образом, $P_3 = \dfrac{P_1 P_2}{[(1+z)\sqrt{P_1} - z\sqrt{P_2}\,]^2}$. Здесь $z \equiv \dfrac{R_1(R_3 - R_2)}{R_3(R_2 - R_1)}$. В нашем случае $P_3 \approx 42{,}2$ Вт. Задачу можно решать «в числах» (сразу подставляя в эти уравнения величины сопротивлений) – тогда выкладки становятся более простыми.

ОТВЕТ: $P_3 \approx 42{,}2$ Вт.

Задание 4.

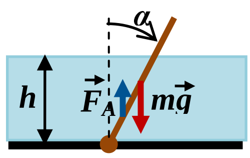
Вопрос: Прочный стакан перевернули вверх дном и опустили целиком в воду. Оказалось, что сила Архимеда больше его веса. Может ли быть, что при опускании на некоторую глубину она станет меньше веса стакана? Ответ объяснить.

Задача: В широкий сосуд с водой помещен тонкий стержень постоянного сечения из очень легкого материала – его плотность в $n = 9$ раз меньше плотности воды. Стержень шарнирно закреплен на дне сосуда (то есть он может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира). Первоначально уровень воды в сосуде равнялся длине стержня, и стержень располагался вертикально. Затем уровень воды начали плавно (с постоянной скоростью u, которая значительно меньше скорости, которую набрал бы стержень, падая в отсутствие воды) понижать. Найдите закон изменения с течением времени угла отклонения стержня от вертикали $\alpha(t)$.



Ответ на вопрос: При опускании стакана в воду вверх дном в нем остается воздух. Именно объем воздуха обеспечивает большую часть силы Архимеда (плотность материала «прочных» стаканов обычно больше плотности воды). Однако при погружении на большую глубину давление воды увеличивается, и воздух будет сжиматься, что приведет к уменьшению силы Архимеда, действующей на стакан с воздухом. Поэтому она действительно может оказаться меньше веса стакана – с «большой» глубины стакан может и не всплыть!

Решение задачи: Так как уровень воды понижается плавно и с малой скоростью, то можно считать, что в каждый момент времени стержень находится практически в равновесном (для данной глубины слоя воды) положении. Поэтому сумма моментов сил, приложенных к стержню (относительно шарнира), равна нулю в любой момент времени. Рассмотрим момент времени, когда глубина слоя воды равна h, и стержень находится в наклонном положении. На стержень действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила реакции шарнира (на рисунке не показана – ее плечо относительно шарнира равно нулю, и в уравнение баланса моментов она не входит). Точка приложения силы тяжести – центр стержня (плечо равно $\frac{L}{2}\sin(\alpha)$), точка приложения силы Архимеда – середина погруженной части стержня (плечо $\frac{h}{2}\mathrm{tg}(\alpha)$). Величина силы Архимеда $F_A = \rho_0 \frac{h}{\cos(\alpha)} \frac{mg}{\rho SL} = n\frac{h}{L\cos(\alpha)}mg$.



Поэтому условие равновесия дает $n\frac{h}{L\cos(\alpha)}mg\frac{h}{2}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{L}{2}\sin(\alpha)mg = 0$. Как видно, $\cos(\alpha) = \sqrt{n}\frac{h}{L} = \frac{3h}{L}$. Ясно, что глубина слоя изменяется по закону $h(t) = L - ut$. Пока $h \geq \frac{L}{3}$, то есть $t \leq \frac{2L}{3u}$, стержень остается вертикальным (косинус не может быть больше 1), а при $\frac{2L}{3u} < t \leq \frac{L}{u}$ угол наклона стержня $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{3(L-ut)}{L}\right)$. Дальше вода уходит полностью, и стержень лежит на дне.

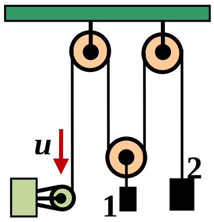
ОТВЕТ: $\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \frac{2L}{3u} \\ \arccos\left(\frac{3(L-ut)}{L}\right), & \frac{2L}{3u} < t \leq \frac{L}{u} \end{cases}$.

БИЛЕТ № 18 (КЕМЕРОВО).

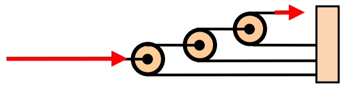
Задание 1.

Вопрос: Какое минимальное число подвижных блоков нужно использовать, чтобы получить выигрыш в силе в 8 раз?

Задача: На легкой нерастяжимой веревке с помощью трех блоков подвешены два груза. Блоки легкие, вращаются без трения, веревка по ним не скользит. Один из концов веревки закреплен на шкиве выключенной лебедки. Удерживая груз 2 на месте, включают лебедку и сразу после этого груз 2 отпускают. Лебедка вытягивает веревку с постоянной скоростью $u = 2$ м/с. Спустя какое время скорости грузов окажутся равны по модулю? Соотношение масс грузов $m_2 : m_1 = 2$. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Ответ на вопрос: Каждый подвижный блок дает выигрыш в силе в два раза. Поэтому для получения выигрыша в силе в 8 раз необходимо минимум 3 подвижных блока, соединенных последовательно (2^3=8). Пример конструкции, обеспечивающей такой выигрыш в силе, приведен на рисунке. Согласно золотому правилу механики, этот простой механизм не дает выигрыша в работе – по расстоянию эта конструкция дает проигрыш в 8 раз.



Решение задачи: Направим координатную ось x вертикально вниз. Сумма длин вертикальных отрезков нити в процессе движения системы должна убывать со скоростью вытягивания веревки лебедкой. Поэтому координаты грузов $x_{1,2}$ должны удовлетворять соотношению $x_2 + x_1 + x_1 = const - ut \Rightarrow 2x_1 + x_2 = const - ut$. Следовательно, изменения этих координат за малое время Δt связаны соотношением $2\Delta x_1 + \Delta x_2 = -u\Delta t$, которое означает, что в любой момент времени проекции скоростей этих тел на ось x связаны: $2v_1 + v_2 = -$. Движение, согласно условию, начинается таким образом, что при $t = 0$ скорость второго груза $v_2(0) = 0$. Значит, $v_1(0) = -\dfrac{u}{2}$. Рассуждая аналогично, замечаем, что проекции ускорений грузов также связаны: $a_2 = -2a_1$. Кроме того, эти ускорения удовлетворяют уравнениям движения, следующим из II закона Ньютона: $m_1 a_1 = m_1 g - 2T$ и $m_2 a_2 = m_2 g - T$ (где T – сила натяжения нити). С учетом связи ускорений и соотношения масс второе уравнение дает $-4m_1 a_1 = 2m_1 g - T \Rightarrow 8m_1 a_1 = -4m_1 g + 2T$. Складывая последнее уравнение с первым уравнением движения, находим, что $a_1 = -\dfrac{1}{3}g$, а вместе с тем и $a_2 = +\dfrac{2}{3}g$. Законы изменения скоростей грузов записываются в виде $v_1(t) = -\dfrac{u}{2} - \dfrac{g}{3}t$ и $v_2(t) = +\dfrac{2}{3}gt$, и условие $|v_1(t)| = |v_2(t)|$ выполняется в момент времени $\dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{3}gt = \dfrac{2}{3}gt \Rightarrow t = \dfrac{3u}{2g} \approx 0{,}3$ с.

ОТВЕТ: $t = \dfrac{3u}{2g} \approx 0{,}3$ с.

Задание 2.

Вопрос: Можете ли Вы объяснить, почему газы обладают намного меньшей теплопроводностью, чем жидкости?

Задача: Ученик 8 класса решил выяснить, какую температуру имеет вода, текущая из холодного крана в его квартире. У него был только ртутный медицинский термометр. Он налил в термос теплой воды и измерил ее температуру: она оказалась равной $t_0 = 40{,}0°C$. Он поместил массивную гайку на ниточке под поток холодной воды из крана, а затем перенес гайку в термос, подождал и измерил новую температуру воды в термосе $t_1 = 37{,}9°C$. Гайка еще раз была помещена под струю воды, а затем в термос, и после этого вода в термосе имела температуру $t_2 = 36{,}0°C$. Какова же температура холодной воды? Теплоемкостью термометра пренебречь.

Ответ на вопрос: Механизм теплопроводности на молекулярном уровне – передача энергии от молекулы к молекуле через соударения. Чем чаще происходят соударения молекул, тем большее количество теплоты передается в единицу времени. Скорость движения молекул зависит от температуры – при одинаковой температуре и примерно одинаковой массе молекул их скорости примерно одинаковы. А вот расстояния между молекулами зависят от агрегатного состояния вещества. В газах молекулы находятся на расстояниях, в десятки раз превышающих их размеры, а в жидких телах – на расстояниях порядка размеров самих молекул. Поэтому в жидкостях количество ударов, которые испытывает молекула в единицу времени, намного больше, чем в газах. Это и приводит к значительно более высокой теплопроводности жидкостей по сравнению с газами.

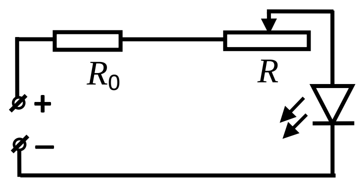
Решение задачи: Пусть C – теплоемкость термоса с водой, а c – теплоемкость гайки. Уравнение теплового баланса для первого погружения гайки в воду в термосе: $C(t_0 - t_1) = c(t_1 - t)$. Здесь t – искомая температура воды из холодного крана. Для второго погружения: $C(t_1 - t_2) = c(t_2 - t)$, и теперь можно разделить эти соотношения друг на друга и найти t: $\frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_2} = \frac{t_1 - t}{t_2 - t} \Rightarrow t = \frac{t_0 t_2 - t_1^2}{t_0 + t_2 - 2t_1} = 17{,}95°C$.

ОТВЕТ: $t = \frac{t_0 t_2 - t_1^2}{t_0 + t_2 - 2t_1} = 17{,}95°C$.

Задание 3.

Вопрос: Когда светодиод находится в «открытом» состоянии, напряжение на нем практически не зависит от протекающего тока. Во сколько раз изменяется потребляемая светодиодом мощность при увеличении протекающего через него тока в два раза?

Задача: Цепь питания светодиода собрана по схеме, показанной на рисунке. Яркость его свечения регулируется с помощью реостата. При сопротивлении реостата $R_1 = 5$ Ом мощность, потребляемая светодиодом, равна $P_1 = 3$ Вт, при $R_2 = 10$ Ом – $P_2 = 2$ Вт. Какую мощность будет потреблять светодиод при максимальном сопротивлении реостата, равном $R_3 = 20$ Ом? Можно считать, что источник идеальный, и что напряжение на светодиоде не зависит от протекающего тока.



Ответ на вопрос: Мощность, потребляемая элементом цепи постоянного тока, $P = U \cdot I$. Если напряжение практически постоянно, то эта мощность изменяется пропорционально силе тока. Поэтому при увеличении протекающего через светодиод тока в два раза его мощность потребления возрастает тоже в 2 раза.

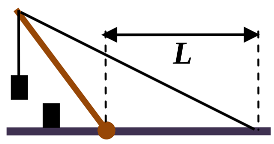
Решение задачи: Поскольку напряжение на светодиоде и на клеммах источника практически постоянны, то ток в цепи $I = \frac{U}{R_0 + R}$ (где U – разность напряжения источника и напряжения на светодиоде). Мощность, потребляемая светодиодом, $P = U_0 \cdot \dfrac{U}{R_0 + R}$. Удобно анализировать зависимость обратной мощности от сопротивления реостата: $\dfrac{1}{P} = \dfrac{R_0}{UU_0} + \dfrac{R}{UU_0}$ (это линейная функция). Записав соотношения $\dfrac{1}{P_1} = \dfrac{R_0}{UU_0} + \dfrac{R_1}{UU_0}$ и $\dfrac{1}{P_2} = \dfrac{R_0}{UU_0} + \dfrac{R_2}{UU_0}$. Вычитая эти равенства, получим $\dfrac{1}{P_2} - \dfrac{1}{P_1} = \dfrac{R_2 - R_1}{UU_0}$. Аналогично из $\dfrac{1}{P_2} = \dfrac{R_0}{UU_0} + \dfrac{R_2}{UU_0}$ и $\dfrac{1}{P_3} = \dfrac{R_0}{UU_0} + \dfrac{R_3}{UU_0}$ следует $\dfrac{1}{P_3} - \dfrac{1}{P_2} = \dfrac{R_3 - R_2}{UU_0} = \dfrac{R_3 - R_2}{R_2 - R_1}\left(\dfrac{1}{P_2} - \dfrac{1}{P_1}\right)$. Подставляя значения сопротивлений, находим: $\dfrac{1}{P_3} - \dfrac{1}{P_2} = 2\left(\dfrac{1}{P_2} - \dfrac{1}{P_1}\right)$. Таким образом, $P_3 = \dfrac{P_1 P_2}{3P_1 - 2P_2} = 1{,}2\,\text{Вт}$.

ОТВЕТ: $P_3 = \dfrac{P_1 P_2}{3P_1 - 2P_2} = 1{,}2\,\text{Вт}$.

Задание 4.

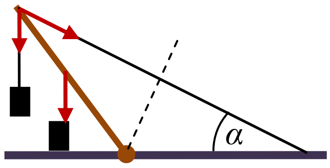
Вопрос: Центр тяжести – это точка приложения равнодействующей всех сил, действующих на тело со стороны поля тяготения. Всегда ли центр тяжести тела совпадает с его центром масс? Ответ объяснить.

Задача: Тонкий жесткий стержень длины L шарнирно закреплен на горизонтальной поверхности (он может свободно вращаться в вертикальной плоскости). Его конец с помощью легкого нерастяжимого троса прикреплен к поверхности в точке, которая удалена от шарнира на расстояние, равное длине стержня (см. рисунок). Длина троса в $\sqrt{3}$ раз больше длины стержня. Когда к концу стержня подвесили небольшой груз, то сила натяжения нити оказалась равна 21 Н. После подвешивания к первому грузу второго (точно такого же) эта сила возросла до 26 Н. Найдите массу стержня и каждого из грузов. Ускорение свободного падения $g \approx 10\ \text{м/с}^2$.



Ответ на вопрос: Нет, не всегда. Центр тяжести тела совпадает с его центром масс в однородном поле тяжести – в этом случае силы тяжести, действующие на разные массивные элементы тела, имеют совпадающие направления и пропорциональны массе каждого элемента. В неоднородном поле тяжести центр масс и центр тяжести не совпадают.

Решение задачи: Из геометрии понятно, что в равнобедренном треугольнике, образованном стержнем, тросом и прямой на поверхности, угол при основании равен 30°. На стержень действуют: сила натяжения троса, вес стрежня и вес груза. Правило моментов относительно шарнира для первого случая дает уравнение $mg\dfrac{L}{2} + Mg\dfrac{L}{4} - T_1\dfrac{L}{2} = 0$. Из него находим $2m + M = \dfrac{2T_1}{g}$. Для



второго случая, как нетрудно понять, аналогично получится $4m + M = \frac{2T_2}{g}$. Отметим, что здесь m – масса груза, а M – масса стержня. Из этих уравнений находим: $m = \frac{T_2 - T_1}{g} = 0{,}5$ кг и $M = 2\frac{2T_1 - T_2}{g} = 3{,}2$ кг.

ОТВЕТ: масса стержня $M = 2\frac{2T_1 - T_2}{g} = 3{,}2$ кг, масса каждого из грузов $m = \frac{T_2 - T_1}{g} = 0{,}5$ кг.

БИЛЕТ № 19 (НИЖНИЙ НОВГОРОД).

Задание 1.

Вопрос: Два тела, брошенные под углом к горизонту с одинаковой скоростью, имеют одинаковую дальность полета, но разное время полета. Силы сопротивления воздуха нет. Как связаны углы, под которыми эти тела были брошены?

Задача: Две частицы одновременно начали двигаться в однородном поле тяжести g. Начальные их скорости равны по модулю v_0 и лежат в одной вертикальной плоскости. Угол наклона вектора одной из скоростей к горизонту равен α, а другой — 2α. В какой момент времени τ от начала движения скорости частиц окажутся сонаправленными? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ на вопрос: Дальность полета тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью v_0, определяется формулой $L = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$. Поэтому совпадение дальностей для двух тел при одинаковой начальной скорости возможно, если $\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2)$. Это означает, что $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$.

Решение задачи: Будем использовать систему координат, в которой ось x направлена горизонтально в плоскости движения, а ось y – вертикально вверх. По оси x тело движется равномерно, а по оси y равноускоренно (с ускорением свободного падения). Закон изменения компонент скорости $v_x \equiv v_0\cos(\alpha)$ и $v_y = v_0\sin(\alpha) - gt$. Угол наклона скорости к горизонту в момент времени t определяется соотношением $\mathrm{tg}(\beta) = \frac{v_y}{v_x} = tg(\alpha) - \frac{g}{v_0\cos(\alpha)}t$. Поэтому сонаправленность скоростей означает, что $\mathrm{tg}(\alpha) - \frac{g}{v_0\cos(\alpha)}\tau = \mathrm{tg}(2\alpha) - \frac{g}{v_0\cos(2\alpha)}\tau$. Следовательно,

$$\tau = \frac{v_0}{g}\frac{[\mathrm{tg}(2\alpha) - \mathrm{tg}(\alpha)]\cos(\alpha)\cos(2\alpha)}{\cos(\alpha) - \cos(2\alpha)} = \frac{v_0}{g}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \cos(2\alpha)}.$$

Это выражение можно еще упростить, воспользовавшись тригонометрическими формулами $\cos(\alpha) - \cos(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)$ и $\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Тогда $\tau = \frac{v_0}{g}\frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(3\alpha/2)}$.

ОТВЕТ: $\tau = \frac{v_0}{g}\frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(3\alpha/2)}$.

Задание 2.

Вопрос: При соблюдении необходимых предосторожностей воду можно при нормальном атмосферном давлении охладить ниже 0°C. До какой температуры нужно охладить такую «переохлажденную» воду, чтобы при возвращении в устойчивое равновесное состояние она вся замерзла? Удельная теплота плавления льда λ = 336 кДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4,2 кДж/(кг·°C).

Задача: Ученик 8 класса на лабораторной работе налил в калориметр 100 г воды с температурой 0°C и стал бросать туда толченый лед из лабораторного морозильника с температурой t_1 = –40°C. Нам известно, что уже после первой порции 7,5 г воды превратились в лед. Но школьник этого не знал, и он отправил в калориметр <u>еще</u> 13 таких же порций льда, каждый раз встряхивая калориметр для перемешивания содержимого и дожидаясь установления теплового равновесия. Какова в итоге оказалась температура содержимого калориметра? Калориметр не переполняется. Теплоемкостью калориметра пренебречь. Удельная теплота плавления льда λ = 336 кДж/кг, удельная теплоемкость льда c = 2,1 кДж/(кг·°C).

Ответ на вопрос: Ясно, что для полного замерзания воды нужно, чтобы количества теплоты, которое выделится даже при полном замерзании, не хватило для прогрева всей воды выше равновесной температуры 0°C. Значит, температура переохлажденной воды должна быть меньше «критической» t_c, определяемой из условия . Значит, вода замерзнет вся при .

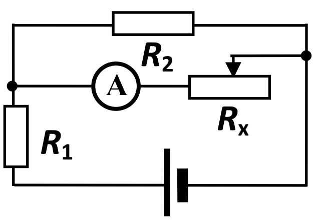
Решение задачи: Запишем уравнение теплового баланса для добавления первой порции с массой m и образованием льда массой Δm. Пока вода замерзла не вся, температура системы остается равной $t_0 = 0°\mathrm{C}$. Поэтому $cm(t_0 - t_1) = \lambda\Delta m \Rightarrow m = \dfrac{\lambda\Delta m}{c(t_0 - t_1)} = 30\,\text{г}$. Так как температура неизменна, то каждая из последующих порций той же массы приводит к замерзанию 7,5 г воды. Всего для полного замерзания требуется $\dfrac{m}{\Delta m} = 13\dfrac{1}{3}$ порций, а школьник добавил в общей сложности 14 порций (420 г) толченого льда. Поэтому после добавления 400 г льда у него в калориметре получились M=500 г льда с температурой 0°C, к которым еще было добавлено $m' = 20\,\text{г}$ льда с температурой t_1. Уравнение теплового баланса для установления равновесия имеет вид: $cM(t_0 - t) = cm'(t - t_1)$, и из него находим конечную температуру содержимого калориметра: $t = \dfrac{Mt_0 + m't_1}{M + m'} = -\dfrac{20}{13}\,°\mathrm{C} \approx -1{,}54°\mathrm{C}$.

ОТВЕТ: $t = -\dfrac{20}{13}\,°\mathrm{C} \approx -1{,}54°\mathrm{C}$.

Задание 3.

Вопрос: Амперметр подключили последовательно с резистором на 98 Ом, и измерили протекающую через него силу тока. Потом подключили последовательно с ними еще один такой же резистор, и подали на них то же самое напряжение. Сила тока, регистрируемая амперметром, уменьшилась в 1,98 раза. Чему равно внутреннее сопротивление амперметра?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, используются проградуированный реостат, амперметр с очень малым внутренним сопротивлением и практически идеальный источник с ЭДС 24 В. Изменяя сопротивление реостата, фиксируем показания амперметра: при $R_a = 30\,\text{Ом}$ сила тока $I_a = 0{,}4\,\text{А}$, а при $R_b = 60\,\text{Ом}$ она равна $I_b = 0{,}24\,\text{А}$. Найдите сопротивления резисторов R_1 и R_2.



Ответ на вопрос: Сила тока в первом случае $I_1 = \dfrac{U}{R+r}$, а во втором $I_2 = \dfrac{U}{2R+r}$ (U – подаваемое напряжение, r – сопротивление амперметра). Из этих соотношений находим, что $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{2R+r}{R+r} = 1{,}98$. Значит, $r = \dfrac{1}{49}R = 2$ Ом.

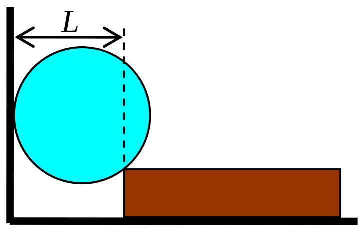
Решение задачи: Запишем уравнение теплового баланса для добавления первой порции с
Пусть Е – ЭДС источника (напряжение на его клеммах при разомкнутой цепи). Сила тока в ветви с источником равна $I = \dfrac{\mathrm{E}}{R_1 + R_2 R_x/(R_2+R_x)}$. Между параллельными ветвями этот ток делится обратно пропорционально сопротивлениям, то есть ток в ветви с амперметром $I_A = \dfrac{R_2}{R_2+R_x} I = \dfrac{\mathrm{E}}{R_1 R_x + R_2(R_1+R_x)}$. Значит, сопротивления резисторов удовлетворяют системе уравнений $\dfrac{\mathrm{E}}{I_a} = R_1 + R_a + \dfrac{R_1}{R_2}R_a$ и $\dfrac{\mathrm{E}}{I_b} = R_1 + R_b + \dfrac{R_1}{R_2}R_b$. Вычитая эти уравнения, получаем, что $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{1}{R_b - R_a}\left(\dfrac{\mathrm{E}}{I_b} - \dfrac{\mathrm{E}}{I_a}\right) = \dfrac{1}{3}$. Используем это соотношение в первом уравнении и находим: $R_1 = \dfrac{\mathrm{E}}{I_a} - \dfrac{4}{3}R_a = 20$ Ом. Соответственно $R_2 = 3R_1 = 60$ Ом.

ОТВЕТ: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 60$ Ом.

Задание 4.

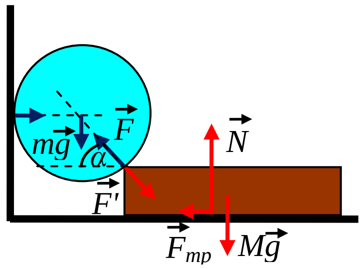
Вопрос: Опишите природу сил сухого трения. Чем различаются сила трения покоя и сила трения скольжения?

Задача: Гладкий шар массой $m = 0{,}5$ кг радиусом $R = 5$ см положили так, что он опирается на вертикальную стенку и длинный брусок массой $M = 2$ кг (см. рисунок). Брусок находится на расстоянии $L = 8$ см от стенки и лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. При какой минимальной величине коэффициента трения между бруском и поверхностью такое равновесие возможно?



Ответ на вопрос: Все силы трения есть результат межмолекулярных взаимодействий, но обычно разделяют силы трения покоя и силы трения скольжения. Сила трения покоя препятствует проскальзыванию поверхностей и всегда направлена против силы, пытающейся вызвать скольжение. Она равна этой силе по величине и ее момент уравновешивает (вместе с силой нормальной реакции) момент внешних сил, действующих на тело (чтобы обеспечить выполнение условий равновесия). При этом сила трения покоя не может быть произвольной – она принимает значения в интервале от нуля до некоторого максимального значения, зависящего от свойств поверхностей и силы прижатия их друг к другу (от величины действующей между ними силы нормальной реакции). Если внешняя двигающая сила превосходит это максимальное значение, покой нарушается и начинается скольжение. Сила трения скольжения – сила, направленная против скорости относительного движения поверхностей (она препятствует скольжению, которое уже существует). Величина силы трения скольжения в некотором интервале скоростей относительного движения слабо зависит от этой скорости и вычисляется по формуле $F_{mp} = \mu N$, где N - сила нормальной реакции, а величина μ - коэффициент трения, который зависит от свойств поверхностей. Обычно считается, что максимальная величина силы трения покоя примерно совпадает с величиной силы трения скольжения, но на самом деле для большинства поверхностей она несколько больше μN (этот эффект носит название «эффект застоя»).

Решение задачи: Рассмотрим сначала равновесие шара. Вертикальная составляющая силы F, с которой брусок давит на шар, должна уравновешивать вес шара, поэтому $F\sin(\alpha) = mg$. Из геометрии ясно, что $\cos(\alpha) = \frac{L-R}{R} = \frac{3}{5}$. Поэтому $\sin(\alpha) = \frac{4}{5}$. Значит, $F = \frac{5}{4}mg$. С точно такой же по величине силой F' шар давит на брусок. Горизонтальная составляющая этой силой уравновешивается силой трения бруска о поверхность. Поэтому $F_{mp} = F\cos(\alpha) = \frac{3}{4}mg$. Сила нормальной реакции поверхности



уравновешивает сумму вертикальной составляющей F' и веса бруска, поэтому $N = F\sin(\alpha) + Mg = (m+M)g$. Равновесие возможно, если $F_{mp} \le \mu N$. Таким образом, необходимо выполнение требования $\frac{3}{4}mg \le \mu(m+M)g \Rightarrow \mu \ge \frac{3m}{4(m+M)} = \frac{3}{20}$, или $\mu_{\min} = 0{,}15$. Отметим, что брусок «длинный», то есть нарушение равновесие за счет того, что сила заставит брусок поворачиваться вокруг дальнего ребра, невозможно.

ОТВЕТ: $\mu_{\min} = \frac{3m}{4(m+M)} = 0{,}15$.