ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года

БИЛЕТ № 01 (ЧЕЛЯБИНСК): возможные решения и ответы.

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

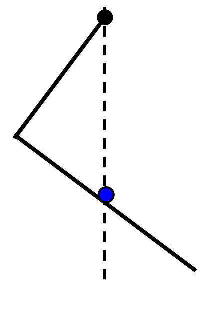
Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

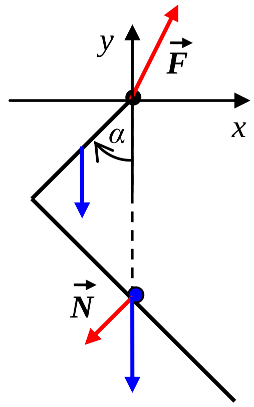
Задание 1.

Вопрос: Кубик массы m покоится на очень шероховатой ($\mu \approx 1$) горизонтальной поверхности. При помощи какой минимальной силы его можно заставить начать вращение вокруг одного из своих горизонтальных ребер? Ускорение свободного падения равно g.

Задача: Уголок, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами $l_1 \equiv a = 20$ см и $l_2 = \dfrac{3}{2}a = 30$ см. Его повесили за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости вдоль стенки, не касаясь ее). Затем в стену на одной вертикали с подвесом вбили горизонтально гладкий гвоздь – так, что теперь уголок опирается на гвоздь серединой длинного плеча. Во сколько раз и как изменилась из-за появления гвоздя величина силы, с которой уголок действует на подвес?



Ответ на вопрос: Ясно, что для придания вращения необходимо, чтобы момент внешней силы как минимум уравновесил момент силы тяжести, действующей на кубик. Момент силы тяжести относительно одного из нижних ребер равен $M_g = mg\frac{a}{2}$. Минимальная сила будет соответствовать максимальной величине плеча силы, которое равно $l_{\max} = a\sqrt{2}$. Поэтому $F_{\min} = \frac{M_g}{l_{\max}} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$. При этом горизонтальная проекция силы будет равна $F_{||} = \frac{F_{\min}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{2} < \mu mg$, то есть кубик не будет скользить.



Решение задачи: Из сил, приложенных к уголку, только сила реакция гвоздя и вес короткого плеча имеют ненулевые моменты относительно шарнира. Правило моментов (с учетом однородности уголка массы m): $\frac{2m}{5}g\frac{a}{2}\sin(\alpha) - N\frac{3a}{4} = 0 \Rightarrow N = \frac{4mg}{25}$. Здесь мы учли, что $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$. Из условия равновесия сил находим:

$$\left\{\begin{aligned} F_x &= N\sin(\alpha) = \frac{12mg}{125} \\ F_y &= mg + N\cos(\alpha) = \frac{141mg}{125} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{3\sqrt{89}}{25}mg.$$

Ясно, что до появления гвоздя сила реакции шарнира была равна mg, поэтому из-за появления гвоздя эта сила увеличилась в $\frac{3\sqrt{89}}{25} \approx 1{,}13$ раза.

Задание 2.

Вопрос: Как связаны между собой изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа и полученное им количество теплоты в изобарном процессе?

Задача: ν = 2 моля одноатомного идеального газа находится в теплоизолирующем вертикальном цилиндре с подвижным поршнем площадью S и массой m. Дно цилиндра равномерно заряжено зарядом q, а поршень — зарядом $(-q)$. Расстояние между дном сосуда и поршнем намного меньше диаметра цилиндра. Газ медленно получает от нагревателя количество теплоты Q. На какое расстояние при этом сдвинется поршень? Считайте, что электрическое поле остается однородным, трения нет. Диэлектрическая проницаемость газа равна единице, электрическая постоянная ε_0, ускорение свободного падения g, давление над поршнем равно p_0.

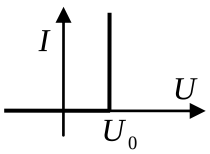
Ответ на вопрос: Рассмотрим изменение объема газа от V_1 до V_2. Изменение внутренней энергии при постоянном давлении p, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $\Delta U = \Delta\left(\frac{3}{2}\nu RT\right) = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}p(V_2 - V_1)$. Работа газа в изобарном процессе равна $A = p(V_2 - V_1) = \frac{2}{3}\Delta U$. Поэтому $Q = A + \Delta U = \frac{5}{3}\Delta U$.

Решение задачи: Поскольку электрическое поле однородно, сила притяжения между поршнем и дном цилиндра не зависит от положения поршня: $F_{эл} = |q_-|E_+ = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$. Поэтому давление p газа во время опыта постоянно (с учетом наружного атмосферного давления и веса поршня): $p = p_0 + \frac{mg + q^2/(2\varepsilon_0 S)}{S}$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в вопросе, замечаем, что полученное газом количество теплоты связано с работой по перемещению поршня соотношением $Q = \frac{5}{2} A \Rightarrow pS \cdot \Delta h = \frac{2}{5} Q$. Поэтому смещение поршня равно $\Delta h = \frac{4}{5} \frac{\varepsilon_0 Q S}{2\varepsilon_0 (p_0 S^2 + mgS) + q^2}$.

Задание 3.

Вопрос: Допустим, что для некоторого элемента цепи связь тока с приложенным напряжением дается уравнением $I = f(U)$, где f – известная функция. Как нужно рассчитывать мощность, которую будет потреблять этот элемент при подключении к клеммам источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r?

Задача: К источнику постоянной ЭДС подключают гирлянду из последовательно соединенных резистора и n одинаковых светодиодов, вольт-амперная характеристика



которых показана на рисунке ($U_0 = 1$В). Если включить в гирлянду $n_1 = 10$ светодиодов, то полная потребляемая ими мощность составит $P_1 = 175$Вт, если включить $n_2 = 28$ светодиодов, то $P_2 = 238$Вт. Определите «оптимальное» число светодиодов, при котором потребляемая мощность максимальна, а сила тока через каждый из светодиодов – минимальна (из возможных при этой мощности). Найти максимальную потребляемую мощность. Чему равна ЭДС источника?

Ответ на вопрос: В общем случае мощность, потребляемая элементом цепи, вычисляется по формуле $P = I \cdot U$. В случае заданной вольт-амперной характеристики необходимо исходить из того, что напряжение на элементе, подключенным к источнику, равно $U = \mathcal{E} - rI$. Значит, это напряжение находится из уравнения $U + r\, f(U) = \mathcal{E}$. Это уравнение может решаться как аналитически, так и графически, а затем вычисляется $P = U \cdot f(U)$.

Решение задачи: Рассмотрим гирлянду из n светодиодов, в которой течет ток (то есть ЭДС источника $\mathcal{E} > n \cdot U_0$). Сила тока $I = \frac{\mathcal{E} - n \cdot U_0}{R}$ (R – сопротивление «внешней» части цепи).

Потребляемая гирляндой мощность $P = nU_0 I = nU_0 \frac{\mathcal{E} - n \cdot U_0}{R} \equiv P_0 \cdot n(\bar{n} - n)$. Здесь введены обозначения $P_0 \equiv \frac{U_0^2}{R}$ и $\bar{n} \equiv \frac{\mathcal{E}}{U_0}$. Как видно, зависимость мощности от числа светодиодов – квадратичная, и максимум мощности соответствует значению $n = \frac{\bar{n}}{2}$. Записав соотношения $P_1 = P_0 \cdot n_1(\bar{n} - n_1)$ и $P_2 = P_0 \cdot n_2(\bar{n} - n_2)$, получаем из них уравнение на $\bar{n}$: $P_2 \cdot n_1(\bar{n} - n_1) = P_1 \cdot n_2(\bar{n} - n_2)$. Таким образом, $\bar{n} = \frac{n_2^2 P_1 - n_1^2 P_2}{n_2 P_1 - n_1 P_2} = 45$. Следовательно, ЭДС источника $\mathcal{E} = \bar{n} U_0 = 45$В. Поскольку число светодиодов – это целое число, а парабола симметрична относительно оси, то можно сделать вывод, что максимум мощности достигается при $n = 22$ и $n = 23$. По условию «оптимальности» на нужна меньшая сила тока, поэтому оптимальный режим соответствует $n_{опт} = 23$. Максимальная мощность $P_m = P_1 \cdot \frac{n_{опт}(\bar{n} - n_{опт})}{n_1(\bar{n} - n_1)} = \frac{253}{175} P_1 = 253$Вт.

Задание 4.

Вопрос: При выполнении каких условий линзу можно считать «тонкой»?

Задача: Предмет и его прямое изображение располагаются на оси тонкой линзы перпендикулярно этой оси и симметрично относительно одного из фокусов линзы.

Расстояние между предметом и изображением $l = 20$ см. Чему может равняться фокусное расстояние линзы?

Ответ на вопрос: При выводе формул, описывающих тонкие линзы, используются два приближения: пренебрегают смещением световых лучей вдоль плоскости линзы по сравнению с ее диаметром и считают малыми все углы между световыми лучами и главной оптической осью линзы (используются соотношения ***параксиального приближения*** $\sin(\alpha) \approx tg(\alpha) \approx \alpha$). Смещение луча вдоль плоскости линзы по величине порядка геометрической толщины самой линзы, то есть она действительна должна быть «тонкой»: ее толщина должна быть много меньше ее диаметра. Это требование также можно переформулировать следующим образом: диаметр линзы должен быть много меньше радиусов кривизны ограничивающих ее сферических поверхностей. Второе требование – то, что все рассматриваемые лучи должны быть параксиальными.

Решение задачи: Прямые изображения предметов (светящиеся точки которых есть действительные источники для линзы) создают рассеивающие линзы (при любом расстоянии от предмета до линзы) и собирающие линзы (когда расстояние от предмета до линзы меньше ее фокусного расстояния). В обоих случаях это изображение будет мнимым, то есть будет располагаться по одну сторону от линзы с предметом. Пусть a – расстояние от предмета до линзы, а $b = -|b|$ – расстояние от линзы до мнимого изображения. Для рассеивающей линзы оптическая сила отрицательна, а изображение находится ближе к линзе, чем предмет. Поэтому $a = |F| + \frac{l}{2}$, а $|b| = |F| - \frac{l}{2}$. Согласно формуле линзы $\frac{1}{|F| + \frac{l}{2}} - \frac{1}{|F| - \frac{l}{2}} = -\frac{1}{|F|} \Rightarrow |F|^2 - l|F| - \frac{l^2}{4} = 0$. Выбирая для $|F|$ положительный корень уравнения, находим: $|F| = \frac{(\sqrt{2}+1)l}{2} \approx 24{,}14$ см. Аналогично для собирающей линзы (мнимое изображение находится дальше от линзы, чем предмет: значения $a = F - \frac{l}{2}$, а $|b| = F + \frac{l}{2}$ приводят к уравнению $F^2 - lF - \frac{l^2}{4} = 0$, положительный корень которого снова $F = \frac{(\sqrt{2}+1)l}{2} \approx 24{,}14$ см. Ответ также можно записать в общем виде $F = \pm\frac{(\sqrt{2}+1)l}{2} \approx \pm 24{,}14$ см.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года

БИЛЕТ № 04 (МОСКВА): ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

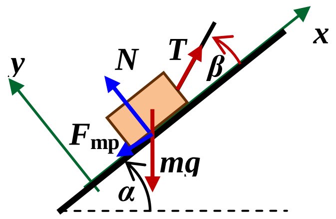
Задание 1.

Вопрос: Два бруска одинаковой массы в некоторый момент времени находятся на поверхностях, наклоненных под углом 30° к горизонту. Различаются только коэффициенты трения: для первой поверхности он равен $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, для второй – $\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Во сколько раз отличаются силы трения, действующие на бруски?

Задача: Брусок массы $m = 2$ кг равномерно втаскивают за нить вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. Угол β, который нить составляет с наклонной плоскостью, выбран так, чтобы натяжение нити было наименьшим. При подъеме бруска таким образом на высоту $h = 4{,}5$ м была совершена работа $A = 100$ Дж. Чему может быть равен коэффициент трения бруска о плоскость? Нить считать невесомой и нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ на вопрос: Нетрудно заметить, что $\mu_2 < tg(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} < \mu_1$, и поэтому первый брусок может покоиться на наклонной поверхности, а второй – соскальзывает по ней. В этом случае сила трения для первого бруска есть сила трения покоя, то есть она уравновешивает компоненту внешней силы тяжести, направленную вдоль плоскости: $F_1 = mg\sin(30°) = \frac{mg}{2}$ (m – масса каждого из брусков). Сила трения для второго бруска – сила трения скольжения, то есть $F_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg\cos(30°) = \frac{mg}{4}$. Значит, сила трения, действующая на первый брусок, в два раза больше, чем сила трения, действующая на второй. Первый брусок в отдельно взятый момент трения может скользить по поверхности (если его «принудительно» запустили). Тогда и у него сила трения будет силой трения скольжения, и тогда отношение величин сил трения будет равно отношению коэффициентов трения, то есть сила трения, действующая на первый брусок, будет в этом случае в три раза больше, чем сила трения, действующая на второй.

Решение задачи: В первую очередь определим величину угла β. Запишем условие баланса сил в проекциях на оси x и y (см. рисунок) и выразим из них величину силы натяжения нити:



$$\begin{Bmatrix} T\cos(\beta) = mg\sin(\alpha) + \mu N \\ N = mg\cos(\alpha) - T\sin(\beta) \end{Bmatrix} \Rightarrow T = mg\frac{\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)}{\cos(\beta) + \mu\sin(\beta)}.$$

Если ввести угол $\alpha_0 \equiv \mathrm{arctg}(\mu)$, то это выражение можно записать в виде $T = mg\frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\cos(\beta - \alpha_0)}$, из которого очевидно, что минимум силы натяжения достигается при $\beta = \alpha_0$. Значит, сила, с которой при перемещении бруска тянут за нить, $F = T_{\min} = mg\frac{\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Работа этой силы $A = Fs\cos(\beta)$. Поскольку перемещение $s = \frac{h}{\sin(\alpha)}$, а $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, то $A = mgh\frac{1+\mu\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{1+\mu^2}$. Значит, условие задачи приводит к квадратному уравнению для величины коэффициента трения: $\mu^2 - \frac{mgh\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{A}\mu + 1 - \frac{mgh}{A} = 0$, корни которого $\mu_{1,2} = z\,\mathrm{ctg}(\alpha) \pm \sqrt{z^2\mathrm{ctg}^2(\alpha) + 2z - 1}$, где $z \equiv \frac{mgh}{2A}$. При значениях данных из условия оба корня оказываются физически допустимыми: $\mu_1 \approx 0{,}77$ и $\mu_2 \approx 0{,}13$.

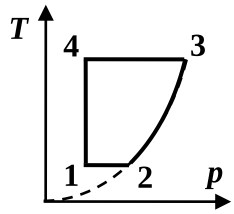
Строго говоря, в данной задаче необходимо проверить, что используемое значение β допустимо для заданного α и полученных μ. Дело в том, что при «слишком больших» β может произойти отрыв бруска от плоскости. Условие того, что брусок не отрывается от плоскости – это $N > 0$, то есть $T\sin(\beta) < mg\cos(\alpha)$. Подставив в это условия найденные значения T и β, обнаруживаем, что оно приводится к виду $\mu < \mathrm{ctg}(\alpha)$. Это требование также выполняется для обоих найденных значений коэффициента трения. Заметим, что существование этого ограничения также можно установить и из вида формулы для работы: ясно, что при протаскивании бруска по шероховатой поверхности $A > mgh$, и из этого требования получается такое же ограничение на допустимые μ.

ОТВЕТ: $\mu_{1,2} = \frac{mgh\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{mgh\,\mathrm{ctg}(\alpha)}{2A}\right)^2 + \frac{mgh}{A} - 1}$, то есть коэффициент трения может иметь одно из двух значений: $\mu_1 \approx 0{,}77$ или $\mu_2 \approx 0{,}13$.

Задание 2.

Вопрос: Запишите выражения для изменения внутренней энергии идеального газа в изобарном, изохорном и изотермическом процессах (через параметры состояний).

Задача: Постоянное количество неона участвует в циклическом процессе, диаграмма которого в координатах «давление – температура» показана на рисунке. Процессы 1-2 и 3-4 – изотермические, при изобарном сжатии над газом совершают работу $A = 2{,}5\,$кДж. Диаграмма процесса 2-3 – участок параболы, проходящей через начало координат. Найти количество теплоты, подведенное к газу в процессе 2-3.



Ответ на вопрос: В любом процессе изменение внутренней энергии заданного количества идеального газа можно записать только через изменение его температуры: $\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T$, где ν – число степеней свободы молекулы газа, равное 3 для молекулы одноатомного газа, 5 для двухатомного и 6 для многоатомного. В соответствии с этим, изменение внутренней энергии в изотермическом процессе равно нулю ($(\Delta U)_{T=const} = 0$), а в изобарном и изохорном процессах может быть выражено через изменения объема и давления с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: $\nu RT = pV$, и поэтому $(\Delta U)_{p=const} = \frac{i}{2}p\Delta V$ и $(\Delta U)_{V=const} = \frac{i}{2}V\Delta p$.

Решение задачи: В данной задаче необходимо исследовать связь характеристик процессов 2-3 и 4-1 (это и есть изобарное сжатие). Поскольку изменение внутренней энергии в замкнутом процессе равно нулю, и изменение ее в изотермических процессах рано нулю, то эти процессы связаны соотношением $\Delta U_{23} + \Delta U_{41} = 0$. При изобарном сжатии работа над газом $A \equiv A'_{41} = -p_1(V_1 - V_4) = -\frac{2}{3}\Delta U_{41} = \frac{2}{3}\Delta U_{23}$ (мы учли, что неон – одноатомный газ). В процессе 2-3, согласно условию, $T = \alpha \cdot p^2$(α – некоторый постоянный коэффициент). Это значит, что $pV = \nu RT = \alpha\nu R \cdot p^2$, то есть $p = \frac{V}{\alpha\nu R} \equiv \beta V$, то есть диаграмма этого процесса в координатах давление-объем есть прямая линия, проходящая через начало координат. Поэтому работа газа в таком процессе вычисляется как площадь трапеции (площадь под диаграммой процесса в координатах $p - V$): $A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = \frac{1}{2}\beta(V_3^2 - V_2^2) = \frac{1}{2}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{1}{3}\Delta U_{23}$. Следовательно, искомое количество теплоты, в соответствии с первым Началом термодинамики, равно $Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23} = \frac{4}{3}\Delta U_{23} = 2A = 5\,$кДж. Как видно, в этом процессе тепло действительно подводится к газу.

ОТВЕТ: $Q_{23} = 2A = 5\,$кДж.

Задание 3.

Вопрос: По гладким вертикальным направляющим в сильном магнитном поле падают медное и деревянное кольца примерно одинаковой массы. Линии индукции поля перпендикулярны плоскости колец. Какое из колец должно падать медленнее и почему?

Задача: Катушка индуктивности помещена между полюсами электромагнита так, что ось катушки совпадает с направлением индукции магнитного поля, которое почти однородно. Индуктивность катушки $L = 1\,\text{мГн}$, а площадь ее поперечного сечения $S = 2\,\text{см}^2$. Выводы обмотки соединили проводом, проходящим в плоскости, проходящей через ось катушки. Общее сопротивление обмотки и провода $R = 20\,\text{Ом}$. Ток в обмотке электромагнита плавно изменяется. За время, в течении которого поле электромагнита увеличилось на $\Delta B = 3\,\text{Тл}$, сила тока в катушке увеличилась на $\Delta I = 0{,}1\,\text{А}$. Какой заряд прошел за это время по проводу? Число витков катушки $N = 6$.

Ответ на вопрос: В сильном поле даже небольшая неоднородность приведет к появлению в проводящем теле индукционных токов (токов Фуко). Поэтому в этом теле будет выделяться тепло, появляющееся из-за убыли кинетической энергии (можно также сослаться на правило Ленца – индукционные явления всегда противодействуют причине, вызвавший их появление, поэтому силы Ампера, действующие на индукционные токи, будут направлены против скорости тела. Значит, проводящее кольцо (медное) будет падать медленнее непроводящего (деревянного).

Решение задачи: В катушке возникает ЭДС индукции $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, которой противодействует ЭДС самоиндукции $L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, где Δt мало. Тогда можно записать $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} - L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = IR$. Умножая это соотношение на Δt, находим, что $\Delta q = I\Delta t = \dfrac{\Delta\Phi - L\Delta I}{R}$. Изменение магнитного потока $\Delta\Phi = NS\Delta B$*, то есть $\Delta q = \dfrac{NS\Delta B - L\Delta I}{R} = 175\,\text{мкКл}$.

ОТВЕТ: $\Delta q = \dfrac{NS\Delta B - L\Delta I}{R} = 175\,\text{мкКл}$*.

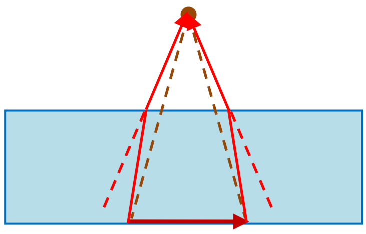
*В связи с тем, что численное значение N = 6 было сообщено участникам в ходе проведения олимпиады, засчитывались также решения с N = 1 или с числом N, используемом в качестве свободного параметра.

Задание 4.

Вопрос: Почему рыбка в аквариуме, если ее разглядывать через поверхность воды, кажется крупнее, чем на самом деле? Ответ пояснить построением.

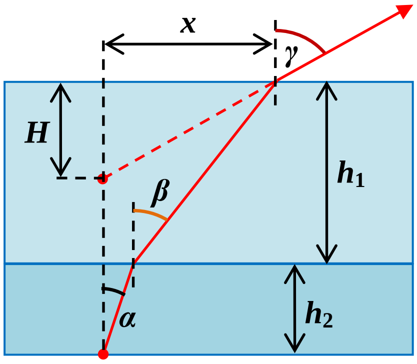
Задача: Две несмешивающиеся жидкости налиты в стакан так, что высота верхнего слоя жидкости h_1 в два раза больше высоты нижнего слоя жидкости h_2. Показатели преломления жидкостей – $n_1 = 1{,}5$ и $n_2 = 1{,}75$ соответственно. При взгляде «прямо сверху» видимое расстояние до дна сосуда от верхней границы жидкости равно $H = 8\,\text{см}$. Найдите h_1 и h_2.

Ответ на вопрос: Этот эффект связан с преломлением лучей на границе раздела воздух-вода. Вода – оптически более плотная среда, и ход лучей, попадающих в глаз наблюдателя от краев расположенного под водой предмета показан на рисунке. Как видно, наблюдаемый угловой размер предмета увеличивается. Нужно, отметить, что этот эффект зависит от условий наблюдения – при наблюдении под значительным углом к поверхности воды более заметным



становится эффект кажущегося «приподнимания» предмета над дном сосуда или водоема.

Решение задачи: Построим луч, идущий со дна на поверхность жидкости под малым углом α. Закон преломления на границах жидкостей $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_1}{n_2}$ и $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{n_1}$ (для малых углов используем приближение $\sin(\alpha) \approx \mathrm{tg}(\alpha) \approx \alpha$). Поэтому $\gamma \approx n_1\beta \approx n_2\alpha$. Выразим отклонение этого луча от вертикали на поверхности верхнего слоя жидкости (расстояние x) через «видимое» расстояние по вертикали до точки на дне (это и есть видимое расстояние до дна сосуда при взгляде сверху): $x = H\,\mathrm{tg}(\gamma) \approx H\gamma \approx n_2 H\alpha$. С другой стороны, это



расстояние $x = h_2\,\mathrm{tg}(\alpha) + h_1\,\mathrm{tg}(\beta) \approx h_2\alpha + h_1\frac{n_2}{n_1}\alpha$. Из этих соотношений следует, что для всех малых α «видимое» положение дна одинаково и $n_2 H \approx h_2 + h_1\frac{n_2}{n_1}$. Поскольку по условию $h_1 = 2h_2$, то $h_2 = \frac{n_1 n_2 H}{n_1 + 2n_2} = 4{,}2$ см, а $h_1 = \frac{2n_1 n_2 H}{n_1 + 2n_2} = 8{,}4$ см.

ОТВЕТ: $h_2 = \frac{n_1 n_2 H}{n_1 + 2n_2} = 4{,}2$ см, а $h_1 = \frac{2n_1 n_2 H}{n_1 + 2n_2} = 8{,}4$ см.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года

БИЛЕТ № 05 (КЕМЕРОВО): возможные решения и ответы

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

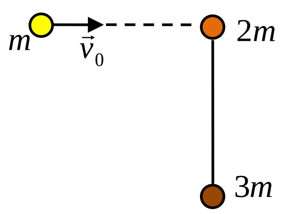
Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Задание 1.

Вопрос: Три одинаковые небольшие массивные шайбы легкими жесткими соединены в равнобедренный прямоугольный треугольник с длиной катетов l. На каком расстоянии от ближайшей к нему шайбы находится центр масс конструкции?

Задача: На гладком горизонтальном столе лежат упругие шайбы с массами $2m$ и $3m$, связанные слегка натянутой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Еще одна шайба массы m налетает на систему со скоростью v_0 (перпендикулярно), и происходит абсолютно упругий лобовой удар с одной из шайб (см. рисунок). Найти угловую скорость вращения и величину силы натяжения нити после удара.



Ответ на вопрос: Введем систему координат с центром в вершине прямого угла треугольника и осями, направленными вдоль катетов. Координаты центра масс конструкции в этой системе координат $x_{ЦМ} = \frac{m \cdot 0 + m \cdot 0 + m \cdot l}{3m} = \frac{l}{3}$ и аналогично $y_{ЦМ} = \frac{l}{3}$. Ясно, что ближайшей к центру масс является шайба, расположенная в вершине прямого угла, расстояние до которой $r_{\min} = \sqrt{x_{ЦМ}^2 + y_{ЦМ}^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} l$ (расстояния до двух других шайб $r' = \frac{\sqrt{5}}{3} l$).

Решение задачи: Удар небольших стальных шайб происходит быстро. Кроме того, линия удара перпендикулярна нити, и за время удара сила натяжения нити не успевает существенно измениться. Поэтому шайба $3m$ не успевает набрать заметной скорости. Тогда удар шайб m и $2m$ можно рассчитывать как обычный лобовой упругий удар. Тогда из законов сохранения энергии и проекции импульса на направление $\vec{v}_0$ получаем:

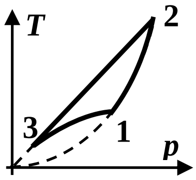
$$\left\{ \begin{array}{l} mv_0 = 2mv_2 + mv_1 \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mv_2^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow v_2 = \frac{2}{3} v_0 .$$

Следовательно, скорость центра масс шайб, связанных нитью, равна $V = \frac{2}{5} v_2 = \frac{4}{15} v_0$. Итак, центр масс движется поступательно, и относительно него шайбы движутся по окружностям с угловой скоростью $\omega = \frac{v_2 - V}{r_2} = \frac{2/3 - 4/15}{3/5} \frac{v_0}{l} = \frac{2v_0}{3l}$. Так как трения нет, то такой характер движения сохранится и далее – угловая скорость меняться не будет. Вместе с ней не изменяется и сила натяжения нити, создающая центростремительное ускорение шайб: $T = 2m\omega^2 \frac{3}{5} l = \frac{8mv_0^2}{15l}$.

Задание 2.

Вопрос: Диаграмму циклического процесса над идеальным газом в координатах p-V подвергли «масштабному преобразованию»: давление и объем в каждой точке изменили в одно и то же количество раз ($p \to kp$ и $V \to kV$). Чему равно отношение КПД «нового» и «старого» циклов?

Задача: На графике в координатах «давление – температура» показан цикл постоянного количества одноатомного идеального газа, являющегося рабочим телом тепловой машины. Диаграмма процесса 1-2 – участок параболы, проходящей через начало координат, процесса 2-3 – участок прямой, проходящей через начало координат, а процесс 3-1 – адиабатический. Модуль работы в адиабатическом процессе составляет 60% от работы газа в процессе 1-2. Найти КПД цикла.



Ответ на вопрос: При описанном масштабном преобразовании все работы (вычисляемые как площади под диаграммами процессов $p(V)$) и внутренние энергии (которые для идеального газа пропорциональны произведению давления на объем) изменятся пропорционально квадрату «масштабного» коэффициента: $A \to k^2 A$ и $U \to k^2 U$. Такой же вывод, в соответствии с I Началом термодинамики, относится и к количествам теплоты ($Q \to k^2 Q$). Поэтому КПД циклов не изменяются, и искомое соотношение равно 1.

Решение задачи: Идентифицируем процессы в нашем цикле: в процессе 1-2 $T = const \cdot p^2$. В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона $T = \frac{pV}{\nu R}$, и поэтому в этом процессе $p = \alpha \cdot V$, то есть давление газа растет пропорционально объему. Работа газа равна площади под диаграммой процесса в координатах $p - V$ (площади трапеции), то есть

$$A_{12} = \frac{p(V_1) + p(V_2)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2 + V_1)(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2).$$

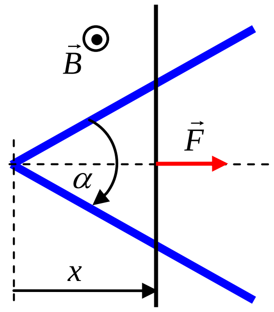
При этом изменение температуры $\Delta T = \frac{1}{\nu R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{\alpha}{\nu R}(V_2^2 - V_1^2)$, поэтому $A_{12} = \frac{\nu R}{2}\Delta T$.

К газу подводится количество теплоты $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = A_{12} + \frac{3}{2}\nu R \Delta T = 4A_{12}$. Процесс 2-3 ($T = const \cdot p$) очевидно является изохорным охлаждением (работа не совершается, теплота отводится от газа). В процессе 3-1 теплообмена нет, а работа отрицательна и, согласно условию, $A_{31} = -0{,}6A_{12}$. Таким образом, теплота нагревателя $Q_H = Q_{12} = 4A_{12}$, а работа в цикле $A = A_{12} + A_{31} = 0{,}4A_{12}$. Следовательно, КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_H} = 0{,}1$.

Задание 3.

Вопрос: Кольцо из гибкого провода лежит на столе без перехлестов в «не расправленном» состоянии. В пространстве есть магнитное поле, перпендикулярное поверхности стола? Участки провода раздвигают, расправляя кольцо. Куда будут направлены силы Ампера, действующие на эти участки?

Задача: Проводник, согнутый под углом α, расположен в горизонтальной плоскости. Металлический стержень может без трения скользить перпендикулярно биссектрисе угла. Индукция однородного вертикального магнитного поля равна B. К стержню приложена горизонтальная сила $F = kx$, где расстояние x отсчитывается от вершины угла. Определить максимальную скорость стержня. В процессе движения стержень не теряет контакта с обеими сторонами угла. Сопротивление единицы длины стержня равно ρ, сопротивление проводника и контакта пренебрежимо мало.



Ответ на вопрос: При изменении площади контура в процессе «расправления» магнитный поток через контур будет изменяться, и в контуре возникнет индукционный ток. На этот ток со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера. В соответствии с правилом Ленца, индукционные явления всегда препятствует причине, вызвавшей их появление. Поэтому силы Ампера обязательно будут направлены <u>внутрь контура</u>, препятствуя увеличению его площади.

Решение задачи: Приложим к стержню силу F, тогда при движении стержня будет увеличиваться площадь треугольника, образованного стержнем и «уголком» из проводника: $S = x^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Поток магнитной индукции $\Phi = BS$, ЭДС индукции, возникающая в контуре $|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = 2Bx \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dx}{dt} = 2Bx \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)v$. Сопротивление участка стержня, по которому течет ток, $R = 2\rho x \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. В стержне возникнет ток, пропорциональный скорости: $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B}{\rho}v$. Сила Ампера, действующая на проводник, $F_A = IB2x \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2B^2 xv}{\rho}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Уравнение движения стержня: $ma = F - F_A$, то есть $ma = x\left[k - \frac{2B^2 v}{\rho}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$. Скорость стержня достигнет максимального значения, когда ускорение станет равным нулю. Значит, $k - \frac{2B^2 v_{\max}}{\rho}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$, и $v_{\max} = \frac{k\rho}{2B^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Задание 4.

Вопрос: Оптическая сила линзы. Формула линзы.

Задача: Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1 = F$, $F_2 = \frac{F}{2}$. Главные оптические оси линз совмещены. Точечный источник света расположен на расстоянии $a_1 = \frac{3F}{2}$ перед первой линзой, а его изображение – на расстоянии $b_2 = \frac{F}{3}$ за второй линзой. На каком расстоянии L друг от друга находятся линзы?

Ответ на вопрос: Линза – прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. Такие тела обладают способностью фокусировать параллельные пучки параксиальных световых лучей (то есть лучей, идущих под малым углом к главной оптической оси линзы). Главным фокусом линзы называют точку, в которой фокусируются лучи, идущие параллельно ее главной оптической оси. Расстояние от плоскости линзы до фокуса – фокальное расстояние линзы. Оптической силой линзы называют величину, обратную фокусному расстоянию: $D \equiv \frac{1}{F}$. Единицей измерения оптической силы является диоптрия (1 дптр = 1 м$^{-1}$). В случае собирающей линзы фокус является действительным (в нем пересекаются световые лучи), а фокусное расстояние и оптическая сила считаются <u>положительными</u>. В случае рассеивающих линз (фокус является мнимым – параллельный пучок лучей после прохождения линзы расходится так, что продолжения лучей пересекаются в плоскости) фокусное расстояние и оптическая сила линзы считаются <u>отрицательными</u>. Если диаметр линзы намного меньше радиусов кривизны ее сферических поверхностей, то ее толщина намного меньше диаметра. Если при этом мы рассматриваем только параксиальные лучи, то для описания прохождения лучей через линзу можно использовать приближение тонкой линзы. В рамках этого приближения оптическая сила линзы, помещенной в однородную среду, определяется формулой $D = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, где n – показатель преломления вещества линзы относительно окружающей среды, а радиусы поверхностей линзы $R_{1,2}$ считаются положительными для выпуклой поверхности и отрицательными для вогнутой. Расстояния от светящейся точки a и расстояние до ее изображения b для тонкой линзы связаны ***формулой линзы*** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = D = \frac{1}{F}$. В этой формуле a и b считаются положительными для действительных источников или изображений, и отрицательными – для мнимых.

Решение задачи: По формуле линзы для первой линзы $F_1 = F,\ \ a_1 = \frac{3F}{2} \Rightarrow b_1 = 3F$. Аналогично для второй линзы $F_2 = \frac{F}{2}, b_2 = \frac{F}{3} \Rightarrow a_2 = -F$. Таким образом, изображение источника, создаваемое первой линзой, находится на расстоянии $f_1 = 3F$ за ней и при этом оно является мнимым источником для второй линзы и находится за второй линзой на расстоянии F. Поэтому расстояние между линзами $L = 2F$.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года

БИЛЕТ № 06 (НИЖНИЙ НОВГОРОД): возможные решения и ответы.

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

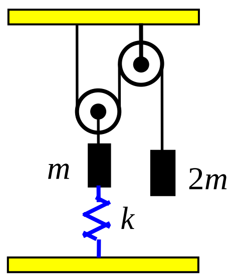
Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Задание 1.

Вопрос: Как связаны между собой законы изменения координаты и скорости при гармонических колебаниях вдоль одной прямой?

Задача: В системе, изображенной на рисунке, массы грузов равны m и $2m$, жесткость пружины k, блоки, нить и пружина - невесомые, блоки вращаются без трения, нить по блокам не скользит. Груз $2m$ смещают из положения равновесия вниз на расстояние s, после чего грузы совершают гармонические колебания. Найдите максимальные скорости колеблющихся грузов. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ на вопрос: Ясно, что закон изменения скорости получается дифференцированием закона изменения координаты. Если $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, то $v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$. Закон изменения скорости можно переписать в виде $v(t) = \omega x_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \equiv v_m \cos(\omega t + \varphi_v)$. Это означает, что .амплитуда колебаний скорости отличается от амплитуды колебаний координаты на множитель, равный циклической частоте колебаний ($v_m = \omega x_m$), и колебания скорости опережают по фазе колебания координаты на $\frac{\pi}{2}$.

Решение задачи: Направим ось x вертикально вниз. В положении равновесия грузов: $2mg - T = 0$ и $mg + k\Delta l_0 - 2T = 0$, где Δl_0 - удлинение пружины в положении равновесия, T – сила натяжения нити. Из этих уравнений получаем $\Delta l_0 = \frac{3mg}{k}$. При смещении груза $2m$ от положения равновесия вниз груз m смещается вверх на $\frac{s}{2}$ и пружина дополнительно растягивается на $\frac{s}{2}$. Максимальные скорости грузов достигаются при прохождении положения равновесия, причем скорость груза m при натянутой нити всегда в два раза меньше, чем скорость груза $2m$. Запишем закон сохранения энергии для колеблющихся грузов:

$$\frac{2mv_0^2}{2} + \frac{m(v_0/2)^2}{2} + \frac{k\Delta l_0^2}{2} = -2mgs + mg\frac{s}{2} + \frac{k(\Delta l_0 + s/2)^2}{2} \quad ,$$

где v_0 – максимальная скорость груза $2m$. Таким образом, $9mv_0^2 = k^2 s^2 \Rightarrow v_0 = \frac{s}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Максимальная скорость груза m в два раза меньше $v_0' = \frac{s}{6}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Отметим, что амплитуда ускорения груза 1 не может быть больше ускорения свободного падения (это соответствует провисанию нити), и поэтому полученный результат верен только при $\frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{k}{m}} \le g \Leftrightarrow s \le \frac{9mg}{k}$. При больших s условие задачи некорректно – колебания грузов в действительности не являются гармоническими.

Задание 2.

Вопрос: Внутренняя энергия и абсолютная температура идеального газа.

Задача: Горизонтальный теплоизолированный сосуд цилиндрической формы массой m закрыт с торцов и перегорожен подвижным поршнем массой $M >> m$. Сосуд и поршень покоятся в невесомости, с обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального одноатомного газа. Сосуду коротким ударом сообщают скорость v, направленную вдоль оси сосуда. На сколько изменится температура ΔT газа после затуханий колебаний поршня? Трение между поршнем и стенками сосуда, теплоемкость поршня и стенок не учитывать. Масса газа пренебрежимо мала. Универсальная газовая постоянная R.

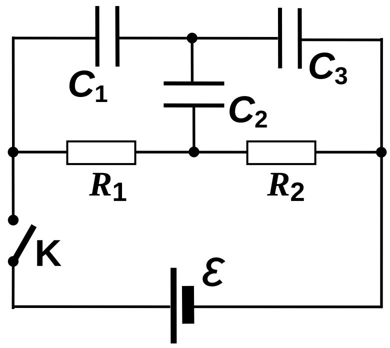
Ответ на вопрос: Шкала абсолютных температур – шкала Кельвина, в которой за начало отсчета температуры принят «абсолютный ноль» – температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. Один градус этой шкалы приравнен к градусу шкалы Цельсия (расстояние между температурой плавления льда и температурой кипения воды при нормальном атмосферном давлении равна 100 К). Внутренняя энергия молекулярной системы есть сумма энергий ее молекул. В модели идеального газа средняя потенциальная энергия взаимодействия молекул считается пренебрежимо малой (мы пренебрегаем взаимодействием молекул всегда, кроме «редких» моментов соударений). Поэтому внутренняя энергия идеального газа есть сумма кинетических энергий молекул и она равна произведению числа молекул на среднюю кинетическую энергию молекулы. Согласно теореме Больцмана, в состоянии теплового равновесия при абсолютной температуре T в молекулярной системе на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится энергия, равная $\frac{kT}{2}$, где постоянная Больцмана k выражается через универсальную газовую постоянную и число Авогадро $k=\frac{R}{N_A}$. Поэтому внутренняя энергия ν молей идеального газа из молекул с i степенями свободы $U=N_A\nu\frac{i}{2}kT=\frac{i}{2}\nu RT$. Например, для одноатомного идеального газа $U=\frac{3}{2}\nu RT$. С помощью уравнения Менделеева-Клапейрона внутренняя энергия также может быть выражена через давление и объем газа $U=\frac{i}{2}pV$.

Решение задачи: Так как система сосуд-поршень-газ замкнута, запишем закон сохранения импульса: $mv=(m+M+m_г)V$, где V – скорость движения системы после прекращения колебаний. Запишем изменение механической энергии системы $\Delta E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(m+M+m_г)V^2$, и учтем, что $m, m_г << M$. Тогда получим $\Delta E=\frac{m(M-m)v^2}{2M}$. Эта энергия, отданная газу, пойдет на увеличение его внутренней энергии ΔU. Поскольку $\Delta U=\nu C_V\Delta T=2\cdot\frac{3}{2}R\Delta T=3R\Delta T$, то $\Delta T=\frac{m(M-m)v^2}{6MR}\approx\frac{mv^2}{6R}$.

Задание 3.

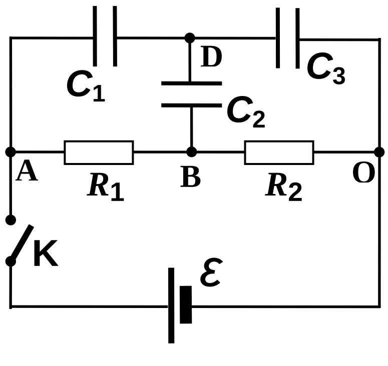
Вопрос: Схема из конденсаторов и резисторов подключается к источнику постоянного напряжения. В каком случае после завершения переходных процессов заряды конденсаторов могут зависеть от величин сопротивлений резисторов, а в каком – нет?

Задача: Перед сборкой схемы, изображенной на рисунке, все конденсаторы были разряжены. Емкости конденсаторов равны: $C_1=2$ мкФ, $C_2=3$ мкФ, $C_3=6$ мкФ; сопротивления резисторов $R_1=25$ Ом, $R_2=10$ Ом. ЭДС источника $\mathcal{E}=9$ В, его внутреннее сопротивление равно $r=1$ Ом. Найдите установившийся заряд на конденсаторе C_2 после замыкания ключа. Какая из его пластин заряжена положительно?



Ответ на вопрос: Заряды конденсаторов пропорциональны напряжениям на них. Эти напряжения определяются из условий баланса напряжений, в которые также входят ЭДС источника и напряжения на резисторах. Напряжения на резисторах в установившемся (стационарном) состоянии схемы отличны от нуля и зависят от сопротивлений резисторов только в том случае, когда по резисторам текут токи. Итак, заряды конденсаторов могут зависеть от величин сопротивлений резисторов после завершения переходных процессов только в том случае, если в схеме есть замкнутые контура, по которым текут токи и после установления стационарного режима. Если таких контуров нет, и в установившемся режиме токи через все резисторы отсутствуют, то напряжения не зависят от номиналов резисторов.

Решение задачи: Будем отсчитывать потенциалы в схеме от точки O. Тогда потенциал точки B будет равен падению напряжения на сопротивлении R_2, то есть $\varphi_B=IR_2$. Величину потенциала точки D найдем из условия, что сумма зарядов в месте соединения обкладок всех трех конденсаторов равна 0. Заряды каждого из конденсаторов равны: $q_1=C_1(\varphi_A-\varphi_D)=C_1(\mathcal{E}-Ir-\varphi_D)$, $q_2=C_2(\varphi_B-\varphi_D)$, $q_3=C_3\varphi_D$.



Ток, текущий по замкнутому контуру, $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}$. С учетом полярности записи напряжений на конденсаторах условие сохранения заряда $-q_1 - q_2 + q_3 = 0$. Следовательно,

$$C_1\left(-\mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}r}{R_1 + R_2 + r} + \varphi_D\right) + C_2\left(-\frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2 + r} + \varphi_D\right) + C_3\varphi_D = 0,$$

откуда $\varphi_D = \dfrac{\mathcal{E}\,[C_1(R_1 + R_2) + C_2R_2]}{(C_1 + C_2 + C_3)(R_1 + R_2 + r)}$. Значит, $q_2 = \dfrac{\mathcal{E}\,C_2\,[C_3R_2 - C_1R_1]}{(C_1 + C_2 + C_3)(R_1 + R_2 + r)} = \dfrac{15}{22}$ мкКл ()или примерно 682 нКл). Как видно, положительно заряженной оказалась нижняя обкладка конденсатора C_2.

Задание 4.

Вопрос: Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием 25 см и тонкая рассеивающая линза, модуль фокусного расстояния которой в два раза больше, плотно прижаты друг к другу. Чему будет равно фокусное расстояние «составной» линзы?

Задача: Рассеивающая линза дает изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = \dfrac{1}{5}$. Если вплотную к ней приставить тонкую собирающую линзу, то эта система создает прямое изображение с увеличением $\Gamma_2 = \dfrac{1}{3}$. Определить, с каким увеличением получится изображение от одной собирающей линзы. Расстояние от линзы до предмета во всех случаях одинаково.

Ответ на вопрос: При плотном прижатии тонких линз их оптические силы складываются. У собирающей линзы $D_1 = \dfrac{1}{F} = 4$ дптр, а у рассеивающей $D_2 = -\dfrac{1}{2F} = -2$ дптр. Поэтому оптическая сила составной линзы $D = D_1 + D_2 = +\dfrac{1}{2F} = +2$ дптр. Значит, ее фокусное расстояние $\dfrac{1}{D} = 2F = 50$ см.

Решение задачи: Из формулы линзы можно получить выражение для увеличения через фокусное расстояние F, расстояние от предмета до линзы d и расстояние от линзы до изображения f: $\Gamma = -\dfrac{f}{d} = \dfrac{F}{F - d}$. Отметим, что в этом выражении увеличение дается с учетом знака – у прямого изображения увеличение считается положительным, у перевернутых – отрицательным. Тогда (заметим, что для рассеивающей линзы изображение всегда прямое, так что $\Gamma_1 > 0$): $\dfrac{F_1}{F_1 - d} = +\dfrac{1}{5} \Rightarrow F_1 = -\dfrac{d}{4} \Rightarrow D_1 = -\dfrac{4}{d}$, и для двух линз (по условию изображение прямое) $\dfrac{F}{F - d} = +\dfrac{1}{3} \Rightarrow F = -\dfrac{d}{2} \Rightarrow D_C = -\dfrac{2}{d}$ (то есть система двух линз – все-таки рассеивающая, ибо для собирающей линзы изображение бывает прямым только при $d < F$!). Соответственно $D_C = D_1 + D_2 \Rightarrow -\dfrac{2}{d} = -\dfrac{4}{d} + D_2 \Rightarrow D_2 = \dfrac{2}{d} \Rightarrow F_2 = \dfrac{d}{2}$. Таким образом, увеличение одной второй линзы $\Gamma_2 = \dfrac{F_2}{F_2 - d} = -1$ (то есть размер изображения равен размеру предмета, и оно перевернутое).

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года

БИЛЕТ № 07 (МОСКВА): ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Задание 1.

Вопрос: Суммарная кинетическая энергия двух тел одинаковой массы в результате абсолютно неупругого соударения уменьшилась ровно в два раза. Каким был угол между векторами скоростей тел до соударения?

Задача: При взрыве снаряда, летевшего вертикально, в механическую энергию была преобразована часть энергии заряда, в 10 раз превосходящая кинетическую энергию снаряда перед взрывом. В результате взрыва снаряд раскололся на три осколка. На долю двух осколков – с массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 3$ кг – пришлась 50% и 25% общей кинетической энергии соответственно, причем угол разлета этих осколков составил 90°. Третий осколок полетел в горизонтальном направлении. Пренебрегая массой пороховых газов, найти массу третьего осколка.

Ответ на вопрос: При абсолютно неупругом соударении прекращается относительное движение тел, и после удара их скорости одинаковы. Обозначим $\vec{v}_{1,2}$ скорости тел до удара, и $\vec{V}$ – их общую скорость после удара. Тогда из закона сохранения импульса следует, что $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{V} \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2\vec{V}$. Возведем это соотношение в квадрат: $v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha) = 4V^2$, где α – искомый угол. По условию $\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = 2\frac{2mV^2}{2}$, откуда $v_1^2 + v_2^2 = 4V^2$. Значит, $\cos(\alpha) = 0$ (вопрос в условии имеет смысл, только если обе скорости не равны нулю), то есть $\alpha = 90°$.

Решение задачи: В рамках заданных в условии предположений (сумма масс осколков равна массе снаряда, кинетическая энергия и импульс пороховых газов пренебрежимо малы) законы сохранения импульса и энергии можно записать в виде:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{V} - m_3\vec{v}_3 \ , \qquad (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = 11\frac{M V^2}{2} \ , \qquad (2)$$

причем $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\vec{V}$ - скорость снаряда перед взрывом. Кроме того, по условию $m_1 v_1^2 = \frac{11}{2} M V^2$, $m_2 v_2^2 = \frac{11}{4} M V^2$. Подставляя эти соотношения в (2), получим, что $m_3 v_3^2 = \frac{11}{4} M V^2$. Возводя (1) в квадрат и учитывая перпендикулярность пар векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и $\vec{V}$ найдем, что $m_3^2 v_3^2 + M^2 V^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2$. С учетом полученных выражений

$$\frac{11}{4} m_3 + m_1 + m_2 + m_3 = m_1 \frac{11}{2} + m_2 \frac{11}{4} \Rightarrow m_3 = \frac{18m_1 + 7m_2}{15} = 2\,\text{кг}.$$

ОТВЕТ: $m_3 = \frac{18m_1 + 7m_2}{15} = 2$ кг.

Задание 2.

Вопрос: Чему равна работа массы m идеального газа в процессе, уравнение которого в координатах плотность давление имеет вид $p(\rho) = p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$, а плотность изменяется от $3\rho_0$ до $2\rho_0$? Константы ρ_0 и p_0 считать известными.

Задача: Над постоянным количеством идеального газа производят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изотерм. Работа в этом цикле положительна и она в $k = 2$ раза меньше, чем количество теплоты, полученное газом в процессе изохорного нагревания. Абсолютная температура «более горячей» изотермы в $n = 1{,}6$ раза выше, чем температура «более холодной». Пусть этот процесс – цикл рабочего тела тепловой машины. Чему равен КПД этого цикла?

Ответ на вопрос: В этом процессе $p(V) = p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{m}V\right)$, то есть в координатах давление-объем диаграмма процесса – прямая линия. Работа равна площади под этой диаграммой (площади трапеции), то есть $A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$. Ясно, что $p_1 = \frac{2}{3}p_0$, $p_2 = \frac{1}{2}p_0$, $V_1 = \frac{m}{3\rho_0}$, и $V_2 = \frac{m}{2\rho_0}$. Поэтому $A_{12} = \frac{7p_0 m}{72\rho_0}$.

Решение задачи: Ясно, что идеальный газ в этом цикле получает тепло в процессах изохорного нагревания (обозначим его Q) и в процессе изотермического расширения, в котором подведенное тепло равно совершенной работе A_+ (по I Началу термодинамики $Q = A + \Delta U$, а в изотермическом процессе $\Delta U = 0$). Следовательно, теплота нагревателя $Q_H = Q + A_+$. Работа в цикле равна сумме положительной работы в процессе изотермического расширения A_+ и отрицательной – в процессе изотермического сжатия A_-. В изотермических процессах, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $p(V)=\frac{\nu RT}{V}$ (ν – количество вещества, а T – абсолютная температура), и поэтому даже без вычисления интеграла $A_{12}=\int\limits_{V_1}^{V_2} p(V)dV$ ясно, что при одинаковом количестве вещества и одинаковом соотношении граничных объемов модули работ пропорциональны абсолютным температурам изотерм. Поэтому $A_-=-\frac{1}{n}A_+$, и работа в цикле $A=\left(1-\frac{1}{n}\right)A_+=\frac{n-1}{n}A_+$. По условию $A=\frac{Q}{k}$, поэтому $A_+=\frac{n}{k(n-1)}Q$. Следовательно, $Q_H=\frac{k(n-1)+n}{k(n-1)}Q$, и поэтому КПД цикла $\eta=\frac{A}{Q_H}=\frac{n-1}{k(n-1)+n}=\frac{3}{14}\approx 0{,}214$.

ОТВЕТ: $\eta=\frac{n-1}{k(n-1)+n}=\frac{3}{14}\approx 0{,}214$.

Задание 3.

Вопрос: Как вычисляется потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов? Найдите максимальную кинетическую энергию каждого из двух тел одинаковой массы, с одинаковым зарядом q, отпущенных без начальной скорости с расстояния l в пустом пространстве? Электрическая постоянная равна ε_0.

Задача: Три одинаковых небольших тела массой m с зарядом q каждое удерживают на горизонтальной плоскости в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Какое расстояние s пройдет каждое из тел, если их отпустить? Какую максимальную скорость u приобретут тела в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость равен μ. Электрическая постоянная равна ε_0.

Ответ на вопрос: Потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов вычисляется как сумма энергий попарных взаимодействий. Для каждой пары зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r_{12}, энергия взаимодействия $U_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$.

Два одинаковых тела в предложенном примере будут разгоняться симметрично, и одинаковая максимальная кинетическая энергия каждого из них достигается при удалении на очень большое расстояние (энергия взаимодействия практически рана нулю). Если пренебречь излучением, то максимальная кинетическая энергия каждого из тел равна половине начальной энергии взаимодействия, то есть $E_K^{(\max)}=\frac{q_1q_2}{8\pi\varepsilon_0 l}$.

Решение задачи: Благодаря симметрии системы все три тела пройдут одинаковое расстояние. К моменту остановки работа сил трения будет равна изменению потенциальной энергии взаимодействия тел. Три тела образуют три пары, а расстояние между телами в результате смещения на s увеличится от a до $a+s\sqrt{3}$ (радиус описанной около треугольника со стороной a окружности равен $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, а тела смещаются в точности по радиусам этой окружности, то есть $\frac{a}{\sqrt{3}}+s=R'=\frac{a'}{\sqrt{3}}\Rightarrow a'=a+s\sqrt{3}$). Сила трения скольжения на горизонтальной плоскости $F_{тр}=\mu mg$, поэтому $3\mu mg\cdot s=3\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+s\sqrt{3}}\right)$. Из этого соотношения следует, что $s=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\mu mga}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Ответ имеет смысл, если $\mu<\dfrac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 mga^2}$ (в противном случае трение не позволит телам сдвинуться с места). Для смещений $x<s$ кинетическая энергия тел может быть найдена из закона изменения энергии: $\dfrac{3mv^2}{2}==3\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+x\sqrt{3}}\right)-3\mu mg\cdot x$. Выразим отсюда кинетическую энергию одного тела через величину $z\equiv(a+x\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0\mu mg}{\sqrt{3}q^2}}$. Это выражение имеет вид $\dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}+\mu mg\dfrac{a}{\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{q^2\mu mg}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}}}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$. Из очевидного неравенства $\dfrac{(z-1)^2}{z}\geq 0$ следует, что при любом $z\geq 0$ справедливо неравенство $z+\dfrac{1}{z}\geq 2$, причем равенство (то есть минимальное значение этого выражения) достигается при $z=1$. При этом значении выражение для кинетической энергии сворачивается в полный квадрат. Значит, максимум скорости определяется формулой $u=\sqrt{\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 am}}-\sqrt{\dfrac{2\mu ga}{\sqrt{3}}}$. Этот ответ имеет смысл при том же требовании к μ.

ОТВЕТ: $s=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\mu mga}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $u=\sqrt{\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 am}}-\sqrt{\dfrac{2\mu ga}{\sqrt{3}}}$ при $\mu<\dfrac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 mga^2}$; при большем значении коэффициента трения $s=0$ и $u=0$.

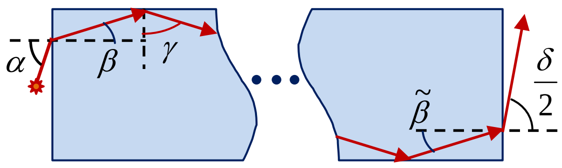
Задание 4.

Вопрос: Опишите явление полного внутреннего отражения.

Задача: Точечный источник света расположен перед торцом длинного стеклянного цилиндрического световода с показателем преломления *n*. Источник расположен на оси цилиндра. Чему равен угол δ между крайними лучами конического светового пучка, выходящего из противоположного торца световода?

Ответ на вопрос: Явление полного внутреннего отражения состоит в том, что при падении на границу раздела двух сред из оптически более плотной 1 в оптически менее плотную 2 с углами падения $\alpha\geq\alpha_0=\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ преломленный луч отсутствует, и энергия падающего луча в отсутствие поглощения полностью переходит в энергию отраженного луча. Здесь $n\equiv\dfrac{n_1}{n_2}$ – относительный показатель преломления сред. Угол $\alpha_0=\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ называется углом полного внутреннего отражения. Можно обратить внимание, что в такой ситуации закон преломления света предсказывает для синуса угла преломления невозможное значение $\sin(\beta)\geq 1$.

Решение задачи: Поскольку источник «точечный» (то есть его размеры много меньше диаметра световода) и расположен вблизи торца, то максимальный угол падения лучей от него на этот торец близок к 90°. Поскольку источник расположен на оси цилиндра, пучок лучей в световоде



распространяется, оставаясь симметричным относительно оси, и поэтому максимальный угол преломления при выходе из «дальнего» торца равен $\delta/2$. Согласно закону преломления, максимальный угол преломления на «ближнем» торце световода равен

$\beta_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin(\alpha_{max})\right) \approx \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Минимальный угол падения на боковую поверхность $\gamma_{min} \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Здесь могут быть две ситуации в зависимости от соотношения этого угла с углом полного внутреннего отражения $\gamma_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Если $\gamma_{min} \geq \gamma_0$ (это соответствует тому, что $\sin(\gamma_{min}) \approx \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n}$, то есть $n \geq \sqrt{2}$), то все лучи, попавшие в световод, испытывают полное внутреннее отражение на боковых поверхностях и доходят до дальнего торца ($\tilde{\beta}_{max} = \beta_{max}$). Поэтому $\frac{\delta}{2} = \arcsin[n\sin(\beta_{max})] \approx \alpha_{max}$. Значит, в этом случае угол раствора пучка близок к 180°. Если же $\gamma_{min} < \gamma_0$ ($n < \sqrt{2}$), то в распространяться по «длинному» световоду с многократным отражением от боковой поверхности смогу только лучи с $\gamma \geq \gamma_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. В этом случае $\tilde{\beta}_{max} = \frac{\pi}{2} - \gamma_0$, и $\frac{\delta}{2} = \arcsin[n\sin(\tilde{\beta}_{max})] = \arcsin(\sqrt{n^2 - 1})$. Таким образом, в этом случае $\delta = 2\arcsin(\sqrt{n^2 - 1})$.

ОТВЕТ: $\delta = 2\arcsin(\sqrt{n^2 - 1})$ при $n < \sqrt{2}$, и δ близок к 180° при $n \geq \sqrt{2}$ (засчитывается также ответ, что при $n \geq \sqrt{2}$ δ равен удвоенному максимальному углу падения лучей от источника на торец световода).

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года
БИЛЕТ № 08 (УФА) : возможные решения и ответы

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

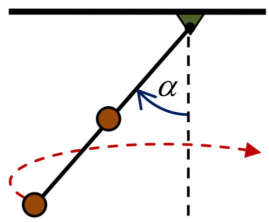
Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Задание 1.

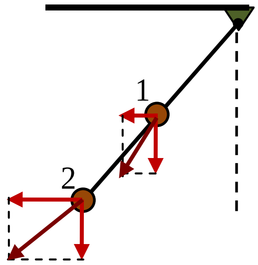
Вопрос: Конический маятник – материальная точка, подвешенная в вакууме в однородном поле тяжести на невесомой нерастяжимой нити, вращающаяся по окружности в горизонтальной плоскости. Как зависит период его вращения от угла отклонения нити от вертикали?

Задача: К нижнему концу легкого жесткого стержня длиной L прикрепили маленький тяжелый шарик, а к его середине – второй, точно такой же. Верхний конец стержня закрепили шарнирно на потолке. Конструкцию отклонили от вертикали и подтолкнули таким образом, что во время движения стержень все время образует с вертикалью один и тот же угол α. С какой угловой скоростью вращается стержень? Трением в шарнире и сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g.



Ответ на вопрос: При вращении груза в горизонтальной плоскости вертикальная составляющая силы натяжения нити должна уравновешивать вес груза ($F\cos(\alpha)=mg$), а «радиальная» – создавать центростремительное ускорение груза при вращении ($F\sin(\alpha)=m\omega^2 L\sin(\alpha)$). Разделив эти соотношения друг на друга, вычисляем угловую скорость вращения $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{L\cos(\alpha)}}$. Период вращения конического маятника $T=2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos(\alpha)}{g}}$, то есть он пропорционален корню квадратному из косинуса угла отклонения маятника от вертикали.

Решение задачи: Вертикальные (y) компоненты сил, с которыми стержень действует на шарики, уравновешивают веса шариков: $F_{1y}=F_{2y}=mg$. Радиальные (x) компоненты создают центростремительные ускорения: $F_{1x}=m\omega^2\dfrac{L}{2}\sin(\alpha)$ и $F_{2x}=m\omega^2 L\sin(\alpha)$.



По III закону Ньютона, точно с такими же по величине, но противоположными по направлению силами шарики действуют на стержень (именно эти силы показаны на рисунке). Сумма моментов сил, приложенных к «легкому» стержню, должна равняться нулю. Запишем это требование:

$$mg\frac{L}{2}\sin(\alpha)+mgL\sin(\alpha)-m\omega^2\frac{L}{2}\sin(\alpha)\frac{L}{2}\cos(\alpha)-m\omega^2 L\sin(\alpha)L\cos(\alpha)=0.$$

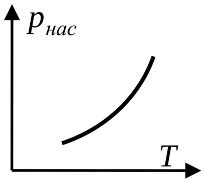
Выражая из него угловую скорость вращения, получаем: $\omega=\sqrt{\dfrac{6g}{5L\cos(\alpha)}}$.

Задание 2.

Вопрос: Насыщенные и ненасыщенные пары. Зависимость давления насыщенного пара от температуры.

Задача: В очень прочном баллоне объемом $V=90$ л находится 134 г смеси метана (CH_4), кислорода (O_2) и азота (N_2). При температуре $t_1=33°C$ давление в баллоне равнялось $p_1=1{,}4\cdot p_0$, где $p_0\approx 101$ кПа – нормальное атмосферное давление. Слабая электрическая искра подожгла метан, вызвав реакцию $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$, причем в ходе этой реакции оба реагента израсходовались полностью. После завершения реакции содержимое баллона охладили до температуры $t_2=100°C$. Каким стало давление в баллоне? Растворением углекислого газа пренебречь.

Ответ на вопрос: Насыщенным называют пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью Это равновесие динамическое – молекулы постоянно переходят из пара в жидкость и обратно, но в равновесии эти потоки в среднем уравновешиваются. Соответственно на границе жидкости с ненасыщенным паром доминирует испарение – жидкость переходит в пар, и пар в присутствии жидкости со временем становится насыщенным. Выходу молекул из жидкости в пар препятствуют межмолекулярные силы притяжения, и для интенсивного испарения жидкости обычно нужно сообщать энергию (теплоту парообразования) для увеличения потенциальной энергии взаимодействия молекул. При увеличении температуры увеличивается кинетическая энергия молекул, и они легче преодолевают притяжение соседей. Поэтому переход молекул из жидкости в пар становится намного интенсивнее, и динамическое равновесие устанавливается при более высокой плотности насыщенного пара. Вместе с плотностью и температурой пара растет нелинейным образом давление насыщенного пара (давление, плотность и абсолютная температура пара с молярной массой μ связаны соотношением $p=\dfrac{\rho RT}{\mu}$). Типичная форма графика зависимости $p_{нас}(T)$



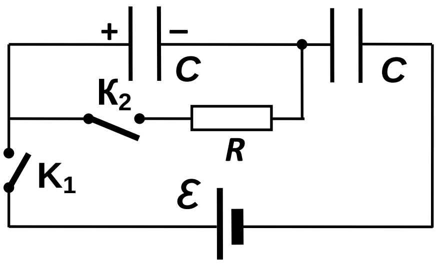
показана на рисунке.

Решение задачи: Обозначим количества веществ: азота – ν_1, метана – ν_2, кислорода – ν_3. Из уравнения Менделеева-Клапейрона и закона Дальтона следует, что $p_1V=(\nu_1+\nu_2+\nu_3)RT_1$. Из этого соотношения находим, что $\nu_1+\nu_2+\nu_3=\frac{p_1V}{RT_1}\approx 5$ молей. Поскольку в ходе последующей реакции и метан, и кислород израсходовались полностью, то $\nu_3=2\nu_2$. Кроме того, масса смеси . $m=\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3$. Решая полученную систему, найдем, что $\nu_1=0{,}5$ моля, $\nu_2=1{,}5$ моля, и $\nu_3=3$ моля. Согласно уравнению реакции, в результате сгорания метана в баллоне образовалось $\nu_2=1{,}5$ моля CO_2 и $\nu_3=3$ моля H_2O. Давление, создаваемое азотом и углекислым газом при 100°С, равно $p_2'=(\nu_1+\nu_2)\frac{RT_2}{V}\approx 68{,}9$ кПа. Если бы вся вода находилась в газообразном состоянии, то ее давление тоже бы определялось аналогичным уравнением, то есть $p_2''=\nu_3\frac{RT_2}{V}\approx 103{,}3$ кПа. Но это больше, чем давление насыщенного пара при этой температуре, и поэтому так быть не может – на самом деле часть пара сконденсировалась, и $p_2''=p_{нас}(T_2)\approx 101$ кПа. Поэтому давление в баллоне стало равно $p_2=p_2'+p_2''\approx 170$ кПа.

Задание 3.

Вопрос: Незаряженный конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения и зарядили до максимального заряда. Чему равен КПД зарядки, то есть отношение энергии, переданной конденсатору, к работе, произведенной источником?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, «левый» конденсатор изначально был заряжен до напряжения $U_0=\mathcal{E}/2$. Сначала замкнули ключ К$_1$, а затем, спустя некоторое время – ключ К$_2$. Какое количество тепла выделится в резисторе R после этого? Внутреннее сопротивление источника и сопротивление соединительных проводов пренебрежимо малы.



Ответ на вопрос: В процессе зарядки напряжение на конденсаторе растет до максимального значения, равного ЭДС источника. Поэтому источник переместит заряд $q=C\mathcal{E}$, и совершит работу $A=q\mathcal{E}=C\mathcal{E}^2$. Увеличение энергии конденсатора $\Delta E_C=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}$. Таким образом, $\frac{\Delta E_C}{A}=0{,}5$, и КПД зарядки изначально не заряженного конденсатора равен 50 %.

Решение задачи: После замыкания ключа К$_1$ источник дозаряжает батарею из двух конденсаторов одинаковой емкости. Обозначим конечный заряд «левого» конденсатора на этой стадии q_1, а «правого» – q_2. Из условия баланса напряжений $\frac{q_1}{C}+\frac{q_2}{C}=\mathcal{E}$. Кроме того, по закону сохранения заряда (сумма зарядов пластин конденсаторов, соединенных только друг с другом, не может измениться) $-q_1+q_2=-C\frac{\mathcal{E}}{2}$. Поэтому новые заряды конденсаторов равны $q_1=\frac{3C\mathcal{E}}{4}$ и $q_1=\frac{C\mathcal{E}}{4}$. После замыкания ключа К$_2$ «левый» конденсатор оказывается закорочен резистором, и он полностью разряжается. В ходе разряда через резистор протекает заряд $\Delta q'=\frac{3C\mathcal{E}}{4}$. Кроме того, через этот же резистор течет ток зарядки «правого» конденсатора, который должен зарядится до заряда $C\mathcal{E}$ (напряжение на «левом» конденсаторе падает до нуля, а сумма напряжений должна уравновешивать ЭДС источника). Для этого источнику нужно переместить на «правый» конденсатор заряд $\Delta q'' = \frac{3C\mathcal{E}}{4}$. Полный протекший через резистор после замыкания ключа К$_2$ заряд $\Delta q = \Delta q' + \Delta q'' = \frac{3C\mathcal{E}}{2}$. При этом напряжение на резисторе падало от начального значения $\frac{3\mathcal{E}}{4}$ до нуля по линейному (как функция протекшего заряда) закону. Значит, выделившееся в резисторе количество теплоты $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\mathcal{E}}{4} \cdot \frac{3C\mathcal{E}}{2} = \frac{9C\mathcal{E}^2}{16}$. Такой же ответ можно получить и из закона сохранения энергии: $Q = A_{ист} - \Delta E_C$.

Задание 4.

Вопрос: От чего зависит поперечное увеличение изображения предмета, создаваемого тонкой собирающей линзой на экране?

Задача: При помощи тонкой линзы на экране создано изображение пламени небольшой свечи, расположенного на главной оптической оси линзы перпендикулярно ей. При этом отношение линейных размеров изображения и самого пламени было равно $|\Gamma| = \frac{1}{3}$. Не двигая свечу, линзу переместили на расстояние $s = 50\,\text{см}$ вдоль ее оптической оси. После перемещения и подбора положения экрана отношение размеров стало равно $|\Gamma'| = 2$. Найти оптическую силу линзы.

Ответ на вопрос: Из построения хода лучей для линзы ясно, что поперечное увеличение предмета равно отношению расстояний от линзы до изображения b и от линзы до источника a: $\Gamma_\perp = -\frac{b}{a}$ (увеличение принимают отрицательным, когда изображение перевернуто.). Из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{F}{F-a}$. Таким образом, увеличение зависит от соотношения расстояния от предмета до линзы и фокусного расстояния линзы. Для разных действительных источников $a > 0$ мы можем получить $\Gamma_\perp > 1$ (при $0 < a < F$), $\Gamma_\perp < 0, |\Gamma_\perp| > 1$ (при $F < a < 2F$) и $\Gamma_\perp < 0, |\Gamma_\perp| < 1$ (при $a > 2F$).

Решение задачи: Так как изображение создается на экране, то оно действительное. Следовательно, линза является собирающей, а изображение перевернутое. В этом случае увеличение обычно считают отрицательным, причем $\Gamma = -\frac{b}{a}$, и с учетом формулы линзы $b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma = \frac{F}{F-a}$. Следовательно, для первого изображения $\frac{F}{F-a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 4F$. Для увеличения изображения линзу нужно было придвинуть ближе к свече. Поэтому после перемещения линзы $a \to a - s \Rightarrow \frac{F}{F-a+s} = -2 \Rightarrow a - s = \frac{3}{2}F \Rightarrow F = \frac{2}{5}s$. Следовательно, оптическая сила линзы $D = \frac{5}{2s} = 5\,\text{Дптр}$.