

7, 8 и 9 классы.

Возможные решения и критерии проверки.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

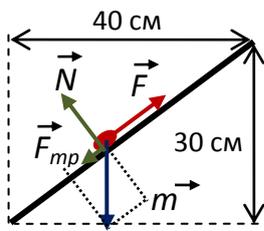
Часть I . Тестовое задание: пример варианта.

Вопрос 1 (8 баллов):

Из ровных деревянных планок изготовлена подставка в виде прямоугольного треугольника со сторонами 30см, 40 см и 50 см. Сначала подставку установили так, что катет 30 см был вертикален, а катет 40 см – горизонтален, и по гипотенузе, как по наклонной плоскости, медленно провели небольшой груз (с помощью нити, идущей вдоль плоскости). Затем подставку переставили: теперь катет 40 см был вертикален, а катет 30 см – горизонтален. Подъем груза повторили. Оказалось, что силы натяжения нити в первом и втором опыте соотносились как $F_2 : F_1 = 7 : 6$. Найдите коэффициент трения груза о плоскость гипотенузы. Ответ запишите в десятичной форме, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 0,30.

Пояснение: При медленном затаскивании сумма приложенных к грузу сил должна



равняться нулю. Поэтому сила F должна уравновешивать сумму силы трения скольжения (то есть μN , где N – сила нормальной реакции плоскости) и проекции силы тяжести на плоскость. Как видно из рисунка, с учетом подобия треугольников, для первого опыта $F_1 = \frac{3}{5}mg + \mu \frac{4}{5}mg$. Аналогично для второго $F_2 = \frac{4}{5}mg + \mu \frac{3}{5}mg$.

Поэтому $\frac{F_2}{F_1} = \frac{4+3\mu}{3+4\mu} = \frac{7}{6} \Rightarrow \mu = \frac{3}{10}$.

Вопрос 2 (8 баллов):

В вертикальном цилиндрическом сосуде с теплоизолирующими гладкими стенками под подвижным поршнем находится 40 г воды с температурой 0°C . Вес поршня и внешнее давление подобраны так, чтобы давление под поршнем в точности равнялось 1 Атм. В сосуд вводят 10 г водяного пара с температурой 101°C . Какой будет температура содержимого сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплоемкость воды 4,2 Дж/г, удельная теплоемкость пара в условиях опыта равна примерно 1,85 Дж/г, удельная теплота парообразования для воды 2480 Дж/г. Ответ запишите в градусах Цельсия.

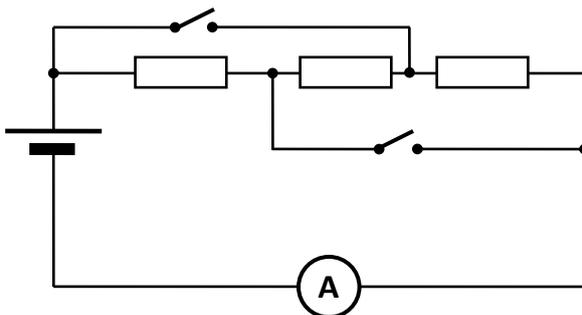
Ответ: 100.

Пояснение: При охлаждении пара до 100°C выделится $1,85 \times 10 = 18,5$ Дж тепла. Прежде чем продолжить остывание, пару нужно сконденсироваться. При полной конденсации пара выделится $2480 \times 10 = 24800$ Дж. Для нагрева жидкой воды до 100°C нужно $4,2 \times 40 \times 100 = 16800$ Дж, то есть очевидно больше, чем выделится только при остывании, и очевидно меньше, чем выделится при остывании и конденсации пара. Это означает, что пар остынет до 100°C , но сконденсируется только частично – настолько, чтобы нагреть воду до равновесной температуры 100°C . Значит, в конечном состоянии мы имеем находящиеся в равновесии воду и пар при температуре 100°C .

Вопрос 3 (9 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, сопротивление всех соединительных проводов и контактов ключей пренебрежимо мало. Все три резистора одинаковы. Пока оба ключа были разомкнуты, амперметр показывал силу тока в цепи, равную 1 А. Когда один из ключей замкнули, сила тока возросла до 2 А. Какой станет сила тока, если замкнуть и второй ключ? Считать, что провода и приборы не выйдут из строя. Ответ запишите в Амперах, без указания единиц.

Ответ: 3.



Пояснение: Пока оба ключа были разомкнуты, то ток тек через три последовательно соединенных резистора. Поэтому ток в первом случае $I_1 = \frac{E}{3R+r}$, где мы обозначили: E –

ЭДС источника (равную напряжению, которое источник создает на своих клеммах при разомкнутой цепи), r – внутреннее сопротивление источника, а R – сопротивление каждого из резисторов. После замыкания одного из ключей (любого) два резистора оказываются замкнутыми, и ток течет только через один резистор. Поэтому

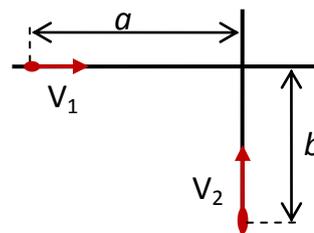
$I_2 = \frac{E}{R+r} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{3R+r}{R+r} = 2$, и поэтому $r=R$. После замыкания второго ключа

оказывается, что ток опять течет через все три резистора, но они оказываются подключены к клеммам источника параллельно. Поэтому $I_3 = \frac{E}{(R/3)+r}$, и мы можем найти, что

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{3(3R+r)}{R+3r} = 3, \text{ то есть } I_3 = 3A.$$

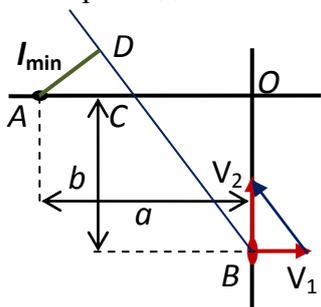
Часть II (творческое задание).

1. («Перекресток») Два автомобиля подъезжают по разным дорогам к перекрестку (дороги пересекаются под прямым углом – см. рисунок). Скорость «первого» автомобиля $V_1 = 54$ км/час, а второго – $V_2 = 72$ км/час. В тот момент времени, когда первому автомобилю осталось проехать до перекрестка расстояние $a = 400$ м, второму осталось до перекрестка $b = 300$ м. В дальнейшем скорости автомобилей не изменяются. Найдите минимальное расстояние между автомобилями в процессе движения.



Решение:

Так как нас спрашивают только про величину, характеризующую относительное положение автомобилей, то удобная система отсчета – связанная с одним из автомобилей. Рассмотрим движение в СО «автомобиль 1». Отметим характерные точки так, как



показано на рисунке. В этой СО автомобиль 1 покоится, а автомобиль 2 движется с постоянной скоростью $\vec{V}'_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Построив векторный треугольник скоростей (см. рисунок), мы находим положение линии BD , вдоль которой движется автомобиль 2 в этой системе отсчета. Минимальное расстояние равно длине перпендикуляра AD , опущенного на эту линию. Далее используем подобие треугольников. Треугольник OBC подобен треугольнику

скоростей, поэтому $|OC| = \frac{V_1}{V_2} b$. Значит, $|AC| = a - \frac{V_1}{V_2} b$. Треугольник ACD тоже подобен

треугольнику скоростей, поэтому $l_{\min} = |AD| = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} |AC| = \frac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$. Подставляя

скорости, находим: $l_{\min} = \frac{4a - 3b}{5} = 140$ м.

$$\text{ОТВЕТ: } l_{\min} = \frac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \frac{4a - 3b}{5} = 140 \text{ м.}$$

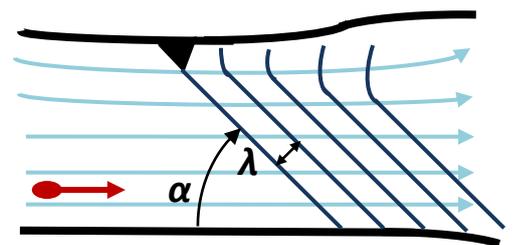
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Выбрана система отсчета и описано движение обоих автомобилей в этой СО	2	Любая СО!
Построен треугольник скоростей (для СО, связанной с одним из автомобилей) или записана формула для изменяющегося расстояния (СО «земля»)	5	
Найден минимум расстояния (геометрически или формула)	5	
Правильный численный ответ	3	
ВСЕГО	15	

2. («Стоячие валы») При изучении русла реки в ходе разведывательных работ исследовательская партия вышла к почти прямолинейному участку ее берега. На противоположной стороне реки находился скальный уступ, в который ударялось течение.

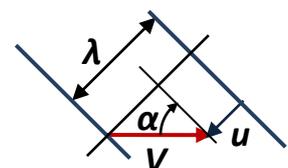
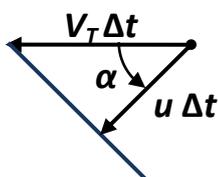


Ниже уступа по течению была видна система «водяных валов», расходящихся от уступа. Гребни валов были почти прямолинейны и ориентированы под углом $\alpha \approx 45^\circ$ к берегу (см. рисунок). Исследователи измерили расстояние между валами $\lambda \approx 3,2$ м. В это время их коллега спускался вниз по течению на моторной лодке, двигавшейся со скоростью $V = 8$ м/с относительно воды. Он сообщил, что при прохождении системы валов период ударов лодки о валы равен $T \approx 0,4$ с. Какова скорость течения реки на этом участке?



Решение:

Перейдем в систему отсчета, связанную с водой. В этой системе отсчета уступ движется «против течения» со скоростью течения V_T . Он возбуждает волны. Наблюдаемая картина соответствует тому, что V_T больше скорости распространения волн по воде u . В самом деле,



скорость распространения волны направлена перпендикулярно фронту, и за время $u\Delta t$ сдвинется на расстояние $V_T\Delta t$, а фронт волны пройдет расстояние $u\Delta t$ (рисунок слева).

Значит, угол наклона валов удовлетворяет соотношению $\sin(\alpha) = \frac{u}{V_T}$. С другой стороны,

при движении лодки (ее скорость задана именно в рассматриваемой системе отсчета!) интервал времени между «встречами» с валами $T = \frac{\lambda}{V \sin(\alpha) + u}$ (на рисунке справа

показано, как происходит сближение лодки и очередного фронта волны – относительно воды они движутся навстречу друг другу под углом). Подставляя сюда выражение

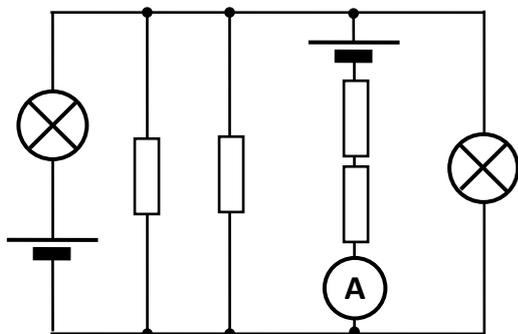
$$u = V_T \sin(\alpha), \text{ находим: } V_T = \frac{\lambda}{T \sin(\alpha)} - V \approx 3,3 \text{ м/с.}$$

ОТВЕТ: скорость течения $V_T = \frac{\lambda}{T \sin(\alpha)} - V \approx 3,3 \text{ м/с.}$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Объяснен вид картины валов	2	На базе свойств волн
Найдена связь угла наклона валов с соотношением скоростей	5	
Найдена связь T и скоростей	5	
Правильный численный ответ	3	
ВСЕГО	15	

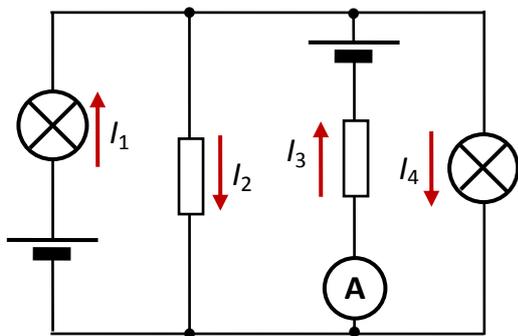
3. («Баланс света») Из четырех одинаковых резисторов, двух одинаковых ламп, двух разных аккумуляторов и амперметра собрали схему, показанную на рисунке.



При этом оказалось, что обе лампы светят одинаково: мощность светового излучения каждой из них равна $P = 2,5$ Вт. При этом амперметр показывает ток $I = 0,6$ А. Известно, что КПД ламп равен $\eta = 40\%$, а сопротивление каждого из резисторов $R = 40$ Ом. Сопротивление амперметра много меньше 1 Ом. Какими станут показания амперметра, если перенести его в ветвь с одним из сопротивлений? Чему равно сопротивление лампы в режиме, в котором они работают в данной схеме?

Решение:

Для простоты расчетов заменим два параллельных резистора на один с сопротивлением $R/2$, а два последовательно соединенных – на один с сопротивлением $2R$. Обозначим общее напряжение на всех «вертикальных» (по рисунку) ветвях символом U и запишем закон Ома для участка цепи с ЭДС для каждой из ветвей:



$$\left\{ \begin{array}{l} U = E_1 - I_1(R_{\text{Л}} + r_1) \\ U = I_2 \frac{R}{2} \\ U = E_2 - I_3(2R + r_2) \\ U = I_4 R_{\text{Л}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{E_1 - U}{R_{\text{Л}} + r_1} \\ I_2 = \frac{2U}{R} \\ I_3 = \frac{E_2 - U}{2R + r_2} \\ I_4 = \frac{U}{R_{\text{Л}}} \end{array} \right.$$

(нумерация ветвей и направления токов, выбранные как положительные, показаны на рисунке, $E_{1,2} > 0$ и $r_{1,2}$ – величины ЭДС и внутренних сопротивлений источников, сопротивлением амперметра пренебрегаем). Нам известно, что обе лампы светят одинаково. Это означает, что протекающий через них ток по величине одинаков. Теоретически возможны два варианта.

Первый: $I_1 = I_4$. С учетом условия непрерывности тока $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ находим, что выполняется также соотношение $I_3 = I_2$. Но $I_3 = I$ – это ток, измеряемый амперметром. Перенос амперметра практически не влияет на токи в схеме, и поэтому после переноса (когда амперметр будет измерять половину тока I_2), его показания уменьшатся вдвое: $I' \approx 0,3$ А. Заметим также, что в соответствии с записанными уравнениями

$$I = I_3 = I_2 = \frac{2U}{R} \Rightarrow U = \frac{IR}{2}. \text{ Мощность потребления ламп } \frac{P}{\eta} = \frac{U^2}{R_{\text{Л}}}, \text{ и из этого}$$

соотношения находим: $R_{\text{Л}} = \frac{\eta U^2}{P} = \frac{\eta I^2 R^2}{4P} \approx 23 \text{ Ом}$. Отметим, что следующие значащие

цифры указывать некорректно – мы пренебрегали внутренним сопротивлением амперметра, поэтому у нас есть неучтенные поправки, величина которых около 2%.

Второй: $I_1 = -I_4$. Действуя аналогично, убеждаемся, что этот вариант невозможен: в этом

$$\text{случае } I_3 = I_2 + \frac{2U}{R_{\text{Л}}} = \frac{2U(R + R_{\text{Л}})}{R_{\text{Л}}R} \Rightarrow U = \frac{I R_{\text{Л}} R}{2(R + R_{\text{Л}})}, \text{ поэтому } \frac{P}{\eta} = \frac{I^2 R_{\text{Л}} R^2}{2(R_{\text{Л}} + R)^2}, \text{ и для}$$

сопротивления лампы получается квадратное уравнение $R_{\text{Л}}^2 + 2R \left(1 - \frac{\eta I^2 R}{4P} \right) R_{\text{Л}} + R^2 = 0$ без

вещественных корней.

ОТВЕТ: При переносе амперметра его показания уменьшатся в два раза ($I' \approx 0,3$ А),

$$\text{сопротивление лампы в рабочем режиме } R_{\text{Л}} = \frac{\eta I^2 R^2}{4P} \approx 23 \text{ Ом}.$$

Примечание 1: Доказательство осуществимости или неосуществимости вариантов можно провести и на базе полной системы уравнений. Для этого нужно выразить ЭДС с учетом

требований к токам. Тогда для первого случая $E_1 = U \left(2 + \frac{r_1}{R_{\text{Л}}} \right)$ и $E_2 = U \left(5 + \frac{2r_2}{R} \right)$, а для

второго $E_1 = -\frac{r_1}{R_{\text{Л}}} U$ и $E_2 = U \left(1 + \frac{2(R_{\text{Л}} + R)(2R + r_2)}{R_{\text{Л}}R} \right)$. Как видно, в первом случае обе

ЭДС могут одновременно удовлетворять требованию $E_{1,2} > 0$, а во втором – нет.

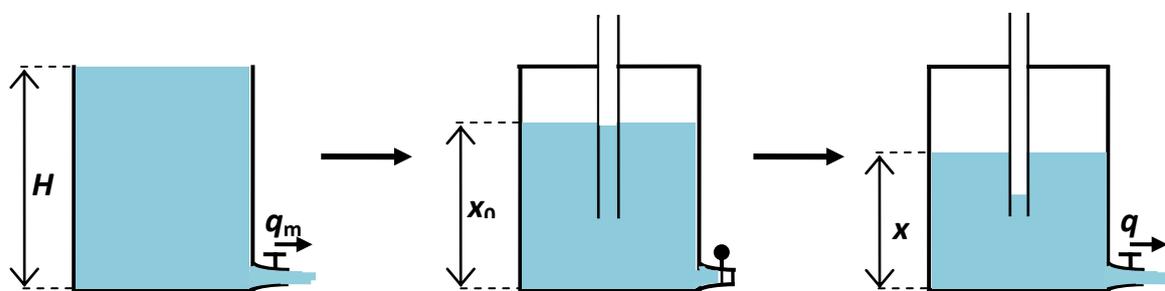
Примечание 2: Важно, что при вычислениях не должны быть использованы неизвестные параметры – такие, как ЭДС и внутренние сопротивления источников. Например, решение, в котором используются явно значения $r_1 = r_2 = 0$, не является полностью корректным.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записаны исходные соотношения токов и напряжений, необходимые для получения ответа (законы Ома, непрерывность токов, правила Кирхгофа)	3	Может быть и неполная система, если ее достаточно
Учтено условие равенства мощностей свечения ламп	2	
Найдено «новое» значение силы тока	4	
Получено уравнение для сопротивления ламп	4	
Получен правильный ответ для сопротивления	4	
Рассматривается вторая ситуация	1	
Проведен анализ реализуемости обеих ситуаций	2	По 1 баллу за каждую
ВСЕГО	20	

Если используется полная система с $r_1 = r_2 = 0$, и правильный ответ получен с использованием этих значений – такое решение оценивается максимум в **16 баллов**.

4. («Очень большой сифон») В архивах одной секретной лаборатории был найден отчет о необычном эксперименте. Для него была построена вертикальная колонна высотой $H = 6$ м. Колонна снабжена вентилем небольшого диаметра, расположенным в



самом низу колонны и снабженным очень точным электронным счетчиком расхода воды (*расход воды* – это объем воды, проходящей через вентиль в единицу времени). Если колонну заполнить целиком и открыть вентиль, то расход воды будет максимален и равен некоторой величине q_m . В ходе эксперимента колонну заполняли водой частично при запертом вентиле, закрывали сверху крышкой с тонкостенной трубкой, идущей сквозь крышку внутрь колонны, тщательно герметизировали все стыки (стенок колонны с крышкой и крышки с трубкой), а затем открывали вентиль. В архиве сохранилась таблица данных о связи расхода воды (в процентах от q_m) и высоты уровня воды в колонне.

x, \dots	5,62	5,50	5,00	4,50	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00
$q/q_m, \%$	81,6	71,4	57,7	57,8	57,8	57,7	57,7	54,4	48,7

Правда, в таблице не указаны единицы измерения высоты, но в пояснениях сообщается, что погрешность всех данных равна единице последнего указанного разряда. Пользуясь имеющимися данными, ответьте на следующие вопросы:

- На какой высоте над дном колонны находится нижний конец трубы?
- Каков был начальный уровень воды в колонне в этом эксперименте?
- В каких единицах могут быть приведены высоты в таблице?
- При каком атмосферном давлении проводился эксперимент?

Атмосферное давление считайте неизменным и найдите его в мм.рт.ст. (плотность ртути примерно в 13,546 раза больше плотности воды). Все высоты нужно найти в метрах. Для всех найденных величин постарайтесь обеспечить наилучшую возможную точность, и укажите ее. Известно, что в рамках требуемой точности вязкое трение, поверхностное натяжение и сжимаемость воды можно не учитывать.

Решение:

Расход воды связан со скоростью вытекания воды v и площадью поперечного сечения потока через вентиль S соотношением $q = v \cdot S$. Скорость вытекания проще всего определить из уравнения Бернулли: если давление на уровне вентиля (то есть у дна колонны) равно p , а давление снаружи (атмосферное давление) равно p_0 , то (сечение колонны много больше сечения вентиля, и скорость движения воды на уровне вентиля в колонне много меньше скорости вытекания) $p \approx p_0 + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}$, где ρ –

плотность воды. Значит, $q \approx S \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}$. При открытой полностью заполненной колонне

давление у дна $p \approx p_0 + \rho g H$, и поэтому $q_m \approx S \sqrt{2gH}$. При закрытой колонне в первый момент давление над поверхностью воды равно p_0 , и давление у дна $p \approx p_0 + \rho g x_0$,

поэтому начальный расход $q_0 \approx S \sqrt{2g x_0}$. Следовательно, $\frac{q_0}{q_m} = \sqrt{\frac{x_0}{H}}$. Согласно таблице,

$\frac{q_0}{q_m} = 0,816 \pm 0,001$. Поэтому $\frac{x_0}{H} \approx 0,6659 \pm 0,0016$ (в промежуточных результатах для

повышения точности расчетов сохраняем «лишний» разряд), и $x_0 = (4,00 \pm 0,01)$ м. По таблице $x_0 = 5,62 \pm 0,01$ неизвестных единиц длины, поэтому используемая единица длины равна $0,712 \pm 0,002$ м. В этот диапазон попадает аршин (1 аршин $\approx 0,7112$ м), так что лаборатория скорее всего располагалась в России. По мере вытекания воды давление над поверхностью уменьшается обратно пропорционально объему воздушного промежутка (при

неизменной температуре), поэтому давление у дна $p \approx p_0 \frac{H - x_0}{H - x} + \rho g x$, поэтому скорость

вытекания и расход воды через вентиль изменяются: $q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H} - \frac{p_0}{\rho g H} \frac{x_0 - x}{H - x}}$ (как видно

из таблицы, расход убывает). Однако при этом уменьшается давление у нижнего конца трубки, и когда оно достигнет p_0 , то уровень воды в трубке опустится до ее нижнего конца, и дальше воздух начнет поступать через трубку в колонну, поддерживая давление, равное p_0 на уровне нижнего конца трубки). Поэтому давление у дна будет постоянно и равно $p \approx p_0 + \rho g h$ (где h и – высота нижнего конца трубы над дном колонны). На этом этапе

расход должен быть постоянен и равен $\bar{q} = q_m \sqrt{\frac{h}{H}}$. Из таблицы видно, что расход

действительно постоянен в пределах точности измерений в диапазоне $3,00 \leq x \leq 5,00$.

Усредняя имеющиеся значения, находим: $\frac{q}{q_m} \approx 0,5774$, и поэтому $\frac{h}{H} \approx 0,3334 \pm 0,0011$, что

дает для высоты нижнего конца трубы над дном колонны $h = (2,000 \pm 0,007)$ м. Этот этап прекращается, когда уровень воды достигает нижнего конца трубы. Далее воздух поступает в колонну, поддерживая над поверхностью воды давление p_0 , при этом давление у дна

$p \approx p_0 + \rho g x$, и поэтому $q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H}}$ – расход воды уменьшается, как и видно из

таблицы. Как видно, атмосферное давление можно найти только по одному из значений расхода – при $x = (5,50 \pm 0,01)$ аршин $\approx (3,912 \pm 0,007)$ м. Из формулы для расхода жидкости

на этом этапе найдем, что $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{H(H-x)}{x_0-x} \left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2} \right)$, что позволяет найти атмосферное

давление в мм водяного столба. Ясно, что для перевода в мм.рт.ст. нужно учесть различие

плотностей: $\frac{p_0}{\rho_{PT} g} = \frac{\rho}{\rho_{PT}} \frac{H(H-x)}{x_0-x} \left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2} \right)$. Подставляя численные значения находим,

что $p_0 = (1500 \pm 300)$ мм.рт.ст. (точность оказывается низкой, так как при вычислении величины $x_0 - x$ возникает очень большая ошибка – это величина около 9 см, и ошибка может быть близка к ней по порядку величины: $x_0 - x = (8,8 \pm 1,7)$ см! Обнаруживается, что в любом случае давление значительно превышало нормальное атмосферное (760 мм.рт.ст). Можно сделать вывод, что эксперимент проводился в барокамере очень значительных размеров.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записано выражение для расхода воды при полной колонне	2	
Записан закон Бернулли иди эквивалентные соотношения	3	
Определен начальный уровень воды в метрах	3	Не указана точность или указана очень «неразумно»: - 1 балл.
Определены единицы измерения	2	
Получена формула для $q(x)$ до начала поступления воздуха	4	
Обнаружено, что при некоторой высоте воздух начинает поступать в колонну и расход становится постоянным	3	
Определена высота конца трубы над дном колонны	3	Не указана точность или указана очень «неразумно»: - 1 балл.
Найдено атмосферное давление	3	
Указана (с отклонение не более чем в 1,5 раза) погрешность нахождения p_0	2	Отклонение не более чем в 2 раза: 1 балл
ВСЕГО	25	