7, 8 и 9 классы: возможные решения

БИЛЕТ № 14 (ЖЕЛЕЗНОВОДСК)

Задание 1.

Вопрос: Два шарика одинаковой массы, летевшие навстречу друг другу вдоль одной прямой со скоростями 1 м/с и 2м/с, столкнулись. Произошел абсолютно упругий удар. Какими стали скорости шаров?

Задача: Снаряд массы $m = 6$ кг, летевший вертикально, взорвался в верхней точке траектории. При этом образовались два осколка, полетевшие поступательно. Известно, что в результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на $W = 480$ кДж, а масса образовавшихся пороховых газов пренебрежимо мала. Относительная скорость разлета осколков сразу после взрыва оказалась на 25% больше минимально возможной. Найдите эту скорость. Каким было отношение масс осколков?

Ответ на вопрос: При абсолютно упругом ударе сохраняются импульс и энергия. Так как массы тел одинаковы, то это означает, что сумма проекций скоростей тел на линию движения и сумма их квадратов остаются неизменными. Поскольку при лобовом ударе шаров скорости не могут остаться прежними, то, как нетрудно догадаться, должен произойти «обмен скоростями»: в результате удара каждый шарик разворачивается, и после удара движется в точности со скоростью другого до удара. Итак, шарики поменяют направление движения, и при этом тот шарик, что двигался со скоростью 1 м/с, будет двигаться со скоростью 2 м/с, и наоборот.

Решение задачи: В верхней точке траектории снаряд, летевший вертикально, останавливается. Поэтому скорость снаряда перед взрывом равна нулю. Поэтому, по закону сохранения импульса, сумма импульсов осколков сразу после взрыва равна нулю. Это означает, что они полетели вдоль одной прямой. Обозначим отношение масс осколков $m_1 : m_2 \equiv z$, причем будем считать «первым» более тяжелый осколок (то есть $z \geq 1$). Из условия задачи следует, что $m_1 + m_2 = m$, и поэтому $m_1 = \frac{z}{z+1} m$ и $m_2 = \frac{1}{z+1} m$. Запишем законы сохранения импульса и энергии в процессе взрыва как уравнения для величин скоростей:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{z}{z+1} m v_1 = \frac{1}{z+1} m v_2 \\ & W = \frac{z}{z+1} \frac{m v_1^2}{2} + \frac{1}{z+1} \frac{m v_2^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} & v_1 = \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{2W}{m}} \\ & v_2 = \sqrt{z} \sqrt{\frac{2W}{m}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{отн} = v_1 + v_2 = \left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \sqrt{\frac{2W}{m}} .$$

Как видно, величина относительной скорости осколков при заданных W и m зависит только от отношения масс осколков. Поэтому ясно, что «минимальное» значение этой величины нужно выбирать как минимум при всевозможных изменениях z. Минимальное возможное значение величины $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ достигается при $z = 1$ и равно 2. Поэтому, согласно условию, $v_{отн} = \frac{5}{4} v_{\min} = \frac{5}{4} 2 \sqrt{\frac{2W}{m}} = 5 \sqrt{\frac{W}{2m}} = 1000$ м/с. Кроме того, ясно, что $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{5}{2}$. Решая это уравнение относительно $\sqrt{z}$, находим: $\sqrt{z} = 2 \Rightarrow z = 4$.

ОТВЕТ: $v_{отн} = 5 \sqrt{\frac{W}{2m}} = 1000$ м/с, $\frac{m_1}{m_2} = 4$.

Задание 2.

Вопрос: В сосуде под поршнем находится насыщенный водяной пар, который сжимают, поддерживая температуру неизменной. Что при этом происходит с давлением пара? Ответ обосновать.

Задача: В теплоизолирующем цилиндрическом сосуде под скользящем без трения поршнем находились в равновесии $m_1 = 200$ г льда и $m_2 = 800$ г воды при нормальном атмосферном давлении. В него закачивают насыщенный водяной пар под таким же давлением. Какую массу пара нужно закачать, чтобы температура содержимого увеличилась до $t = 50°C$? Удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 340$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К, удельная теплота парообразования воды $r = 2480$ кДж/кг.

Ответ на вопрос: Насыщенный пар – это пар, находящийся в равновесии с жидкостью. Плотность и давление такого пара зависят только от температуры, поэтому при неизменной температуре и давление насыщенного пара остается неизменным, несмотря на сжатие. В ходе сжатия количество пара (его масса) уменьшается пропорционально объему – происходит конденсация пара с образованием жидкой воды.

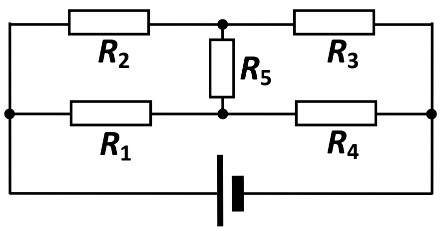
Решение задачи: Поскольку в начальном состоянии вода и лед находились в равновесии при нормальном атмосферном давлении, то начальная температура содержимого сосуда равнялась $t_0 = 0°C$. Температура насыщенного пара, давление которого равно нормальному атмосферному, равна температуре кипения воды при таком давлении, то есть $t_1 = 100°C$. При попадании в сосуд с боле низкой температурой пар сразу начинает конденсироваться, и за счет теплоты конденсации и теплоты остывания образовавшейся воды тает лед и нагревается холодная вода. Значит, необходимая масса пара должна обеспечить таяние всего льда и нагрев всей воды (и той, что была изначально, и образовавшейся в результате таяния льда) от $t_0 = 0°C$ до $t = 50°C$. Составим уравнение теплового баланса: $m \cdot r + m \cdot c(t_1 - t) = \lambda \cdot m_1 + (m_1 + m_2)c(t - t_0)$ и выразим из него массу пара: $m = \dfrac{\lambda \cdot m_1 + (m_1 + m_2)c(t - t_0)}{r + c(t_1 - t)} \approx 88$г.

ОТВЕТ: $m = \dfrac{\lambda \cdot m_1 + (m_1 + m_2)c(t - t_0)}{r + c(t_1 - t)} \approx 88$г.

Задание 3.

Вопрос: У двух последовательно соединенных резисторов $R_2 / R_1 = 4$. Во сколько раз отличаются мощности тепловых потерь в этих резисторах?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, сопротивления двух резисторов одинаковы $R_2 = R_4 \equiv R$, а у остальных – отличаются: $R_1 = 7R$, $R_3 = 3R$, а $R_5 = 5R$. Во сколько раз мощность тепловых потерь в резисторе R_3 больше, чем в резисторе R_1?



Ответ на вопрос: Ток в последовательно соединенных резисторах одинаков. Согласно закону Джоуля-Ленца, мощность тепловых потерь в резисторе $P = I^2 R$. Поэтому отношение этих мощностей для двух последовательно соединенных резисторов равно отношению их сопротивлений, то есть $P_2 / P_1 = 4$.

Решение задачи: Занумеруем токи, текущие в каждом из резисторов, теми же номерами, что и резисторы: I_1, I_2 и т.д. Напряжение, создаваемое источником на концах участка с сопротивлениями, можно записать двумя способами: $U = RI_2 + 3RI_3 = 7RI_1 + RI_4$. Из этого соотношения находим, что $I_2 + 3I_3 = 7I_1 + I_4$. Также двумя способами можно вычислить и ток в ветви с источником: $I = I_1 + I_2 = I_3 + I_4$. Вычтем почленно это равенство из предыдущего, и получим уравнение связи I_3 и I_1: как видно, $3I_3 - I_1 = 7I_1 - I_3 \Rightarrow I_3 = 2I_1$. Следовательно, $\dfrac{P_3}{P_1} = \dfrac{I_3^2 R_3}{I_1^2 R_1} = \dfrac{4 \cdot 3}{7} = \dfrac{12}{7}$. Итак, P_3 больше P_1 в $\dfrac{12}{7}$ раза.

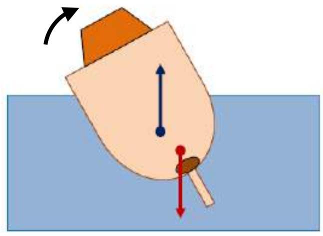
ОТВЕТ: P_3 больше P_1 в $\frac{12}{7}$ раза.

Задание 4.

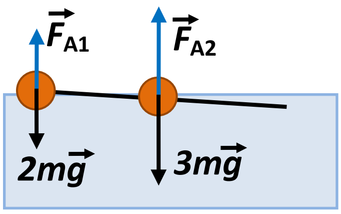
Вопрос: При каких условиях тело может устойчиво плавать на поверхности воды? Ответ объяснить.

Задача: На тонком металлическом стержне закреплены два деревянных шарика, масса каждого из которых в $k = 2$ раза больше массы стержня. Центр первого шара совпадает с серединой стержня, а центр второго – с одном из концов стержня. Эту конструкцию поместили в воду. Для обоих шаров найдите отношение объема погруженной части к объему шара (в процентах). Плотность дерева в $n = 2{,}5$ раза меньше плотности воды.

Ответ на вопрос: Для плавания необходимо, чтобы сила Архимеда уравновешивала силу тяжести даже при неполном погружении тела. Таким образом, <u>первое требование</u> состоит в том, что средняя плотность тела должна быть меньше плотности воды. Но не всегда плавание тела устойчиво – в некоторых положениях при малых отклонениях от положения равновесия возникающие некомпенсированные силы могут еще больше уводить тело от этого положения. Значит, для устойчивого плавания в одном положении необходимо также выполнение <u>второго требования</u>: момент пары сил (силы тяжести и силы Архимеда) при малом отклонении тела от положения равновесия должен возвращать тело обратно в это положение. Этому требованию можно придать и другую форму: как видно из рисунка, оно означает, что точка приложения силы тяжести для плавающего тела (то есть его центр масс) должен находиться ниже точки приложения силы Архимеда (эту точку часто называют центром плавучести).



Решение задачи: Обозначим искомые величины x (доля объема погруженной части для «крайнего» шара) и y (для «среднего» шара). Пусть масса стержня равна m (это значит, что массы шаров равны $km = \rho \cdot V$, где ρ – плотность дерева, а V – объем одного шара). Сумма сил Архимеда, действующих на шары, должна уравновешивать вес всех тел: $n\rho(xV + yV)g = (2k+1)mg = \frac{2k+1}{k}\rho V$. Из этого соотношения определяем, что $x + y = \frac{2k+1}{kn} = 1$. Кроме того, должна равняться нулю сумма моментов сил, приложенных к стержню. Как видно из рисунка, это возможно только в том случае, когда отношение сил Архимеда равно отношению сил тяжести, с которыми у них совпадает точка приложения: $\frac{n\rho \cdot xVg}{n\rho \cdot yVg} = \frac{kmg}{(k+1)mg}$, откуда $\frac{x}{y} = \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3}$.



Решая полученную систему уравнений, находим: $x = \frac{1}{n} = 0{,}4 = 40\%$ и $y = \frac{k+1}{kn} = 0{,}6 = 60\%$.

ОТВЕТ: для крайнего шара $x = \frac{1}{n} = 40\%$, а для среднего $y = \frac{k+1}{kn} = 60\%$.

БИЛЕТ № 15 (МОСКВА)

Задание 1.

Вопрос: Два тела одинаковой массы летели во взаимно-перпендикулярных направлениях с одинаковой по модулю скоростью. Произошло абсолютно неупругое столкновение. Какая часть кинетической энергии перешла в тепло?

Задача: Снаряд, летевший со скоростью $V = 300$ м/с, разорвался на три осколка. Два осколка имели одинаковые массы $m = 2$ кг каждый, и они полетели с одинаковой по модулю скоростью. Масса третьего осколка была в два раза больше, и он полетел вдоль линии движения снаряда до взрыва. Известно, что в результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на $W = 810$ кДж. Движение всех осколков поступательное, а масса пороховых газов пренебрежимо мала. Найдите максимально возможную величину скорости третьего осколка при таких условиях.

Ответ на вопрос: При неупругом ударе сохраняется импульс – проекции импульса образовавшегося тела удвоенной массы ($2m$) на взаимно-перпендикулярные направления движения тел до удара равны импульсам тел (mv). Поэтому проекции скорости этого тела равны $\frac{v}{2}$, а модуль скорости $v' = \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}v$. Выделившееся тепло равно убыли кинетической энергии: $Q = E_0 - E' = 2\frac{mv^2}{2} - \frac{2m(v/\sqrt{2})^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = 0{,}5 \cdot E_0$. Таким образом, в тепло перешло 50% начальной кинетической энергии.

Решение задачи: Из условия задачи следует, что масса снаряда равнялась $4m$, и поэтому закон сохранения импульса для процесса взрыва можно записать как $4m\vec{V} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + 2m\vec{v}_3$ (здесь $\vec{v}_{1,2,3}$ – скорости осколков, причем $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \equiv v$). Закон сохранения энергии дает: $\frac{4mV^2}{2} + W = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{2mv_3^2}{2}$. Как видно, возможность передать третьему осколку как можно большую долю начальной энергии ограничивается требованиями закона сохранения импульса (например, с точки зрения одного закона сохранении энергии можно подумать – как сделали некоторые участники – что максимум v_3 достигается при $v = 0$; однако легко убедиться, что при таком значении v закон сохранения импульса не может быть выполнен). Поэтому для достижения максимума v_3 необходимо обеспечить передачу ему как можно большего импульса. Это достигается, если 3-й осколок полетит в направлении движения снаряда до взрыва, а 1-й и 2-й – в противоположном направлении. В этом случае из закона сохранения импульса в проекции на линию движения снаряда $4mV = -2mv + 2mv_3$ находим, что $v = v_3 - 2V$. Значит, с учетом уравнения закона сохранения энергии $V^2 + \frac{W}{2m} = \frac{(v_3 - 2V)^2}{2} + \frac{v_3^2}{2} = v_3^2 - 2Vv_3 + 2V^2 \Rightarrow (v_3 - V)^2 = \frac{W}{2m}$. Выбирая наибольший корень этого уравнения, получаем: $(v_3)_{\max} = V + \sqrt{\frac{W}{2m}} = 750$ м/с.

ОТВЕТ: $(v_3)_{\max} = V + \sqrt{\frac{W}{2m}} = 750$ м/с.

Возможный вариант решения: рассмотреть процесс взрыва в системе отсчета, связанной со снарядом перед взрывом.

Задание 2.

Вопрос: Каким образом можно добиться, чтобы вода оставалась жидкой при температуре – 5°C? Предложите один вариант, объяснив его.

Задача: В трехлитровую банку массой $m = 250$ г набросали доверху мокрого снега, не утрамбовывая его. Оказалось, что масса банки со снегом равна $M = 2550$ г. Если снег плотно утрамбовать, его объем станет равен $V = 2{,}5$ л. Какое количество теплоты нужно сообщить снегу, чтобы он полностью растаял? Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3; плотность ледяных кристаллов, из которых состоит сухой снег, $\rho = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 340$ Дж/г.

Ответ на вопрос: Таких вариантов достаточно много (допустим любой), но самый естественный – добавить в воду «антифриз» (например, поваренную соль). Молекулы соли, проникая между молекулами воды, изменяют их взаимодействие и препятствуют кристаллизации. Другой вариант – изолировать чистую воду от внешних воздействий, исключив образование «центров кристаллизации». В этом случае вода из-за невозможности «старта» кристаллизации может при соблюдении необходимых предосторожностей задерживаться на достаточно длительное время в жидком состоянии и при отрицательных температурах и нормальном атмосферном давлении (это состояние называют «переохлажденной» водой).

Решение задачи: В процессе утрамбовывания мокрого снега из него вытеснили воздух, и осталась смесь воды (массой m_0) и ледяных кристаллов (массой $M - m - m_0$). Поэтому $V = \dfrac{M - m - m_0}{\rho} + \dfrac{m_0}{\rho_0}$. Выражаем из этого соотношения массу воды: $m_0 = \dfrac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}(M - m - \rho V) = 0{,}5$ кг и массу льда $M - m - m_0 = \dfrac{\rho}{\rho_0 - \rho}(\rho_0 V - M + m) = 1{,}8$ кг.

Для плавления льда потребуется количество теплоты $Q = \dfrac{\lambda\rho}{\rho_0 - \rho}(\rho_0 V - M + m) = 612$ кДж.

ОТВЕТ: $Q = \dfrac{\lambda\rho}{\rho_0 - \rho}(\rho_0 V - M + m) = 612$ кДж.

Задание 3.

Вопрос: Две лампы, имеющие одинаковую мощность $P = 4{,}5$ Вт, рассчитаны на разные напряжения: $U_1 = 3$ В и $U_2 = 6$ В. Чему равны их сопротивления в номинальном режиме?

Задача: Исследуя поведение лампы в цепи, изображенной на рисунке, школьник обнаружил, что яркость свечения лампы не зависит от положения движка реостата – лампа всегда работает в номинальном режиме, в котором ее мощность $P = 90$ Вт. Номинальное напряжение лампы $U = 36$ В. Внутренние сопротивления обоих источников одинаковы и равны $r = 2$ Ом. Чему равны напряжения, которые каждый из источников создает на своих клеммах при разомкнутой цепи?

Ответ на вопрос: Поскольку мощность лампы $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$, то $R = \frac{U^2}{P}$. Значит, $R_1 = \frac{U_1^2}{P} = 2\,\text{Ом}$, а $R_2 = \frac{U_2^2}{P} = 8\,\text{Ом}$.

Решение задачи: Обозначим полное сопротивление ветви с реостатом R. Сопротивление лампы в номинальном режиме $R_Л = \frac{U^2}{P} = 14{,}4\,\text{Ом}$. Ток в ветви реостатом $I_1 = \frac{\mathrm{E} - U}{R}$ и ток в ветви со вторым источником $I_2 = \frac{\mathrm{E}_2 - U}{r}$ в сумме дают ток через лампу $I = I_1 + I_2 = \frac{\mathrm{E} - U}{R} + \frac{\mathrm{E}_2 - U}{r}$, который не зависит от R только в том случае, когда $\mathrm{E} = U = 36\,\text{В}$ (ток через реостат не течет). Но тогда $I = \frac{U}{R_Л} = \frac{\mathrm{E}_2 - U}{r} \Rightarrow \mathrm{E}_2 = U + U\frac{r}{R_Л} = U + \frac{rP}{U} = 41\,\text{В}$.

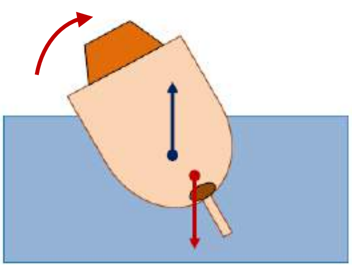
ОТВЕТ: $\mathrm{E} = U = 36\,\text{В}$, $\mathrm{E}_2 = U + U\frac{r}{R_Л} = U + \frac{rP}{U} = 41\,\text{В}$.

Задание 4.

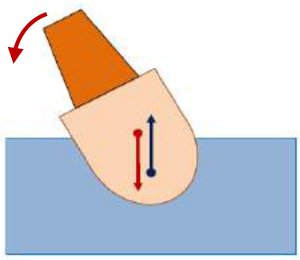
Вопрос: Существует «золотое правило кораблестроения», согласно которому центр плавучести (точка приложения силы Архимеда, действующей на корабль) в положении равновесия должен находиться выше центра масс корабля. Объясните смысл этого правила.

Задача: Стержень, имеющий форму тонкого цилиндра постоянного сечения, неоднороден. Его центр масс находится на расстоянии $x = \frac{1}{3}$ части его длины от одного из концов. Средняя плотность стержня равна ρ. Его опускают в большой сосуд с жидкостью с плотностью ρ_0. Глубина жидкости в сосуде заметно больше длины стержня. При каких значениях ρ_0 стержень после установления равновесия расположится вертикально?

Ответ на вопрос: Для объяснения рассмотрим два корабля: один (рисунок слева) удовлетворяет «золотому» правилу, а другой (рисунок справа) – нет. В положении равновесия



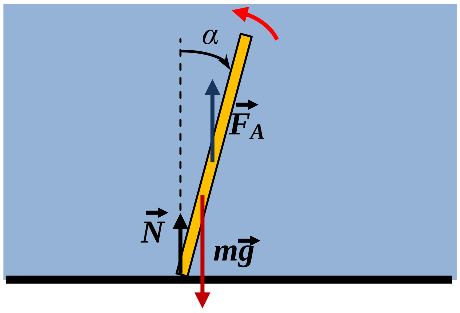
сила Архимеда равна по модулю и противоположна по направлению силе тяжести. Пусть корабль немного отклонился от вертикального положения. В первом случае, как видно из рисунка слева, момент этой пары сил возвращает корабль в вертикальное положение, а во



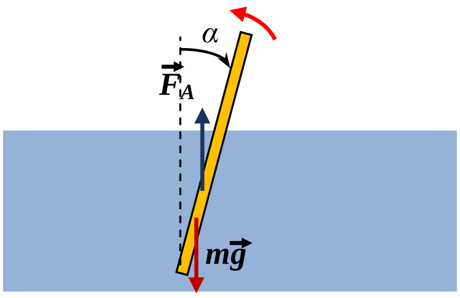
втором – увеличивает отклонение корабля от вертикали. Следовательно, выполнение «золотого» правила обеспечивает устойчивость равновесия корабля в вертикальном положении.

Решение задачи: Важно обратить внимание, что вертикальное положение стержень может занять в двух случаях: когда плотность жидкости <u>меньше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 < \rho$), и стержень тонет и опирается на дно, и когда плотность жидкости больше средней плотности стержня ($\rho_0 > \rho$), и стержень плавает на поверхности. Рассмотрим сначала первый

случай: вычислим сумму моментов сил, действующих на стержень, относительно точки опоры, при отклонении стержня от вертикали на небольшой угол α. Плечо силы нормальной реакции дна $\vec{N}$ равно нулю, плечо силы Архимеда (точка приложения – середина стержня длиной L) $l_A = \frac{L}{2}\sin(\alpha)$, плечо силы тяжести (точка приложения – центр масс) $l_g = \frac{L}{3}\sin(\alpha)$. Кроме того, $F_A = \rho_0 LSg$,



а $mg = \rho LSg$. Поэтому суммарный момент, возвращающий стержень к вертикальному положению, $M = +F_A l_A - mgl_g = \left(\frac{\rho_0}{2} - \frac{\rho}{3}\right)L^2 Sg\sin(\alpha)$. Поэтому $M > 0$ при $\rho_0 > \frac{2}{3}\rho$, и стержень будет устойчив в вертикальном положении при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \rho$. Рассмотрим теперь второй случай. В этом случае в вертикальном положении равновесия $F_A = \rho_0 L'Sg = mg = \rho LSg$, откуда следует, что длина погруженной части $L' = \rho L/\rho_0$. Теперь плечо силы Архимеда относительно нижнего конца стержня $l_A = \frac{L'}{2}\sin(\alpha)$, и суммарный момент



$M = \left(\frac{\rho}{2\rho_0} - \frac{1}{3}\right)\rho L^2 Sg\sin(\alpha) > 0$ при $\rho_0 < \frac{3}{2}\rho$. Значит, вертикальный стержень устойчив и при $\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$. Нетрудно понять, что устойчивость сохранится и при $\rho_0 = \rho$ (стержень целиком погружен в воду, но не опирается на дно). Объединяя все случаи, находим: стержень займет вертикальное положение при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$.

ОТВЕТ: при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$.

БИЛЕТ № 18 (УФА)

Задание 1.

Вопрос: На покоящийся шарик массы 1 г налетает со скоростью 2 м/с куб массой 10 кг. Скорость куба перпендикулярна грани, которой он наносит удар по шарику. С какой примерно скоростью будет двигаться шарик после удара?

Задача: Снаряд массы $m = 8$ кг, летевший вертикально, взорвался в верхней точке траектории. При этом образовались два осколка, полетевшие поступательно. Известно, что в результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на $W = 360$ кДж, а масса образовавшихся пороховых газов пренебрежимо мала. Относительная скорость разлета осколков сразу после взрыва оказалась в 5/3 раза больше минимально возможной. Найдите эту скорость. Каким было отношение масс осколков?

Ответ на вопрос: Рассмотрим процесс в системе отсчета, связанной с кубом. В ней очень тяжелый куб покоится, а легкий шарик налетает на него со скоростью 2 м/с. Изменение импульсов тел при ударе одинаково по величине, но кинетическая энергия куба при этом будет значительно меньше кинетической энергии шарика. Если удар будет упругим, то следует считать, что кинетическая энергия шарика почти не изменяется, и шарик после отражения от куба будет двигаться в противоположную сторону примерно с той же скоростью – около 2 м/с относительно куба. Значит, относительно исходной системы отсчета он будет двигаться со скоростью около 4 м/с. При неупругом ударе часть энергии теряется, и скорость движения шарика после удара будет меньше, но не меньше скорости куба (около 2 м/с) – равенство скоростей тел после удара отвечает абсолютно неупругому удару.

Решение задачи: В верхней точке траектории снаряд, летевший вертикально, останавливается. Поэтому скорость снаряда перед взрывом равна нулю. Поэтому, по закону сохранения импульса, сумма импульсов осколков сразу после взрыва равна нулю. Это означает, что они полетели вдоль одной прямой. Обозначим отношение масс осколков $m_1 : m_2 \equiv z$, причем будем считать «первым» более тяжелый осколок (то есть $z \geq 1$). Из условия задачи следует, что $m_1 + m_2 = m$, и поэтому $m_1 = \frac{z}{z+1}m$ и $m_2 = \frac{1}{z+1}m$. Запишем законы сохранения импульса и энергии в процессе взрыва как уравнения для величин скоростей:

$$\begin{cases} \frac{z}{z+1}mv_1 = \frac{1}{z+1}mv_2 \\ W = \frac{z}{z+1}\frac{mv_1^2}{2} + \frac{1}{z+1}\frac{mv_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{\frac{2W}{m}} \\ v_2 = \sqrt{z}\sqrt{\frac{2W}{m}} \end{cases} \Rightarrow v_{отн} = v_1 + v_2 = \left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)\sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

Как видно, величина относительной скорости осколков при заданных W и m зависит только от отношения масс осколков. Поэтому ясно, что «минимальное» значение этой величины нужно выбирать как минимум при всевозможных изменениях z. Минимальное возможное значение величины $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ достигается при $z = 1$ и равно 2. Поэтому, согласно условию, $v_{отн} = \frac{5}{3}v_{\min} = \frac{5}{3}2\sqrt{\frac{2W}{m}} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{W}{2m}} = 500$ м/с. Кроме того, ясно, что $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{10}{3}$. Решая это уравнение относительно $\sqrt{z}$, находим: $\sqrt{z} = 3 \Rightarrow z = 9$.

ОТВЕТ: $v_{отн} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{W}{2m}} = 500$ м/с, $\frac{m_1}{m_2} = 9$.

Задание 2.

Вопрос: В сосуде находились 2 л насыщенного водяного пара. Сосуд сжали при неизменной температуре 100°C так, что объем уменьшился вдвое. Какое количество тепла отвели при этом от содержимого сосуда? Используйте необходимые данные из задачи.

Задача: При соблюдении необходимых предосторожностей воду под давлением 1 атм можно нагреть до температуры $t_1 = 103°C$. В $V = 2$ л такой воды, находящейся в теплоизолирующем сосуде, «случайно» (например, под действием космического излучения) появившейся неоднородности образовался микроскопический пузырек водяного пара. Найти объем водяного пара после установления равновесия (давление на поверхность воды поддерживается неизменным). Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К, удельная теплота парообразования воды $r = 2480$ кДж/кг, плотность насыщенного водяного пара при $t_0 = 100°C$ равна $\rho_0 \approx 0{,}58$ кг/м^3, плотность воды считать равной $\rho \approx 1000$ кг/м^3.

Ответ на вопрос: При сжатии насыщенного водяного пара без изменения температуры его плотность не изменяется (она зависит только от температуры). Поэтому при сжатии конденсировался 1 л насыщенного пара, то есть (согласно данным задачи) 0,58 г пара. При этом от сосуда необходимо отводить теплоту конденсации, то есть $Q = 2{,}48 \cdot 10^3 \cdot 0{,}58 \cdot 10^{-3} \approx 1{,}44$ кДж.

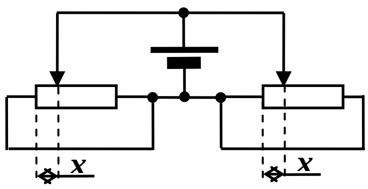
Решение задачи: Жидкость, описанную в условии, называют «перегретой» – в устойчивом состоянии при нормальном атмосферном давлении вода не может имеет температуру выше $t_0 = 100°C$. То есть это состояние неустойчивое и при любом возмущении вода будет остывать до температуры t_0, а за счет выделяющегося тепла будет происходить парообразование. Уравнение теплового баланса $c\rho V(t_1 - t_0) = r\Delta m$ позволяет найти массу образовавшегося пара: $\Delta m = \dfrac{c\rho V(t_1 - t_0)}{r} \approx 10$ г. С учетом известной плотности пара находим его объем: $V_n = \dfrac{\Delta m}{\rho_0} = \dfrac{c\rho V(t_1 - t_0)}{\rho_0 r} \approx 17{,}5$ л.

ОТВЕТ: $V_n = \dfrac{c\rho V(t_1 - t_0)}{\rho_0 r} \approx 17{,}5$ л.

Задание 3.

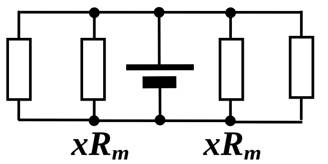
Вопрос: Напряжение на клеммах аккумулятора при разомкнутой цепи равно 36В, а если через аккумулятор течет ток 2А, то оно уменьшается до 32В. Чему равно внутреннее сопротивление акуумулятора?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, оба реостата одинаковы: их максимальное сопротивление $R_m = 36$ Ом, длина $L = 24$ см. Положение движков тоже одинаково: они поставлены в $x = 8$ см от крайних левых положений. Найти ток в ветви с источником, напряжение на которой $U = 20$ В.



Ответ на вопрос: Уменьшение напряжения на клеммах источника при протекании тока (36В – 32В = 4В) соответствует напряжению на внутреннем сопротивлении источника при токе 2А. Значит, это сопротивление равно 2 Ом.

Решение задачи: Нетрудно заметить, что в схеме обе части каждого реостата подключены к источнику параллельно друг другу. Значит, каждый реостат эквивалентен одному резистору с сопротивлением $R = \dfrac{xR_m \cdot (L - x)R_m}{L[xR_m + (L - x)]R_m} = \dfrac{x(L - x)}{L^2} R_m = 8$ Ом.



Суммарный ток через обе части одного реостата $I_1 = \frac{U}{R} = \frac{L^2}{x(L-x)}\frac{U}{R_m} = 2{,}5\,\text{А}$. Такой же ток течет и через обе части второго реостата, поэтому полный ток в ветви с источником $I = 2I_1 = \frac{2L^2}{x(L-x)}\frac{U}{R_m} = 5\,\text{А}$.

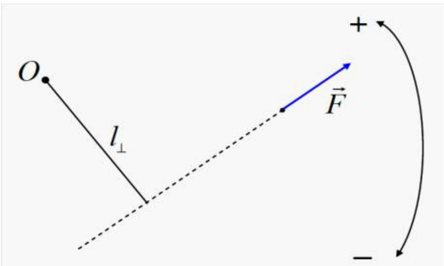
ОТВЕТ: $I = \frac{2L^2}{x(L-x)}\frac{U}{R_m} = 5\,\text{А}$.

Задание 4.

Вопрос: Сформулируйте условия равновесия твердого тела.

Задача: Стержень, имеющий форму тонкого цилиндра постоянного сечения, неоднороден. Его центр масс находится на расстоянии $x = \frac{1}{4}$ части его длины от одного из концов. Средняя плотность стержня равна ρ. Его опускают в большой сосуд с жидкостью с плотностью ρ_0. Глубина жидкости в сосуде заметно больше длины стержня. При каких значениях ρ_0 стержень после установления равновесия расположится вертикально?

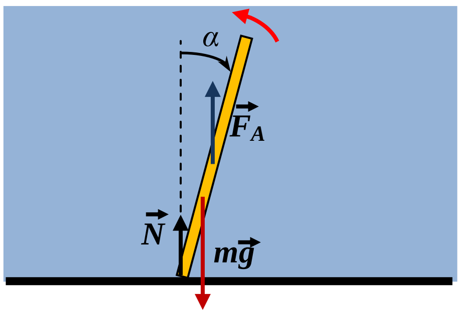
Ответ на вопрос: Необходимыми условиями нахождения твердого тела в равновесии являются: (1) равенство нулю векторной сумм внешних сил, приложенных к телу; (2) равенство нулю алгебраической суммы моментов внешних сил, приложенных к телу. Во втором условии используются определения:



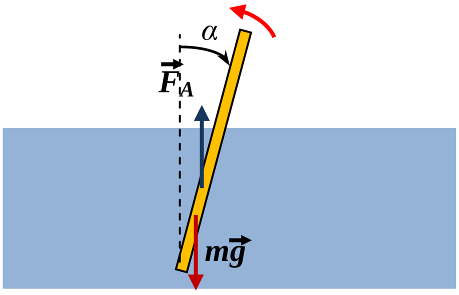
Плечо силы $l_\perp$ – расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Момент силы – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении: $M = \pm|\vec{F}|\cdot l_\perp$

Решение задачи: Важно обратить внимание, что вертикальное положение стержень может занять в двух случаях: когда плотность жидкости <u>меньше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 < \rho$), и стержень тонет и опирается на дно, и когда плотность жидкости <u>больше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 > \rho$), и стержень плавает на поверхности. Рассмотрим сначала первый случай: вычислим сумму моментов сил, действующих на стержень, относительно точки опоры, при отклонении стержня от вертикали на небольшой угол α. Плечо силы нормальной реакции дна $\vec{N}$ равно нулю, плечо силы Архимеда (точка приложения – середина стержня длиной L) $l_A = \frac{L}{2}\sin(\alpha)$, плечо силы тяжести (точка приложения – центр масс) $l_g = \frac{L}{4}\sin(\alpha)$. Кроме того,



$F_A = \rho_0 LSg$, а $mg = \rho LSg$. Поэтому суммарный момент, возвращающий стержень к вертикальному положению, $M = +F_A l_A - mgl_g = \left(\frac{\rho_0}{2} - \frac{\rho}{4}\right) L^2 Sg \sin(\alpha)$. Поэтому $M > 0$ при $\rho_0 > \frac{1}{2}\rho$, и стержень будет устойчив в вертикальном положении при $\frac{\rho}{2} < \rho_0 < \rho$. Рассмотрим теперь второй случай. В этом случае в вертикальном положении равновесия $F_A = \rho_0 L' Sg = mg = \rho LSg$, откуда следует, что длина погруженной части $L' = \rho L / \rho_0$. Теперь плечо силы Архимеда относительно нижнего конца стержня $l_A = \frac{L'}{2}\sin(\alpha)$, и суммарный момент $M = \left(\frac{\rho}{2\rho_0} - \frac{1}{4}\right)\rho L^2 Sg \sin(\alpha) > 0$ при $\rho_0 < 2\rho$.



Значит, вертикальный стержень устойчив и при $\rho < \rho_0 < 2\rho$. Нетрудно понять, что устойчивость сохранится и при $\rho_0 = \rho$ (стержень целиком погружен в воду, но не опирается на дно). Объединяя все случаи, находим: стержень займет вертикальное положение при $\frac{\rho}{2} < \rho_0 < 2\rho$.

ОТВЕТ: при $\frac{\rho}{2} < \rho_0 < 2\rho$.