7, 8 и 9 классы.

Задания, возможные решения и ответы для всех использованных вариантов.

БИЛЕТ № 11 (УФА)

Задание 1:

Вопрос: По дороге из школы ученик пробежал три четверти пути со скоростью 7 км/ч, потом некоторое время постоял на месте (разговаривал с приятелем), а затем дошел до дома со скоростью 3 км/ч. Оказалось, что на разговор он потратил треть всего времени пути. Какой была его средняя скорость на всем пути от школы до дома?

Ответ: Пусть s – полный путь школьника, а t – полное потраченное время. Тогда $t = \frac{3s}{4v_1} + \frac{t}{3} + \frac{s}{4v_2}$, откуда находим: $v_{cp} \equiv \frac{s}{t} = \frac{8v_1 v_2}{3(v_1 + 3v_2)} = 3{,}5$ км/ч.

Задача: Филеас Фогг и Паспарту остановились в гостинице на углу квартала. Рано утром мистер Фикс бросил камень в окно их номера и побежал вокруг квартала с постоянной скоростью, рассчитывая вернуться и полюбоваться на результат. Он обежал квартал за время $T = 10$ мин, и, не снижая скорости, побежал дальше. Спустя время $t = 3$ мин из гостиницы выбежал Паспарту и бросился за ним (его скорость тоже постоянна). Паспарту догнал Фикса за время $t_1 = 6$ мин. За какое время (t_2) он бы встретил Фикса, если бы побежал с той же скоростью вокруг квартала <u>навстречу</u> ему?

Решение: Пусть L - периметр квартала, l - расстояние от гостиницы до ближайшего угла (то есть то самое расстояние, на которое отбежал Фикс от гостиницы к тому моменту, когда Паспарту начал погоню), u - скорость Фикса, v - скорость Паспарту. Тогда мы можем написать: $L \quad \iota \;\; \Gamma$, $l = u \cdot t$. В начале погони расстояние между Фиксом и Паспарту равно l, а скорость их сближения равна $v - u$. Поэтому $l = (v-u)\cdot t_1$. В случае, когда Паспарту побежит навстречу Фиксу, начальное расстояние между ними по пути вокруг квартала (то самое, которое им сообща надо пробежать до встречи) равно $L - l$, а скорость сближения теперь $v + u$. Значит, $L - l = (v+u)\cdot t_2$. Подставляя L и l из двух первых уравнений в третье, найдем, что: $u \cdot t = (v-u)\cdot t_1$, то есть $v = \frac{t + t_1}{t_1} u$. Подставим все полученные выражения в последнюю, 4-ю формулу, и обнаружим, что:

$$u \cdot (T - t) = \left(u \frac{t + t_1}{t_1} + u \right) \cdot t_2 = u \cdot \left(\frac{t + t_1}{t_1} + 1 \right) \cdot t_2 = u \cdot \frac{2t_1 + t}{t_1} \cdot t_2 .$$

Одинаковый множитель u может быть сокращен, и мы находим:

$$t_2 = \frac{(T-t)\cdot t_1}{2t_1 + t} = 2{,}8\,\text{мин.}$$

Ответ: $t_2 = \dfrac{(T-t)\cdot(t+t_1)}{2t_1 + t} = 2$ мин 48 с.

Задание 2:

Вопрос: Допустим, что к шарику термометра привязали ватку, обильно смоченную ацетоном, и несколько секунд помахали термометром. Что произойдет с показаниями термометра? Изменятся они значительно или нет? Ответ объясните.

Ответ: Ацетон быстро испаряется, отнимая тепло у ваты и шарика термометра. Так как теплота парообразования довольно значительна, охлаждение шарика термометра будет очень заметным. Таким образом, показания термометра заметно уменьшаться.

Задача: В теплоизолирующем стакане находилось $M = 207$ г воды, в которых достаточно долго плавала льдинка массой $m_Л = 5$ г. В стакан бросили тонкую пластинку из тяжелого тугоплавкого металла массой $m = 60$ г, раскаленную до температуры $t_1 = +596°C$. Раздалось шипение, которое, впрочем, очень быстро прекратилось (стакан сверху не был накрыт крышкой). Какая температура установится в стакане после достижения равновесия? Теплоёмкость стакана $C_{ст} = 30$ Дж/К. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ Дж/(г·К), удельная теплоемкость металла пластинки $c_M = 1$ Дж/(г·К), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334$ Дж/г, удельная теплота парообразования для воды при 100˚C $r \approx 2480$ Дж/г.

Решение: Ясно, что начальная температура воды $t_0 = 0°C$. «Шипение» сопровождало процесс кипения и быстрого испарения воды, контактировавшей с пластинкой. Этот процесс происходил до того момента времени, когда температура пластинки уменьшилась до $t_2 = 100°C$. Уравнение теплового баланса для этого процесса позволяет найти массу испарившейся воды:

$$c_M m(t_1 - t_2) = \Delta m[c(t_2 - t_0) + r] \Rightarrow \Delta m = \frac{c_M m(t_1 - t_2)}{c(t_2 - t_0) + r} \approx 10{,}262 \text{ г.}$$

Здесь мы считаем, что в этом «быстром» процессе оставшаяся часть воды, льдинка и сосуд практически не нагрелись. Дальше, в «медленном» процессе, тепло остывания пластинки до конечной температуры t идет на таяние льдинки и нагрев воды и стакана до той же температуры:

$$c_M m(t_2 - t) = \lambda m_Л + [C_{ст} + c(M - \Delta m + m_Л)]t \Rightarrow t = \frac{c_M m t_2 - \lambda m_Л}{C_{ст} + c(M - \Delta m + m_Л) + c_M m} \approx 4{,}62°C.$$

Отметим, что температура получилась положительной, то есть льдинка действительно растаяла полностью.

Ответ: $t \approx 4{,}6°C$.

Задание 3:

Вопрос: В «электрощитке» квартиры установлены два предохранителя. Один из них размыкает цепь при токе $I_1 = 8$ А, а другой – при $I_2 = 16$ А. Цепи, контролируемые предохранителями, подключены к внешней сети параллельно. Какое максимальное количество электроэнергии (в кВт·ч) может потребить эта квартира за одни сутки? Действующее значение напряжения во внешней сети $U = 220$ В (то есть при расчете энергопотребления сеть можно считать источником постоянного напряжения такой величины).

Ответ: Максимальный полный ток потребления квартиры $I = I_1 + I_2 = 24$ А, и поэтому максимально возможная потребляемая мощность $P \quad IU \quad$ 5,28 кВт. Значит, квартира не может за сутки потребить более чем $Pt = 126{,}72$ кВт·ч электроэнергии.

Задача: Номинальное напряжение аккумулятора равняется $U_0 = 12$ В. Из-за частичной разрядки это напряжение уменьшилось – при подключении к клеммам аккумулятора вольтметра с очень большим сопротивлением этот вольтметр показывает напряжение $U_1 = 10$ В. Аккумулятор поставили на зарядку от внешнего источника, который независимо от тока зарядки поддерживает на клеммах аккумулятора напряжение, равное номинальному. Мощность, затрачиваемая внешним источником, равна $P = 5{,}4$ Вт. Какое количество тепла выделится в схеме за первые 3 секунды зарядки (считать, что это время значительно меньше времени, необходимого для зарядки)?

Решение: Поскольку заданное время «значительно меньше времени, необходимого для зарядки», то изменением напряжения на аккумуляторе за это время можно пренебречь. Пусть сопротивление контура зарядки аккумулятора равно r. Тогда сила тока, протекающего через аккумулятор, $I = \dfrac{U_0 - U}{r}$. Мощность, расходуемая зарядным устройством, $P = U_0 I$, а мощность тепловыделения $P' = I^2 r = \dfrac{U_0 - U}{U_0} P$. Поэтому искомое количество теплоты

$$Q = P'\tau = \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) P\tau = 13{,}5 \text{ Дж.}$$

Ответ: $Q = \left(1 - \dfrac{U}{U_0}\right) P\tau = 13{,}5$ Дж.

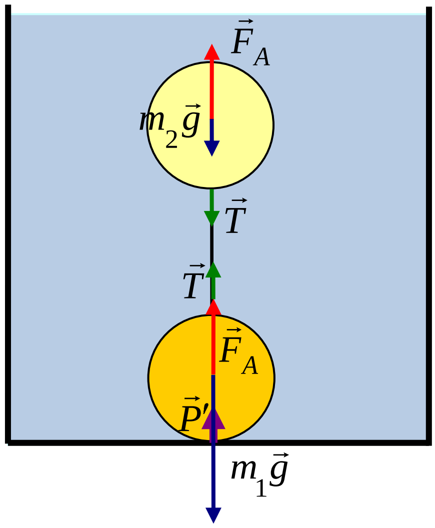
Задание 4:

Вопрос: В аквариуме на поверхности воды плавает деревянный кораблик, на котором лежит шарик от пинг-понга (средняя плотность шарика меньше плотности воды). Шарик скатывается с кораблика в воду. Как изменится уровень в воды в аквариуме? Ответ объяснить.

Ответ: Покоясь на кораблике, шарик вытесняет объем жидкости, вес которого равен весу шарика. Скатившись с кораблика в воду, шарик плавает на поверхности воды, и вытесняет точно такой же объем жидкости. Поэтому уровень воды в сосуде не изменится.

Задача: Два шара равного объема изготовлены из разных материалов. Более тяжелый шар, помещенный на дно пустого сосуда, давит на него с силой P. После того, как в сосуд налили воду, сила давления этого шара на дно уменьшилась в полтора раза. Когда в сосуд поместили более легкий шар, он стал плавать на поверхности воды так, что над водой выступала в точности треть его объема. Наконец, шары связали тонкой легкой нитью такой длины, что легкий шар оказался полностью погруженным в воду. С какой силой теперь давит тяжелый шар на дно сосуда?

Решение: Пусть ρ_0, ρ_1 и ρ_2 – плотности воды, вещества тяжелого шара и вещества легкого шара соответственно. Тогда, когда тяжелый шар положили в пустой сосуд, давление на дно создавалось силой тяжести этого шара, то есть $P=\rho_1 Vg$, где V – объем шара. После наливания воды шар остался лежать на дне (давление не прекратилось), но теперь давление уменьшилось благодаря силе Архимеда $F_A=\rho_0 Vg$, то есть $\frac{2P}{3}=P-\rho_0 Vg$. Отсюда легко найти, что $P=3\rho_0 Vg$ и $\rho_1=3\rho_0$. Для плавающего легкого шара условие равновесия дает: $\rho_2 Vg=\rho_0\frac{2V}{3}g \Rightarrow \rho_2=\frac{2\rho_0}{3}$. Наконец, для связанных шаров при полном погружении легкого шара (см.рисунок):



$$\left\{\begin{aligned} &\rho_0 Vg=T+\frac{2\rho_0}{3}Vg \\ &P'+T+\rho_0 Vg=3\rho_0 Vg \end{aligned}\right\} \Rightarrow P'=\frac{5\rho_0}{3}Vg=\frac{5}{9}P.$$

Ответ: $P'=\frac{5P}{9}$.

БИЛЕТ № 14 (ЕКАТЕРИНБУРГ)

Задание 1:

Вопрос: Вертолет летит со скоростью 360 км/ч относительно воздуха. Полет этого вертолета между двумя пунктами при ветре, дующем практически с постоянной скоростью вдоль линии полета, занимает в одну сторону 80 минут, а в другую – 64 минуты. Чему равна скорость ветра?

Ответ: Обозначим скорость вертолета v, а скорость ветра u. Тогда $80\,\text{мин}=\frac{s}{v-u}$, а $64\,\text{мин}=\frac{s}{v+u}$. Значит, $\frac{v+u}{v-u}=\frac{80}{64}=\frac{5}{4}\Rightarrow u=\frac{1}{9}v=40$ км/ч.

Задача: От пристани А вниз по течению реки отплывает катер, а спустя время Δt 0 мин ему навстречу от пристани В отплывает теплоход. Катер и теплоход встретились через время $t=1$ ч после отплытия катера, а еще через время t' 25 мин катер прибыл к пристани В. Найти время движения теплохода до пристани А.

Решение: Пусть скорости катера и теплохода относительно воды равны $v_{1,2}$, а скорость течения u. Тогда, согласно условию, $L=(v_1+u)t+(v_2-u)(t-\Delta t)$. Кроме того, $L=(v_1+u)(t+t')\Rightarrow v_1+u=\frac{L}{t+t'}$. Подставим это выражение в первое соотношение и выразим скорость теплохода относительно берега: $v_2-u=\left(1-\frac{t}{t+t'}\right)\frac{L}{t-\Delta t}=\frac{t'}{(t+t')(t-\Delta t)}L$. Теперь можно найти время движения теплохода: $t_T=\frac{L}{v_2-u}=\frac{(t+t')(t-\Delta t)}{t'}=170$ мин.

Ответ: $t_T=\frac{(t+t')(t-\Delta t)}{t'}=2$ ч 50 мин.

Задание 2:

Вопрос: В одинаковые стаканы с одинаковым количеством льда при одинаковой температуре выливают одинаковое небольшое количество горячей воды с одинаковой температурой. При этом в первый стакан выливают дистиллированную воду, а во второй – очень соленую. В каком из стаканов останется больше льда? Ответ объясните.

Ответ: В том, куда наливали дистиллированную воду. Дело в том, что добавлении соли температура таяния льда понижается, и тем же количеством теплоты можно большее количество льда довести до температуры плавления. Этот эффект еще усиливается благодаря тому, что теплоемкость раствора выше, чем у дистиллированной воды.

Задача: В калориметр, содержащий M ,7 кг воды с температурой $t_0 = 10°C$, бросают один за другим три кубика из сильно замороженного льда одинаковой массы (следующий кубик бросают после того, как установится равновесие, нарушенное предыдущим). Первый кубик растаял полностью, от второго осталась едва заметная льдинка, третий совсем не таял. Какой будет масса льда в калориметре после установления теплового равновесия? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающими телами пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·$°C$), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334$ кДж/кг.

Решение: Поскольку второй кубик растаял не до конца, то перед помещением в калориметр третьего кубика температура в калориметре опустилась до $t = 0°C$. Пренебрегая массой «едва заметной» льдинки, запишем уравнение теплового баланса для этого этапа: тепло, выделившееся при остывании воды $Q_{отд} = cM(t_0 - t)$ пошло на нагрев кубиков льда от неизвестной начальной температуры t_1 до $t = 0°C$ и их плавление: $Q_{пол} = 2m[\lambda + c_Л(t - t_1)]$. Здесь $c_Л$ – удельная теплоемкость льда. Следовательно, $t_1 = \frac{\lambda}{c_Л} - \frac{cM}{2c_Л m} t_0$. Третий кубик нагревается до температуры $t = 0°C$ за счет замерзания воды. Обозначив массу льда, образовавшегося при этом замерзании, Δm, снова составляем уравнение теплового баланса: $\lambda \Delta m = c_Л m(t - t_1)$, откуда $\Delta m = \frac{c_Л m(-t_1)}{\lambda} = \frac{cMt_0}{2\lambda} - m$. Значит, полная масса льда в калориметре в конце процесса

$$m' = m + \Delta m = \frac{cMt_0}{2\lambda} \approx 107 \text{ г.}$$

Ответ: $m' = \frac{cMt_0}{2\lambda} \approx 107$ г.

Задание 3:

Вопрос: К клеммам аккумулятора подключили длинный провод, сопротивление которого намного больше внутреннего сопротивления аккумулятора. Затем провод разрезали на две части, длины которых соотносились как 1:2, соединили эти части параллельно и подключили их к клеммам того же аккумулятора. Во сколько раз увеличилась мощность тепловых потерь в проводе?

Ответ: Если сопротивление исходного провода равнялось R, то сопротивление его частей, получившихся после разрезания, равно $\frac{R}{3}$ и $\frac{2R}{3}$. Сопротивление их параллельного соединения $R' = \frac{2R}{9}$. Так как при заданном напряжении аккумулятора мощность тепловых потерь обратно пропорциональна сопротивлению ($P = \frac{U^2}{R}$), то мощность возросла в 4,5 раза.

Задача: Сопротивление обмотки электромотора $r = 4$ Ом. Мотор работает от аккумулятора, создающего на обмотке постоянное напряжение $U = 36$ В. В установившемся режиме при постоянной нагрузке ток в обмотке равен $I = 2{,}25$ А. Найти КПД двигателя, то есть отношение механической мощности мотора к мощности, потребляемой от аккумулятора. Всеми потерями, кроме выделения тепла в обмотке, пренебречь.

Решение: Мощность, потребляемая мотором от сети, $P = U \cdot I$. При этом на нагревание обмотки затрачивается мощность $P' = r \cdot I^2$. Тогда полезная (механическая) мощность $P_M = P - P' = (U - rI) \cdot I$. Поэтому искомый КПД $\eta = \frac{P_M}{P} = 1 - \frac{rI}{U} = 0{,}75$.

Ответ: $\eta = 1 - \frac{rI}{U} = 75\%$.

Задание 4:

Вопрос: Некоторые морские проливы соединяют моря с разным уровнем высоты поверхности и разной соленостью. В таких проливах могут наблюдаться два течения: вблизи поверхности вода течет из «первого» моря во «второе», а вблизи дна – наоборот. Объясните это явление.

Ответ: Вблизи поверхности пролива вода течет как обычно – «сверху вниз», то есть в сторону понижения уровня. Разная концентрация соли приводит и к разной плотности воды, и поэтому в море с большей соленостью, в соответствии с формулой $p = p_0 + \rho g h$, давление быстрее растет с увеличением глубины. Поэтому, если более соленое море находится ниже, и поверхностное течение течет в его строну, может оказаться, что на достаточной глубине давление в более соленом море выше, чем в менее соленом на том же уровне. Тогда вблизи дна возникает течение, противоположное поверхностному.

Задача: В раствор соли опущены два шарика, соединенные невесомой упругой струной (которая может не только растягиваться, но и сжиматься). Из-за изменения концентрации раствора его плотность меняется с глубиной h по закону $\rho(h) = \rho_0 + \alpha h$, где $\rho_0 = 1$ г/см^3, константа $\alpha = 0{,}01$ г/см^4. Объемы шариков равны $V_1 = 0{,}1$ см^3, $V_2 = 0{,}2$ см^3. Массы шариков $m_1 = 0{,}15$ г, $m_2 = 0{,}35$ г. Глубина погружения верхнего шарика в состоянии равновесия $h_1 = 2$ см. Определите длину струны.

Решение: Из данных видно, что плотность первого шарика ниже, то есть именно он и должен быть верхним. На верхний шарик действуют: сила тяжести $m_1 g$, сила упругости струны F (считаем ее положительной для сжатой струны и отрицательной – для натянутой) и сила Архимеда $F_A = (\rho_0 + \alpha h_1) g V_1$. Таким образом, условие равновесия для верхнего шарика $m_1 g - F - (\rho_0 + \alpha h_1) g V_1 = 0$. Аналогично для нижнего шарика $m_2 g + F - (\rho_0 + \alpha(L + h_1)) g V_2 = 0$. Складывая почленно эти уравнения, находим длину струны:

$$L = \frac{m_1 + m_2 - (\rho_0 + \alpha h_1)(V_1 + V_2)}{\alpha V_2} \approx 97 \text{ см}.$$

Кроме того, можно обнаружить, что сила упругости струны $F = [m_1 - (\rho_0 + \alpha h_1) V_1] g$ оказывается положительна. Таким образом, струна действительно сжата.

Ответ: $L = \frac{m_1 + m_2 - (\rho_0 + \alpha h_1)(V_1 + V_2)}{\alpha V_2} \approx 97$ см.

БИЛЕТ № 15 (СТАВРОПОЛЬ)

Задание 1:

Вопрос: Скорость течения в реке 1,5 м/с. Моторная лодка проплывает участок реки между двумя изгибами дважды: в одну сторону – за 7 минут, в другую – за 9 минут. При этом лодка двигалась с постоянной скоростью относительно воды. Чему равна эта скорость?

Ответ: Обозначим скорость лодки v, а скорость течения u. Тогда $9\,\text{мин} = \dfrac{s}{v-u}$, а $7\,\text{мин} = \dfrac{s}{v+u}$. Значит, $\dfrac{v+u}{v-u} = \dfrac{9}{7} \Rightarrow v = 8u = 12$ м/с.

Задача: От пункта А в направлении пункта В по прямой вылетает мотодельтаплан. Спустя время $\Delta t = 3\,\text{мин}$ ему навстречу из пункта В вылетает квадрокоптер. Через время $t = 9$ мин после вылета мотодельтаплана они пролетели друг над другом, а еще через время $t' = 2$ мин мотодельтаплан достиг В. Найти время движения квадрокоптера до пункта А. Ветер дует вдоль линии АВ.

Решение: Пусть скорости мотодельтаплана и квадрокоптера относительно воздуха равны $v_{1,2}$, а скорость ветра (в проекции на линию АВ) равна u. Тогда, согласно условию, $L = (v_1 + u)t + (v_2 - u)(t - \Delta t)$. Кроме того, $L = (v_1 + u)(t + t') \Rightarrow v_1 + u = \dfrac{L}{t + t'}$. Подставим это выражение в первое соотношение и выразим скорость квадрокоптера относительно берега: $v_2 - u = \left(1 - \dfrac{t}{t + t'}\right)\dfrac{L}{t - \Delta t} = \dfrac{t'}{(t + t')(t - \Delta t)} L$. Теперь можно найти время движения квадрокоптера: $t_K = \dfrac{L}{v_2 - u} = \dfrac{(t + t')(t - \Delta t)}{t'} = 33\,\text{мин}$. Как видно, от скорости ветра ничего не зависит.

Ответ: $t_K = \dfrac{(t + t')(t - \Delta t)}{t'} = 33\,\text{мин}$.

Задание 2:

Вопрос: Зимой дороги и тротуары часто посыпают химическим реагентом (в качестве такого реагента можно было бы использовать поваренную соль, но на практике используют другие вещества). В чем состоит их действие? Ответ объясните с точки зрения физики.

Ответ: Молекулы реагента проникают между молекулами воды, изменяя их взаимодействие. В результате заметно понижается температура плавления льда, и поэтому наледь на дорогах тает даже при отрицательной температуре.

Задача: В калориметр, содержащий M ,2 кг воды с температурой $t_0 = 15°C$, бросают один за другим три кубика из сильно замороженного льда одинаковой массы (следующий кубик бросают после того, как установится равновесие, нарушенное предыдущим). Первый кубик растаял полностью, от второго осталась едва заметная льдинка, третий совсем не таял. Какой будет масса льда в калориметре после установления теплового равновесия? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающими телами пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг$\cdot °C$), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334$ кДж/кг.

Решение: Поскольку второй кубик растаял не до конца, то перед помещением в калориметр третьего кубика температура в калориметре опустилась до $t = 0°C$. Пренебрегая массой «едва заметной» льдинки, запишем уравнение теплового баланса для этого этапа: тепло, выделившееся при остывании воды $Q_{отд} = cM(t_0 - t)$ пошло на нагрев кубиков льда от неизвестной начальной температуры t_1 до $t = 0°C$ и их плавление: $Q_{пол} = 2m[\lambda + c_Л(t - t_1)]$.

Здесь $c_Л$ – удельная теплоемкость льда. Следовательно, $t_1 = \frac{\lambda}{c_Л} - \frac{cM}{2c_Л m} t_0$. Третий кубик нагревается до температуры $t = 0°C$ за счет замерзания воды. Обозначив массу льда, образовавшегося при этом замерзании, Δm, снова составляем уравнение теплового баланса: $\lambda \Delta m = c_Л m(t - t_1)$, откуда $\Delta m = \frac{c_Л m(-t_1)}{\lambda} = \frac{cMt_0}{2\lambda} - m$. Значит, полная масса льда в калориметре в конце процесса

$$m' = m + \Delta m = \frac{cMt_0}{2\lambda} \approx 113 \text{ г.}$$

Ответ: $m' = \frac{cMt_0}{2\lambda} \approx 113$ г.

Задание 3:

Вопрос: К клеммам аккумулятора подключили длинный провод, сопротивление которого намного больше внутреннего сопротивления аккумулятора. Затем провод разрезали на две части, длины которых соотносились как 1:3, соединили эти части параллельно и подключили их к клеммам того же аккумулятора. Во сколько раз увеличилась мощность тепловых потерь в проводе?

Ответ: Если сопротивление исходного провода равнялось R, то сопротивление его частей, получившихся после разрезания, равно $\frac{R}{4}$ и $\frac{3R}{4}$. Сопротивление их параллельного соединения $R' = \frac{3R}{16}$. Так как при заданном напряжении аккумулятора мощность тепловых потерь обратно пропорциональна сопротивлению ($P = \frac{U^2}{R}$), то мощность возросла в 16/3 раза.

Задача: Сопротивление обмотки электромотора $r = 2{,}5$ Ом. Мотор работает от аккумулятора, создающего на обмотке постоянное напряжение $U = 30$ В. В установившемся режиме при постоянной нагрузке ток в обмотке равен $I = 4$ А. Найти КПД двигателя, то есть отношение механической мощности мотора к мощности, потребляемой от аккумулятора. Всеми потерями, кроме выделения тепла в обмотке, пренебречь.

Решение: Мощность, потребляемая мотором от сети, $P = U \cdot I$. При этом на нагревание обмотки затрачивается мощность $P' = r \cdot I^2$. Тогда полезная (механическая) мощность $P_M = P - P' = (U - rI) \cdot I$. Поэтому искомый КПД $\eta = \frac{P_M}{P} = 1 - \frac{rI}{U} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\eta = 1 - \frac{rI}{U} \approx 66{,}7\%$.

Задание 4:

Вопрос: У многих веществ плотность при нагревании уменьшается. Для жидкой воды это так только при температуре больше 4˚С, а между 0˚С и 4˚С плотность воды растет! Вообразим себе мир, в котором у жидкой воды плотность бы всегда убывала с ростом температуры. Объясните, как изменилась бы картина замерзания водоемов в местности с холодным климатом в таком мире (по сравнению с нашим миром).

Ответ: В нашем мире при охлаждении воды в водоеме вниз опускаются наиболее плотные слои воды, то есть с температурой около 4˚С, и поэтому замерзание начинается с поверхности, где температура достигает температуры замерзания 0˚С раньше, чем в глубине. Ледяной поров предотвращает испарение и ухудшает теплопроводность, и поэтому даже в местности с холодным климатом в не слишком мелких водоемах подо льдом остается слой жидкой воды. В мире, где плотность жидкой воды плотность бы всегда убывала с ростом температуры самым плотным слоем был бы слой с температурой около 0°С, и именно такая вода опускалась бы на дно, оставляя на поверхности более теплую воду, которая продолжала бы интенсивно охлаждаться. Поэтому водоемы замерзали бы по всему объему, и жидкой воды бы почти не оставалось.

Задача: В раствор соли опущены два шарика, связанные нитью. Из-за изменения концентрации раствора его плотность меняется с глубиной h по закону $\rho(h) = \rho_0 + \alpha h$, где $\rho_0 = 1\,\text{г/см}^3$, константа $\alpha = 0{,}01\,\text{г/см}^4$. Объемы шариков равны $V_1 = 0{,}1\,\text{см}^3$, $V_2 = 0{,}2\,\text{см}^3$. Массы шариков $m_1 = 0{,}15\,\text{г}$, $m_2 = 0{,}35\,\text{г}$. Глубина погружения верхнего шарика в состоянии равновесия $h_1 = 52\,\text{см}$. При этом нить натянута. Определите длину нити.

Решение: Из данных видно, что плотность первого шарика ниже, то есть именно он и должен быть верхним. На верхний шарик действуют: сила тяжести $m_1 g$ и сила натяжения нити T, которые уравновешиваются силой Архимеда $F_1 = (\rho_0 + \alpha h_1) g V_1$. Таким образом, условие равновесия для верхнего шарика $m_1 g + T - (\rho_0 + \alpha h_1) g V_1 = 0$. Аналогично для нижнего шарика $m_2 g - T - (\rho_0 + \alpha(L + h_1)) g V_2 = 0$. Из этих уравнений выражаем длину нити:

$$L = \frac{m_1 + m_2 - (\rho_0 + \alpha h_1)(V_1 + V_2)}{\alpha V_2} \approx 22\text{ см}.$$

Кроме того, можно обнаружить, что сила натяжения нити $T = [(\rho_0 + \alpha h_1)V_1 - m_1]g$ положительна. Таким образом, нить действительно натянута.

Ответ: $L = \dfrac{m_1 + m_2 - (\rho_0 + \alpha h_1)(V_1 + V_2)}{\alpha V_2} \approx 22\text{ см}.$

БИЛЕТ № 16 (КЕМЕРОВО)

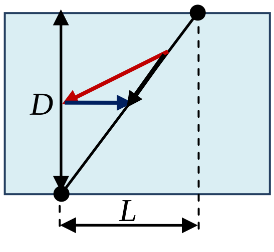
Задание 1:

Вопрос: Скорость течения в прямолинейном канале шириной 32 м равна 2 м/с. Пловец плывет со скоростью 2 м/с, держа постоянное направление под углом 45° к берегу навстречу течению. На какое расстояние его «снесет» вдоль русла канала от исходной точки за время переправы?

Ответ: При выбранном направлении движении проекция скорости пловца на направление, перпендикулярное берегу, в $\sqrt{2}$ раз меньше модуля скорости, поэтому время переправы равно $16\sqrt{2}$ с. Скорость движения пловца вдоль русла относительно берега $(2 - \sqrt{2})$ м/с, и поэтому искомое расстояние равно $32(\sqrt{2} - 1)$ м, то есть примерно 13,25м.

Задача: Лодка движется с постоянной скоростью $v = 4$ м/с относительно воды. На этой лодке человек дважды пересекает прямолинейный участок реки: первый раз – держа курс строго перпендикулярно берегу за время $t_1 = 35$ с, второй раз – возвращаясь по прямой в точку отплытия (из точки, в которую его снесло в ходе первой переправы). Найти время, затраченное гребцом на вторую переправу. Скорость течения в реке $u = 3$ м/с.

Решение: При первой переправе движение лодки относительно берега «поперек течения»



происходит со скоростью v, а «вдоль течения» - со скоростью u. Поэтому ширина реки $D = vt_1$, и лодку снесет вдоль русла на расстояние $L = ut_1$. При второй переправе лодке придется направлять свою скорость так, чтобы ее сносило течением ровно на расстояние, необходимое для движения вдоль нужного курса (см. рисунок). Пусть

$v_\perp$ – скорость лодки «поперек течения» при второй переправе, а $v_\parallel$ – «вдоль». Тогда время второй переправы t_2 удовлетворяет соотношениям $v_\perp t_2 = D = vt_1$ и $(v_\parallel - u)t_2 = L = ut_1$. Значит, $v_\perp = \frac{t_1}{t_2} v$ и $v_\parallel = \left(\frac{t_1}{t_2} + 1\right)u$. По теореме Пифагора $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2 = v^2 x^2 + u^2 (x+1)^2$, где $x \equiv \frac{t_1}{t_2}$. Из этого соотношения получаем квадратное уравнение для x: $x^2 + 2\frac{u^2}{v^2+u^2}x - \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2} = 0$, положительный корень которого $x = \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2}$. Таким образом, $t_2 = \frac{v^2+u^2}{v^2-u^2} t_1 = 125\,\text{с}$.

Ответ: $t_2 = \frac{v^2+u^2}{v^2-u^2} t_1 = 125\,\text{с}$.

Задание 2:

Вопрос: Вспомните легенду об Архимеде. Предположим, что исследуемая им корона весила 1,6 кг, а ее объем равнялся 90 см^3. Считая для простоты, что плотность золота примерно равна 20г/см^3, а плотность серебра 10 г/см^3, определите, сколько серебра содержится в короне.

Ответ: Пусть V_1 – объем серебра, а $V - V_1$ – объем золота. Тогда масса короны

$$m = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1) = \rho_2 V - (\rho_2 - \rho_1) V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\rho_2 V - m}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Масса серебра $m_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}(\rho_2 V - m)$, и, с учетом соотношения плотностей, она численно равна $\rho_2 V - m$, то есть 200 г.

Задача: Из 30 золотых и серебряных колечек собрали золотую и серебряную цепочки. Одна из них в растянутом состоянии имеет длину 105 мм, а ее масса 198 г. Длина и масса другой цепочки – 177 мм и 171 г. Известно, что все размеры колечек одинаковы, и что плотность использованного золота ровно в два раза больше плотности серебра. Найдите внешний диаметр одного колечка.

Решение: Так как размеры колечек одинаковы, то масса золотого колечка ровно в два раза больше, чем масса серебряного. Ясно, что золотой является первая цепочка (она тяжелее при меньшей длине). Если N_1 – количество серебряных колечек массой m каждое, а $30 - N_1$ – количество золотых, то $mN_1 = 171\,\text{г}$ и $2m(30 - N_1) = 198\,\text{г}$. Следовательно, $2 \cdot 171 \cdot (30 - N_1) = 198 \cdot N_1$, откуда $N_1 = 19$. Итак, в серебряной цепочке 19 колечек, а в золотой 11 колечек. Если D – внешний диаметр кольца, а d – его толщина, то из-за «зацепления» колечек длина растянутой цепочки из N равна $L = N\;D - (N-1)\;2d$ (каждая «сцепка» уменьшает длину цепочки на $2d$, а количество «сцепок» равно $(N-1)$). Следовательно, $11D - 20d = 105\,\text{мм}$ и $19D - 36d = 177\,\text{мм}$. Исключая d, найдем, что $D = 15\,\text{мм}$.

Ответ: $D = 15\,\text{мм}$.

Задание 3:

Вопрос: У нас есть две алюминиевые проволоки. У первой длина в два раза больше, а площадь поперечного сечения в два раза меньше, чем у второй. Во сколько раз отличаются мощности тепловых потерь в этих проволоках, если они включены в электрическую цепь последовательно?

Ответ: Сопротивление проводника пропорционально его длине и обратно пропорционально площади сечения, поэтому сопротивление первой проволоки в 4 раза больше, чем у второй. При последовательном включении в проволоках течет одинаковый ток, и мощность тепловых потерь $P = I^2 R$ пропорциональна сопротивлению. Поэтому мощность тепловых потерь в первой проволоке в 4 раза больше, чем во второй.

Задача:

Если генератор подключить к вольтметру с очень большим внутренним сопротивлением, то вольтметр покажет напряжение $U_0 = 240$ В. В рабочей цепи потери тепла в генераторе соответствуют внутреннему сопротивлению $r = 0{,}4$ Ом. От него необходимо протянуть к потребителю двухпроводную линию длиной $L = 100$ м. Какая масса алюминия пойдет на изготовление линии, если мощность потребителя $P = 4{,}4$ кВт, и он рассчитан на напряжение U = 220 В? Удельное сопротивление алюминия $\rho \approx 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, его плотность $\tau \approx 2{,}7$ г/см^3.

Решение: Ток через сопротивление нагрузки R равен $I = \dfrac{U_0}{r + R + R_X} = \dfrac{U}{R}$, где R_X – это сопротивление линии. Из этого соотношения находим, что $R_X = \dfrac{U_0 - U}{U} R - r$. Мощность, потребляемая нагрузкой, $P = \dfrac{U^2}{R}$, откуда $R = \dfrac{U^2}{P}$, и поэтому $R_X = \dfrac{U(U_0 - U)}{P} - r$. С другой стороны, $R_X = \rho \dfrac{2L}{S}$, и площадь поперечного сечения провода $S = \dfrac{2\rho L}{R_X}$. Общая масса алюминия $m = \tau \cdot 2LS = \dfrac{4\rho\tau L^2 P}{U(U_0 - U) - P \cdot r} \approx 5{,}04$ кг.

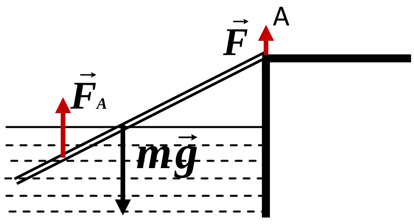
Ответ: $m = \dfrac{4\rho\tau L^2 P}{U(U_0 - U) - P \cdot r} \approx 5{,}04$ кг.

Задание 4:

Вопрос: Тяжелый однородный стержень подвешен на двух одинаковых легких нитях. Деформации нитей пренебрежимо малы, и в положении равновесия они вертикальны. Одна из нитей прикреплена к стержню в точке на расстоянии четверти длины стержня от левого конца. Другая – на расстоянии трети длины стержня от правого конца. Во сколько раз различаются силы натяжения нитей?

Ответ: Легко заметить, что плечо силы натяжения «левой» нити относительно центра масс стержня (расположенного посередине) равно четверти его длины, а плечо «правой» нити равно шестой части его длины. По правилу рычага отношение сил равно обратному отношению плеч, поэтому сила натяжения у «правой» нити в 1,5 раза больше, чем у «левой».

Задача: Правый конец однородной доски, наполовину погруженной в воду, опирается о шероховатый уступ А. Масса доски $m = 750$ г. Определите величину силы, с которой доска действует на уступ. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Решение: Изобразим на рисунке силы, действующие на доску: силу тяжести $m\vec{g}$, силу Архимеда $\vec{F}_A$ и силу $\vec{F}$, действующую со стороны уступа (последняя есть сумма силы трения и силы нормальной реакции уступа, но нам нужна именно общая сила, поэтому не будем их разделять). Поскольку силы тяжести и сила Архимеда направлены вертикально, то и сила $\vec{F}$ направлена вертикально (вверх), и ее величина $F = mg - F_A$. Сила тяжести приложена к середине доски, а сила Архимеда – к середине погруженной части, то есть к точке, находящейся на расстоянии трех четвертей длины доски от точки А. Правило моментов относительно точки А дает, что $F_A \cdot \frac{3}{4}L - mg \cdot \frac{1}{2}L = 0 \Rightarrow F_A = \frac{2}{3}mg$. С учетом этого $F = \frac{1}{3}mg \approx 2{,}5$ Н. По третьему закону Ньютона величина силы, с которой доска действует на уступ, точно такая же.

Ответ: $F = \frac{1}{3}mg \approx 2{,}5$ Н.

Примечание: можно решить задачу короче, если записать правило моментов относительно точки приложения силы Архимеда (хотя вывод о вертикальности $\vec{F}$ все равно нужно сделать из условия баланса сил): $F \cdot \frac{3}{4}L - mg \cdot \frac{1}{4}L = 0 \Rightarrow F = \frac{1}{3}mg$. Такой метод решения тоже является правильным.

БИЛЕТ № 17 (МОСКВА)

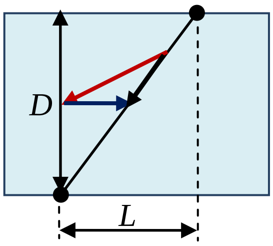
Задание 1:

Вопрос: Скорость течения в прямолинейном канале шириной 30 м равна 2,5 м/с. Пловец плывет со скоростью 2,5 м/с, держа постоянное направление под углом 60° к берегу по течению. На какое расстояние его «снесет» вдоль русла канала от исходной точки за время переправы?

Ответ: При выбранном направлении движении проекция скорости пловца на направление, перпендикулярное берегу, равно $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2{,}5$ м/с, поэтому время переправы равно $8\sqrt{3}$ с. Скорость движения пловца вдоль русла относительно берега $(2{,}5 + 1{,}25)$ м/с, и поэтому искомое расстояние равно $30\sqrt{3}$ м, то есть примерно 52 м.

Задача: Катер движется с постоянной скоростью $v = 8$ м/с относительно воды. Катер дважды пересекает прямолинейный участок реки: первый раз – держа курс строго перпендикулярно берегу, второй раз – возвращаясь по прямой в точку отплытия (из точки, в которую его снесло в ходе первой переправы). Вторая переправа прошла за время $t_2 = 51$ с. Найти время, затраченное на первую переправу. Скорость течения в реке $u = 2$ м/с.

Решение: При первой переправе движение лодки относительно берега «поперек течения» происходит со скоростью v, а «вдоль течения» - со скоростью u. Поэтому ширина реки $D = vt_1$ (где t_1 – искомое время первой переправы), и лодку снесет вдоль русла на расстояние $L = ut_1$. При второй переправе лодке придется направлять свою скорость так, чтобы ее сносило течением ровно на расстояние, необходимое для движения вдоль нужного курса (см. рисунок). Пусть $v_\perp$ – скорость лодки «поперек течения» при второй переправе, а $v_\parallel$ – «вдоль». Тогда $v_\perp t_2 = D = vt_1$ и $(v_\parallel - u)t_2 = L = ut_1$. Значит,



$v_\perp = \frac{t_1}{t_2}v$ и $v_\parallel = \left(\frac{t_1}{t_2} + 1\right)u$. По теореме Пифагора $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2 = v^2x^2 + u^2(x+1)^2$, где $x \equiv \frac{t_1}{t_2}$.

Из этого соотношения получаем квадратное уравнение для x: $x^2 + 2\dfrac{u^2}{v^2+u^2}x - \dfrac{v^2-u^2}{v^2+u^2} = 0$, положительный корень которого $x = \dfrac{v^2-u^2}{v^2+u^2}$. Таким образом, $t_1 = \dfrac{v^2-u^2}{v^2+u^2}t_2 = 45$ с.

Ответ: $t_1 = \dfrac{v^2-u^2}{v^2+u^2}t_2 = 45$ с.

Задание 2:

Вопрос: Вспомните легенду об Архимеде. Предположим, что исследуемая им корона весила 1,8 кг, а ее объем равнялся 105 см^3. Считая для простоты, что плотность золота примерно равна 20г/см^3, а плотность серебра 10 г/см^3, определите, сколько серебра содержится в короне.

Ответ: Пусть V_1 – объем серебра, а $V - V_1$ – объем золота. Тогда масса короны $m = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1)$, то есть $m = \rho_2 V - (\rho_2 - \rho_1)V_1$, откуда $V_1 = \dfrac{\rho_2 V - m}{\rho_2 - \rho_1}$. Масса серебра $m_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}(\rho_2 V - m)$, и, с учетом соотношения плотностей, она численно равна $\rho_2 V - m$, то есть 300 г.

Задача: Из 40 золотых и серебряных колечек собрали золотую и серебряную цепочки. Одна из них в растянутом состоянии имеет длину 520 мм, а ее масса 242 г. Длина и масса другой цепочки – 424 мм и 396 г. Известно, что все размеры колечек одинаковы, и что плотность использованного золота ровно в два раза больше плотности серебра. Найдите внешний диаметр одного колечка.

Решение: Так как размеры колечек одинаковы, то масса золотого колечка ровно в два раза больше, чем масса серебряного. Ясно, что золотой является вторая цепочка (она тяжелее при меньшей длине). Если N_1 – количество серебряных колечек массой m каждое, а $40 - N_1$ – количество золотых, то $mN_1 = 242$ г и $2m(40 - N_1) = 396$ г. Следовательно, $2 \cdot 242 \cdot (40 - N_1) = 396 \cdot N_1$, откуда $N_1 = 22$. Итак, в серебряной цепочке 22 колечка, а в золотой 18 колечек. Если D – внешний диаметр кольца, а d – его толщина, то из-за «зацепления» колечек длина растянутой цепочки из N равна $L = N \; D - (N-1) \; 2d$ (каждая «сцепка» уменьшает длину цепочки на $2d$, а количество «сцепок» равно $(N-1)$). Следовательно, $22D - 42d = 520$ мм и $18D - 34d = 424$ мм. Исключая d, найдем D 6 мм.

Ответ: D 6 мм.

Задание 3:

Вопрос: У нас есть две медные проволоки. У первой длина в три раза больше, а площадь поперечного сечения в три раза меньше, чем у второй. Во сколько раз отличаются мощности тепловых потерь в этих проволоках, если они включены в электрическую цепь параллельно?

Ответ: Сопротивление проводника пропорционально его длине и обратно пропорционально площади сечения, поэтому сопротивление первой проволоки в 9 раз больше, чем у второй. При параллельном включении на проволоках падает одинаковое напряжение, и мощность тепловых потерь $P = \dfrac{U^2}{R}$ обратно пропорциональна сопротивлению. Поэтому мощность тепловых потерь в первой проволоке в 9 раз меньше, чем во второй.

Задача:

Если генератор подключить к вольтметру с очень большим внутренним сопротивлением, то вольтметр покажет напряжение $U_0 = 250$ В. В рабочей цепи потери тепла в генераторе соответствуют внутреннему сопротивлению $r = 0{,}4$ Ом. От него протянули к потребителю двухпроводную линию, на изготовление которой ушло $m = 1{,}26$ кг алюминия. Известно, что мощность потребителя $P = 6{,}6$ кВт, и он рассчитан на напряжение U = 220 В. Какова длина линии? Удельное сопротивление алюминия $\rho \approx 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, его плотность $\tau \approx 2{,}7$ г/см^3.

Решение: Ток через сопротивление нагрузки R равен $I = \dfrac{U_0}{r + R + R_X} = \dfrac{U}{R}$, где R_X – это сопротивление линии. Из этого соотношения находим, что $R_X = \dfrac{U_0 - U}{U} R - r$. Мощность, потребляемая нагрузкой, $P = \dfrac{U^2}{R}$, откуда $R = \dfrac{U^2}{P}$, и поэтому $R_X = \dfrac{U(U_0 - U)}{P} - r$. С другой стороны, $R_X = \rho \dfrac{2L}{S}$, и площадь поперечного сечения провода $S = \dfrac{2\rho L}{R_X}$. Общая масса алюминия $m = \tau \cdot 2LS = \dfrac{4\rho\tau L^2 P}{U(U_0 - U) - P \cdot r}$, поэтому $L = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m[U(U_0 - U) - P \cdot r]}{\rho\tau P}} \approx 50$ м.

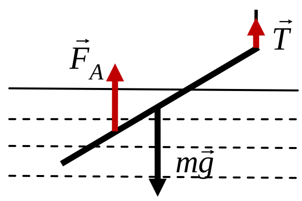
Ответ: $L = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m[U(U_0 - U) - P \cdot r]}{\rho\tau P}} \approx 50$ м.

Задание 4:

Вопрос: Тяжелый однородный стержень подвешен на двух одинаковых легких нитях. Деформации нитей пренебрежимо малы, и в положении равновесия они вертикальны. Одна из нитей прикреплена к стержню в точке на расстоянии четверти длины стержня от левого конца. Другая – на расстоянии одной шестой части длины стержня от правого конца. Во сколько раз различаются силы натяжения нитей?

Ответ: Легко заметить, что плечо силы натяжения «левой» нити относительно центра масс стержня (расположенного посередине) равно четверти его длины, а плечо «правой» нити равно третьей части его длины. По правилу рычага отношение сил равно обратному отношению плеч, поэтому сила натяжения у «левой» нити в 4/3 раза больше, чем у «правой».

Задача: Однородная доска подвешена на легкой упругой нити за правый конец над поверхностью воды. В состоянии равновесия доска погружена в воду на две трети своей длины, а сила натяжения нити $T = 2{,}3$ Н. Определите массу доски. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Решение: Изобразим на рисунке силы, действующие на доску: силу тяжести $m\vec{g}$, силу Архимеда $\vec{F}_A$ и силу натяжения нити $\vec{T}$. Поскольку сила тяжести и сила Архимеда направлены вертикально, то и сила $\vec{T}$ направлена вертикально (вверх), причем $mg = T + F_A$. Сила тяжести приложена к середине доски, а сила Архимеда – к середине погруженной части, то есть к точке, находящейся на расстоянии двух третей длины доски от точки подвеса.

Правило моментов относительно этой точки дает, что $F_A \cdot \frac{2}{3}L - mg \cdot \frac{1}{2}L = 0 \Rightarrow F_A = \frac{3}{4}mg$. С учетом этого $mg = 4T \Rightarrow m = \frac{4T}{g} \approx 920$ г.

Ответ: $m = \frac{4T}{g} \approx 920$ г.

Примечание: можно решить задачу короче, если записать правило моментов относительно точки приложения силы Архимеда (хотя вывод о вертикальности $\vec{T}$ все равно нужно сделать из условия баланса сил): $T \cdot \frac{2}{3}L - mg \cdot \frac{1}{6}L = 0 \Rightarrow mg = 4T$. Такой метод решения тоже является правильным.