ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ. 2016/17 учебный год, МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА.

10 и 11 классы.

Задания, возможные решения, ответы и критерии проверки.

Задание отборочного этапа состояло из двух частей. В части I использовались индивидуальные варианты для каждого участника, составленные из сходных заданий одного уровня, при этом проверялись и оценивались только ответы участников. В части II использовались творческие задачи высокого уровня сложности, требующие нестандартных подходов к решению, и в этом случае проверялись и оценивались решения.

Часть I : пример варианта.

Вопрос 1 (10 баллов):

На горизонтальной поверхности лежит однородный кубик. Чтобы заставить его скользить по поверхности, надавив в горизонтальном направлении на центр его боковой грани (перпендикулярно этой грани), нужно приложить силу не менее 14 Н. На некотором расстоянии от него ставят второй однородный кубик. Масса этого кубика в 2 раза больше, чем у первого, а коэффициент трения о поверхность точно такой же. Обращенные друг к другу грани кубиков параллельны и перпендикулярны линии O_1O_2, соединяющей их центры. Между кубиками вставили невесомую пружину, ось которой совпадает с O_1O_2. Пружина изначально не деформирована (ее длина в точности равна расстоянию между кубиками). С какой минимальной <u>постоянной</u> силой нужно давить на центр боковой грани первого кубика в направлении второго (сжимая пружину), чтобы в результате этого воздействия второй кубик сдвинулся с места? Пружина не изгибается, кубики не отрываются от поверхности. Ответ запишите в Ньютонах, при необходимости округлив до целого значения.

Решение: Ясно, что для первого кубика $\mu mg = 14$ Н (здесь μ – коэффициент трения, а m – масса первого кубика). Тогда для того, чтобы сжатая пружина могла сдвинуть с места второй кубик, ее сила упругости должна быть не меньше максимальной величины силы трения покоя для этого кубика: $k|\Delta l| \geq 2\mu mg$. Пусть на первый кубик действует постоянная сила $F > \mu mg$, сжимающая пружину вдоль ее оси. Сначала – до точки, где $F - \mu mg = k|\Delta l|$ – кубик будет разгоняться, затем – тормозиться. Максимальное сжатие пружины отвечает точке остановки, определяемой из закона сохранения энергии: $F|\Delta l_m| = \mu mg|\Delta l_m| + \frac{k|\Delta l_m|^2}{2}$, то есть $|\Delta l_m| = \frac{2}{k}(F - \mu mg)$. Таким образом, должно выполняться условие $2(F - \mu mg) \geq 2\mu mg \Rightarrow F_{\min} = 2\mu mg = 28$ Н.

Ответ: 28.

Вопрос 2 (7 баллов):

Два сосуда объемами $V_1 = 6$ л и $V_2 = 14$ л соединены небольшой узкой трубочкой с вентилем. Первоначально вентиль закрыт, и в первом сосуде находится влажный воздух с относительной влажностью $r_1 = 70\%$, а во втором – с относительной влажностью $r_2 = 50\%$. Температура воздуха в обоих сосудах одинакова. Затем вентиль открывают. Какой будет относительная влажность воздуха после установления равновесия, если температура останется прежней? Ответ запишите в процентах.

Решение: Масса водяного пара в баллоне определяется из уравнения Менделеева-Клапейрона $m=\frac{\mu pV}{RT}=\frac{\mu p_H(T)}{RT}rV$ (где $p_H(T)$ – давление насыщенного пара), поэтому полная масса водяного пара $m=\frac{\mu p_H(T)}{RT}(r_1V_1+r_2V_2)$. Относительная влажность в конечном состоянии $r=\frac{p}{p_H(T)}=\frac{mRT}{\mu p_H(T)(V_1+V_2)}=\frac{r_1V_1+r_2V}{V_1+V_2}=56\%$.

Ответ: 56.

Вопрос 3 (8 баллов):

На рассеивающую линзу с фокусным расстоянием F = 12 см падает сходящийся пучок света. Пройдя линзу, пучок сходится на оптической оси в главном фокусе линзы. На каком расстоянии от линзы соберется пучок, если рассеивающую линзу заменить собирающей с тем же по величине фокусным расстоянием? Ответ запишите в сантиметрах, при необходимости округлив до целого значения.

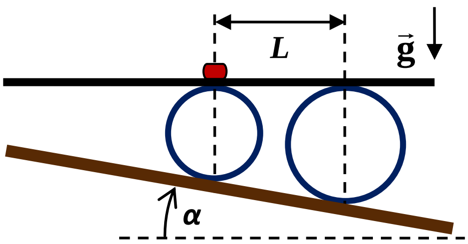
Решение: Так как пучок собирается в точке, то линза является тонкой, и справедлива формула $\frac{1}{a}+\frac{1}{F}=-\frac{1}{F}\Rightarrow a=-\frac{F}{2}$ (напомним, что оптическая сила рассеивающей линзы считается отрицательной, и $a<0$, поскольку продолжения лучей пучка пересекаются за линзой). Для этого же пучка и собирающей линзы $-\frac{2}{F}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$, то есть $b=\frac{F}{3}=4$ см.

Ответ: 4.

Максимальная оценка за часть I: 25 баллов.

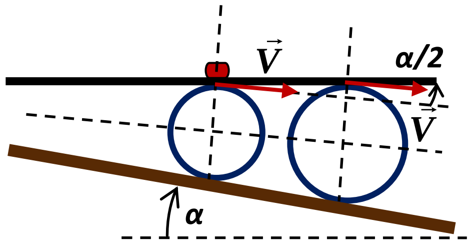
Часть II (творческое задание). *«ОПЫТЫ ПРОФЕССОРА ВАГНЕРА».*

1. («**Горка профессора Вагнера**») Однажды летом на своей даче профессор Вагнер соорудил горку. Наклон горки к горизонту был невелик (см. рисунок) – $\alpha=10°$, но скатываться с нее нужно было с помощью приспособления из двух цилиндрических тонкостенных труб и ровной тяжелой доски. Трубы устанавливались на наклонную плоскость горки так, что их оси были горизонтальны, и лежащая на них доска тоже была горизонтальной. На доске размещался груз, и затем систему отпускали без начальной скорости. В одном из случаев небольшой груз был размещен над осью меньшей по диаметру трубы. При этом расстояние по горизонтали до оси большей трубы равнялось $L=1{,}46$ м. Профессор измерил время от старта до того момента, когда груз оказался над осью большей трубы. Какой результат он получил (его секундомер отсчитывает время с точностью 0,1 с)? Масса одной из труб в $k=2$ раза, а другой – в $n=3$ раза превосходит массу доски. Ускорение свободного падения считать равным $g\approx 9{,}8$ м/с^2. В процессе скатывания в пределах исследуемого интервала времени доска не отрывалась от труб и не скользила по ним, груз не скользил по доске, а трубы не скользили по горке. Трение качения не учитывать.

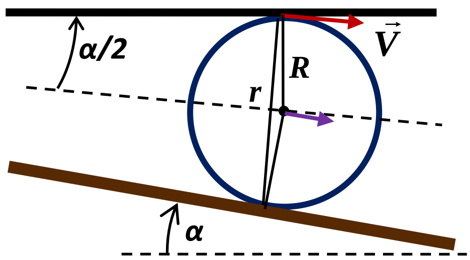


Решение:

Для каждой из труб мгновенная ось вращения проходит через точки касания с наклонной поверхностью горки. Скорость точки доски, соприкасающейся с трубой, равна скорости соответствующей точки трубы, которая в данный момент времени вращается вокруг мгновенной оси вращения. Радиус вращения этой точки перпендикулярен биссектрисе угла α, образованного доской и поверхностью, и поэтому скорости двух точек



доски, соприкасающихся с трубами, параллельны и направлены «вниз» под углом $\frac{\alpha}{2}$ к горизонту. Это означает, что доска движется <u>поступательно</u>, то есть величины скорости всех точек доски в любой момент времени одинаковы (обозначим эту величину V) и доска не вращается – в процессе движения она остается горизонтальной. Угловая скорость вращения каждой трубы равна частному от деления этой скорости на радиус вращения этой точки $r = 2R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (где R – радиус трубы). Поэтому $\omega_1 = \frac{V}{2R_1\cos(\alpha/2)}$, и $\omega_2 = \frac{V}{2R_2\cos(\alpha/2)}$. Значит, линейная скорость вращения труб (каждой – вокруг своей оси) одинакова: $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \frac{V}{2\cos(\alpha/2)}$, и



такую же величину имеет скорость движения оси трубы относительно поверхности наклонной горки. Отметим, что при таком движении оси труб находятся на неизменном расстоянии и что вертикальные составляющие скоростей центров масс доски и колес совпадают: $\frac{V}{2\cos(\alpha/2)}\sin(\alpha) = V\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (это естественно, так как по вертикали все три тела движутся вместе). В момент времени, когда доска движется со скоростью V, кинетическая энергия <u>всей системы</u> $E_K = \frac{mV^2}{2} + (k+n)m\frac{V^2}{4\cos^2(\alpha/2)} = \frac{k+n+1+\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}\frac{mV^2}{2}$. Здесь символом m обозначена масса доски и учтено, что кинетическая энергия катящейся без проскальзывания по неподвижной поверхности тонкостенной цилиндрической трубы равна сумме одинаковых по величине энергий поступательного и вращательного движений. Масса и кинетическая энергия «небольшого» груза считаются пренебрежимо малыми. Рассмотрим бесконечно малый интервал времени dt после этого момента. Увеличение кинетической энергии системы $dE_K = \frac{k+n+1+\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}mVdV$ происходит за счет убыли потенциальной энергии доски и труб в поле тяжести, причем

$$\frac{k+n+1+\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}mVdV = -dE_g = -(m+nm+km)g\,dh_{ЦМ} = (n+k+1)mgV\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)dt.$$

Следовательно, величина ускорения доски в процессе скатывания постоянна (пока выполняются условия отсутствия проскальзывания и отрыва доски от труб) и равна

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{(n+k+1)(1+\cos(\alpha))}{k+n+1+\cos(\alpha)}g\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Нас интересует движение груза относительно оси большей трубы. Так как вертикальные составляющие ускорений доски и оси трубы совпадают, то это движение происходит по горизонтали, и его величина

$$a'_x = a\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\cos(\alpha)}{2\cos(\alpha/2)}\right] = a\frac{\cos(\alpha/2)}{1+\cos(\alpha)} = g\,\frac{(n+k+1)}{2(k+n+1+\cos(\alpha))}\sin(\alpha).$$

Расстояние L без начальной скорости он пройдет за время $t = \sqrt{\dfrac{2L}{a'_x}} = 2\sqrt{\dfrac{n+k+1+\cos(\alpha)}{n+k+1}\dfrac{L}{g\sin(\alpha)}} \approx 2{,}0$ с.

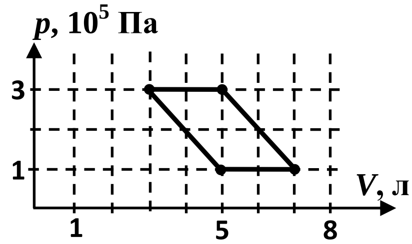
ОТВЕТ: $t = 2\sqrt{\dfrac{n+k+1+\cos(\alpha)}{n+k+1}\dfrac{L}{g\sin(\alpha)}} \approx 2{,}0$ с.

Примечание: Вместо того, чтобы искать относительное ускорение груза и оси трубы, можно было обратить внимание, что из-за отсутствия проскальзывания в любой момент времени путь, пройденный грузом относительно этой оси равен смещению оси трубы относительно наклонной поверхности. Тогда можно было вычислять ускорение трубы относительно поверхности (равное a'_x). Кроме того, можно было из закона сохранения энергии вычислять скорость как функцию смещения (для груза либо оси трубы), и из характера этой зависимости (v^2 пропорционально x) сделать вывод о равноускоренном характере движения. Тогда можно найти время по средней скорости $t = \dfrac{2L}{v(L)}$. Наконец, можно было использовать и прямое решение уравнений движения с учетом кинематических связей (это решение не вполне «школьное», так как в нем необходимо использовать уравнение динамики вращательного движения, и в целом оно более громоздкое). Все методы приемлемы, но в каждом случае необходимо обращать внимание на наличии корректного обоснования действий.

Критерии проверки:

Доказано, что доска остается горизонтальной	**2**
Доказано, что расстояние между осями труб не изменяется	**2**
Получены связи между скоростями труб и доски, определены их направления	**2**
Записано уравнение закона сохранения энергии или полная система уравнений движения, из которых может быть получен ответ	**4**
Найдено ускорение доски (или ускорение оси трубы, или закон изменения скорости)	**4**
Вычислено ускорение груза относительно оси трубы (или указано, как оно связано с ускорением оси трубы)	**3**
Получен правильный аналитический ответ	**2**
Получен правильный численный ответ	**1**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**20**

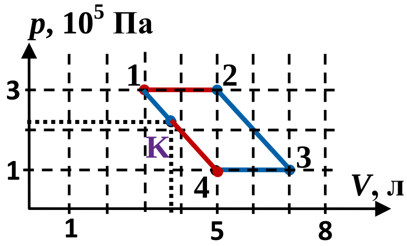
2. («**Поиски холодильника**») В одной из своих установок по изучению процессов образования топологически нетривиальных жидкокристаллических структур профессор Вагнер для плавного вращения резервуара использовал в качестве двигателя тепловую машину. Рабочим телом этой машины были несколько молей неона. Цикл рабочего тела показан на рисунке в координатах «давление-объем». Укажите участки цикла, на которых газ отдает тепло холодильнику, то есть определите координаты точек, которые являются началом и концом



такого участка (или участков, если их несколько). Пренебрегая всеми потерями (кроме передачи тепла холодильнику), найдите КПД этой тепловой машины.

Решение:

Так как представленный на диаграмме цикл – это цикл тепловой машины в координатах $p-V$, то направление обхода для него – по часовой стрелке. Занумеруем точки диаграммы так, как показано на рисунке. Процессы 1-2 и 3-4 – изобарные, и направление теплообмена в них очевидно (1-2 – газ получает тепло от нагревателя, 3-4 – отдает тепло холодильнику). Процессы 2-3 и 4-1 – нестандартные, и их нужно изучить внимательно. Диаграммы этих процессов – прямые линии, и их уравнение можно записать в виде $p = p_0\left(1-\dfrac{V}{V_0}\right)$.



Рассмотрим малое изменение объема dV в ходе такого процесса. Согласно первому Началу термодинамики, $\delta Q = pdV + dU = \dfrac{5}{2}pdV + \dfrac{3}{2}Vdp$ (с учетом того, что внутренняя энергия неона, как одноатомного идеального газа, равна $U = \dfrac{3}{2}pV$). Подставляя сюда давление из уравнения процесса, находим: $\delta Q = \dfrac{p_0}{2}\left(5-8\dfrac{V}{V_0}\right)dV$. Таким образом, точка с координатой $V_K = \dfrac{5}{8}V_0$ является точкой изменения направления теплообмена: для процесса расширения газа ($dV > 0$) $\delta Q > 0$ при $V < V_K$ и $\delta Q < 0$ при $V > V_K$, а для сжатия ($dV < 0$) – наоборот. Значит, точка 2 является такой точкой для процесса 2-3, и в ходе всего этого процесса газ отдает тепло. Для процесса 4-1 такой точкой является точка К ($V_K = 3.75$ л, $p_K = 2.25\cdot 10^5$ Па), и поэтому газ получает тепло на участке 4-К, и отдает на участке К-1. Итак:

- газ получает тепло от нагревателя на участках 1(3,3)→2(5,3) и 4(5,1)→К(3.75,2.25) (координаты точек указаны в единицах л-10^5Па).
- газ отдает тепло холодильнику на участках 2(5,3)→3(7,1)→4(5,1) и К(3.75,2.25)→1(3,3).

Для расчета КПД цикла воспользуемся формулой $\eta = \dfrac{A}{Q_H}$. Работа газа равна площади цикла $A = 400$ Дж, а теплота нагревателя $Q_H = Q_{12} + Q_{4K}$. Для изобарического расширения $Q_{12} = \dfrac{5}{2}p(V_2 - V_1) = 1500$ Дж, а

$$Q_{4K} = A_{4K} + U_K - U_4 = \frac{p_K + p_4}{2}(V_K - V_4) + \frac{3}{2}(p_K V_K - p_4 V_4) = 312{,}5\,\text{Дж}$$

(A_{4K} отрицательна и вычисляется как площадь трапеции). Итак, $Q_H = 1812{,}5$ Дж, и $\eta = \dfrac{32}{145} \approx 0{,}22$.

ОТВЕТ: Газ отдает тепло холодильнику на участках 2(5,3)→3(7,1)→4(5,1) и К(3.75,2.25)→1(3,3), максимальный КПД тепловой машины с таким циклом $\eta \approx 22\%$.

Критерии проверки:

Правильно описаны изобарические процессы	**1**
Указано, что уравнения двух других процессов - линейные	**1**

Обнаружены точки изменения направления теплообмена	**5**
Правильно определены участки, на которых газ отдает (получает) тепло	**2**
Правильно определена одна из величин A, Q_H или Q_X	**2**
Определена вторая величина и вычислен КПД	**4**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**15**

Примечание: Решение, в котором единственной ошибкой является «потеря» точки изменения теплообмена (то есть тепло участка 4-1 считается «интегрально», без разбиения на отдаваемое и получаемое), оценивается в **6 баллов**.

3. («**Электростатическая шкатулка**») Как-то профессор Вагнер решил собрать оригинальную электростатическую шкатулку. Из гладких непроводящих «уголков» он изготовил каркас в форме правильного тетраэдра с длиной ребра a. «Уголки» не позволяли пластинам в форме правильных треугольников, вставленных на место граней тетраэдра, смещаться вдоль плоскости грани или внутрь тетраэдра, но совершенно не мешали им выскальзывать наружу. На каждую из четырех пластин был равномерно нанесен заряд $q<0$, в центре тетраэдра профессор закрепил маленький непроводящий шарик с зарядом $Q>2|q|$. Вагнер вложил пластины в грани каркаса. Затем он начал медленно закачивать внутрь тетраэдра воздух, повышая его давление. При какой разности давлений внутри и снаружи «шкатулка» рассыпалась? Электрическая постоянная ε_0.

Решение:

Рассмотрим вычисление силы, действующей на плоскую равномерно заряженную поверхность в случае, когда из симметрии задачи ясно, что сила направлена перпендикулярно поверхности. Тогда величину силы можно найти, суммируя только перпендикулярные компоненты сил, действующих на каждый из бесконечно малых элементов dS площади поверхности. Таким образом, $F_n=\sum E_n\sigma dS=\sigma\sum E_n dS=\sigma\Psi_E$, то есть сила пропорциональна потоку поля через поверхность. В нашем случае на каждую грань шкатулки действует сила, перпендикулярная ее поверхности, и поэтому можно использовать такой способ. Поток поля через грань шкатулки создается положительным зарядом шарика и отрицательными зарядами трех других граней. Полный поток поля от заряженного шарика, согласно теореме Гаусса, равен $\frac{Q}{\varepsilon_0}$, и он поровну распределяется между четырьмя гранями тетраэдра, и поэтому поток через одну грань $\Psi_Q=\frac{Q}{4\varepsilon_0}$. Так как заряды равномерно распределены по каждой грани, то он «притекает» к грани симметрично относительно ее плоскости, и поэтому поток, текущий к трем другим граням и пересекающий выбранную грань, есть половина общего потока, притекающего к выбранной грани (с величиной $\frac{|q|}{\varepsilon_0}$). Ясно, что поток, создаваемый зарядами каждой грани, равен трети этого «половинного» потока, но нам все равно нужно суммировать вклады от всех трех граней, так что полный поток поля, «вытекающий» из тетраэдра через одну грань $\Psi=\frac{Q-2|q|}{4\varepsilon_0}$. Положительная величина этого потока соответствует силе, прижимающей грань к каркасу: $F_n=\frac{|q|}{S}\Psi=\frac{|q|(Q-2|q|)}{4\varepsilon_0 S}$. Для того, чтобы шкатулка «рассыпалась», разность давлений должна создать силу $F_\partial = \Delta p S \ge F_n$. Значит, $\Delta p \ge \dfrac{|q|(Q-2|q|)}{4\varepsilon_0 S^2}$. Поскольку площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$, то $\Delta p \ge \dfrac{4|q|(Q-2|q|)}{3\varepsilon_0 a^4}$.

ОТВЕТ: $\Delta p \ge \dfrac{4|q|(Q-2|q|)}{3\varepsilon_0 a^4}$.

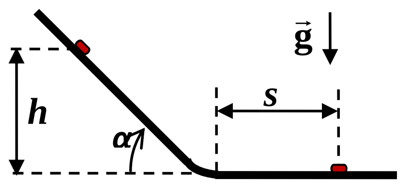
Примечание: Конечно, эту задачу можно решать «напрямую» через принцип суперпозиции. Но расчет поля и силы даже с учетом симметрии – совсем не «школьная» задача.

Критерии проверки:

Решение с вычислением силы «из закона Кулона», в котором заряды граней «помещаются» в их геометрический центр, в котором нет других ошибок, оценивается в **5 баллов**.

Использована симметрия системы (указано, что все грани действуют друг на друга одинаково и заряд действует одинаково на каждую из них)	**2**
Получена связь силы с потоком через поверхность	**4**
Вычислен поток поля (или сила, действующая на грань) от центрального заряда	**3**
Вычислен поток поля (или сила, действующая на грань) от других граней	**4**
Найдена разность давлений	**2**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**15**

4. («**На перегибе**») В своих старых лабораторных журналах профессор Вагнер нашел отчет об одном из своих экспериментов. В этом эксперименте изучалось скатывание маленькой шайбы по однородному пластиковому профилю без начальной скорости. В журнале была таблица зависимости тормозного пути шайбы s на горизонтальном участке профиля от высоты точки старта h на наклонном участке, при некотором значении угла наклона α. Кроме того, там также была зависимость s от угла наклона α при $h = 20$ см. Эти таблицы приведены ниже. На основании данных профессора определите:



- при каком значении α проводилась серия опытов, результаты которой приведены в таблице 1.
- чему равен коэффициент трения шайбы о поверхность профиля (известно, что он одинаков для всех участков поверхности).

Каковы величины возможных ошибок Ваших результатов? Профессор вспомнил, что профиль на участке сопряжения наклонного и горизонтального участков всегда изгибался с одним и тем же радиусом кривизны, причем этот радиус был значительно больше размеров шайбы и – в большинстве опытов – заметно меньше h. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

Таблица 1 (измерения проведены с точностью ±2 мм):

h, м	0,350	0,400	0,450	0,500	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800
s, м	0,148	0,171	0,194	0,217	0,240	0,262	0,285	0,308	0,331	0,354

Таблица 2 (измерения углов проведены с точностью ±1°, измерения тормозного пути с точностью ±1 мм):

α, °	30	40	50	60
s, м	0,023	0,07	0,086	0,088

Решение:

Начнем с построения теоретической модели процесса. Пусть r – радиус кривизны участка сопряжения. Ясно, что во всех опытах $\mu < tg(\alpha)$. Тогда после соскальзывания шайбы по прямолинейному наклонному участку она наберет скорость v_1, определяемую из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mg[h - r(1-\cos(\alpha))] + A_{тр} = mgh[1-\mu ctg(\alpha)] - mgr[1-\cos(\alpha)].$$

Здесь учтено, что сила трения скольжения на наклонном участке $|F_{тр}| = \mu mg\cos(\alpha)$, а ее работа отрицательна ($A_{тр} = -|F_{тр}|\dfrac{h}{\sin(\alpha)} = \mu mgh ctg(\alpha)$). В результате $v_1^2 = 2gh[1-\mu ctg(\alpha)] - 2gr[1-\cos(\alpha)]$. При прохождении по «перегибу» удобно использовать новую переменную – угол поворота шайбы от начала сопряжения φ (этот угол изменяется от 0 до α). Во всех случаях шайба не останавливается, поэтому сила трения является силой трения скольжения и уравнения для касательной и центростремительной компоненты ускорения имеют вид:

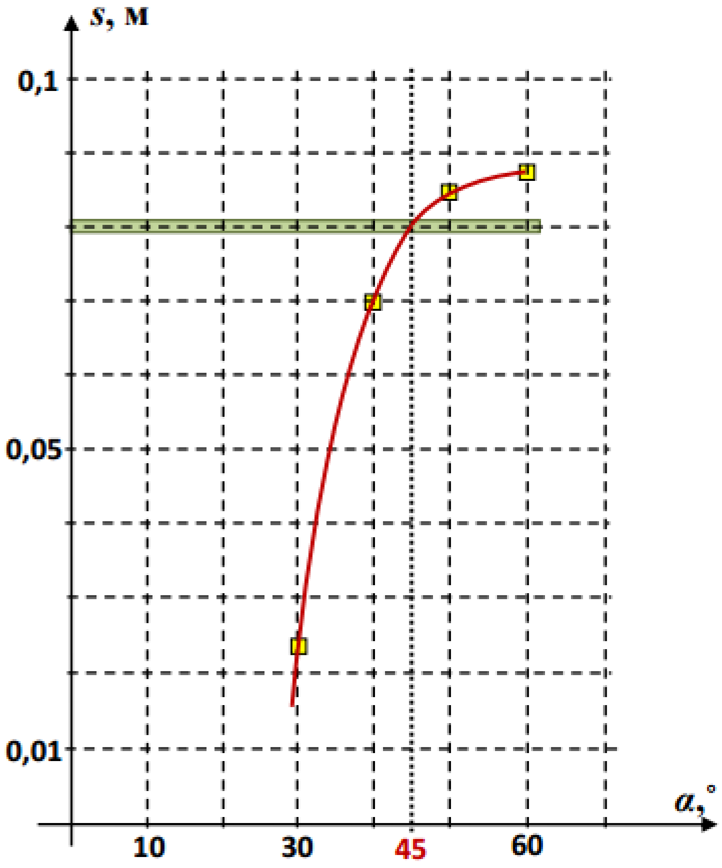
$$\left.\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -\mu N + mg\sin(\alpha-\varphi) \\ m\dfrac{v^2}{r} = N - mg\cos(\alpha-\varphi) \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu\frac{v^2}{r} + g[\sin(\alpha-\varphi) - \mu\cos(\alpha-\varphi)]$$

(угол наклона касательной к участку сопряжения к горизонтали равен $\alpha-\varphi$). Малое изменение угла φ за время dt равно $d\varphi = \dfrac{v}{r}dt$, поэтому $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{vdv}{rd\varphi} = \dfrac{1}{2r}\dfrac{d(v^2)}{d\varphi}$.

Следовательно, $\dfrac{d(v^2)}{d\varphi} = -2\mu\cdot v^2 + 2gr[\sin(\alpha-\varphi) - \mu\cos(\alpha-\varphi)]$. Отметим, что, если коэффициент трения μ не «слишком близок» к $tg(\alpha)$ или к 0, то $\mu v^2 \propto gh >> gr$, и тогда вторым слагаемым в правой части этого уравнения можно пренебречь, и считать, что $\dfrac{d(v^2)}{d\varphi} \approx -2\mu\cdot v^2$. Функция, производная которой пропорциональна ей самой – это экспонента, и поэтому $v^2(\varphi) \approx const\cdot e^{-2\mu\varphi}$. Поскольку $v^2(0) = v_1^2$, то $v^2(\varphi) \approx v_1^2\cdot e^{-2\mu\varphi}$. Тогда скорость, с которой шайба выезжает на горизонтальный участок, удовлетворяет соотношению $v_2^2 \approx v_1^2\cdot e^{-2\mu\alpha}$. На самом деле, за счет отброшенного слагаемого здесь появится дополнительное слагаемое порядка gr. Слагаемое того же порядка есть и в выражении для v_1^2. Значит, $v_2^2 = 2gh[1-\mu ctg(\alpha)]\cdot e^{-2\mu\alpha} - c\cdot gr$, причем безразмерная величина c зависит от α и μ, а по порядку величины она близка к 1. Длина тормозного пути на горизонтальном участке, где ускорение шайбы $|\vec{a}_s| = \mu g$, равна:

$$s = \frac{v_2^2}{2\mu g} = h\left[\frac{1}{\mu} - ctg(\alpha)\right]\cdot e^{-2\mu\alpha} - \frac{c}{2\mu}r \equiv k\cdot h + b.$$

Если на основании таблицы 1 построить график $s(h)$, то он действительно оказывается линейным. Подбор значений параметров линейной зависимости $s(h) = kh + b$ можно было также производить либо графически, либо используя ***метод наименьших квадратов*** (в этом методе для функции $s(h) = kh + b$ подбирают такие значения k и b, чтобы для набора точек (h_1, s_1), (h_2, s_2), ... , (h_N, s_N) минимизировать сумму квадратов отклонений: $\sum_{i=1}^{N} (s_i - kh_i - b)^2 \to \min$. Тогда обнаруживается, что $k \approx 0{,}456 \pm 0{,}003$ и $b \approx (-0{,}0112 \pm 0{,}0008)$ м. Продолжая эту зависимость в область более малых h, найдем, что $s(0{,}2\,\text{м}) \approx (0{,}080 \pm 0{,}007)$ м. Теперь можно из данных таблицы 2 определить угол, при котором получены данные таблицы 1. Графический анализ (см. рис.) приводит к выводу, что $\alpha \approx (45 \pm 2)°$.



Значит, коэффициент трения должен удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{1}{\mu} - 1\right] \cdot \exp(-1{,}57 \cdot \mu) \approx 0{,}456 .$$

Удобно решать такое уравнение с помощью Excel, задав в одной из ячеек функцию из левой части и подбирая значение μ. Тогда получим, что $\mu \approx 0{,}50 \pm 0{,}02$.

ОТВЕТ: $\alpha \approx (45 \pm 2)°$, $\mu \approx 0{,}50 \pm 0{,}02$.

Примечание: Описанный поход не является единственно возможным, но он приводит к наиболее точным результатам. Тем не менее, можно было действовать и по-другому. Например, можно было сначала найти коэффициент наклона модельной прямой, сравнивая коэффициенты наклона прямых, соединяющих первую точку со всеми остальными, а затем вычислив средний коэффициент наклона (равный $k \approx 0{,}459$), а затем подобрать наилучшее значение $b \approx -0{,}013$ м. Результаты в этом случае получаются аналогичные. Ошибки можно оценивать и по допустимым вариациям подобранных значений (удобно это делать с помощью Excel). Можно также было использовать стандартные пакеты статистической обработки данных. При аккуратной работе для любой разумной методики отклонения не превышают (5-7)%. Нетрудно заметить, что основным источником ошибки являются заданные погрешности экспериментальных данных – формально расчет позволяет провести модельные кривые через центры допустимых диапазонов даже с несколько большей точностью. Очень важный момент – использование именно общей линейной зависимости, так как использование выражения $s(h) = h\left[\dfrac{1}{\mu} - ctg(\alpha)\right] \cdot e^{-2\mu\alpha} \equiv k \cdot h$ с подбором k приводит к существенно худшей точности.

Критерии проверки:

Правильно описано изменение скорости на наклонном участке пути	**1**
Правильно описано изменение скорости на горизонтальном участке пути	**1**
Записаны уравнения движения или закон изменения кинетической энергии на «перегибе»	**2**
Получена связь скоростей в «начале» и в «конце» сопряжения вида $v_2^2 \approx v_1^2 \cdot e^{-2\mu\alpha}$ с точностью до величин порядка gr	**6**
Получено правильное модельное выражение для $s(h) = kh + b$	**2**
Произведен подбор параметров модельной зависимости	**3**
Выбран и описан корректный метод определения α и μ	**2**
С использованием данных <u>обеих</u> таблиц правильно определена одна из искомых величин (с указанием ошибки)	**1(+1)**
Правильно определена вторая из искомых величин	**1 (+1)**
Дополнительно, если значения $\alpha \approx 45°$ и $\mu \approx 0{,}50$ попадают в <u>обоснованно</u> найденный интервал при относительной ошибке не более 10% (не более 4%)	**по 1 (+1)**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**25**

Решение без учета торможения «на перегибе» оценивалось максимум в 8 баллов. Решение с использованием однородной линейной зависимости $s(h) = k \cdot h$ оценивалось максимум в 20 баллов.

Максимальная оценка за часть II: 75 баллов.

Максимальная оценка за работу отборочного этапа: 100 баллов.