МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»
по физике

2015/2016 учебный год

ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО (ОТБОРОЧНОГО) ЭТАПА. 7, 8 и 9 классы.

Часть I . Тестовое задание. Возможные решения и ответы.

В этой части у каждого участника в вопросах данные были разными, поэтому решение и ответы приведены для одного из возможных вариантов численных данных.

Вопрос 1 (максимальная оценка 5 баллов):

В теплоизолированном сосуде длительное время находилась вода с плавающим в ней куском льда при нормальном атмосферном давлении. Масса льда равнялась 140 г. В сосуд добавили 96 г кипящей (при том же давлении) воды. Какая температура установится в сосуде спустя достаточно большое время? Ответ дайте в градусах Цельсия, при необходимости округлив до ближайшего целого значения. Удельную теплоемкость воды и удельную теплоту плавления льда считать равными $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), $\lambda = 334$ кДж/кг.

Решение:

При нормальном атмосферном давлении температура, при которой находятся в равновесии вода и лед – это $t_0 = 0°C$, а температура кипящей воды $t_1 = 100°C$. Даже остыв до $t_0 = 0°C$, кипящая вода может выделить количество теплоты $Q_1 = cm(t_1 - t_0) = 4{,}2 \cdot 0{,}096 \cdot 100$ кДж $\approx 40{,}32$ кДж. Этого количества тепла не хватит, чтобы растопить весь лед (на это нужно $Q_2 = \lambda m_Л = 334 \cdot 0{,}14$ кДж $\approx 46{,}76$ кДж). Таким образом, в конечном состоянии в сосуде тоже будут находиться вода со льдом, и конечная температура равна начальной: $t = t_0 = 0°C$.

Ответ: 0.

Вопрос 2 (10 баллов):

Шайба, скользящая без вращения по горизонтальной поверхности, за первую секунду движения прошла путь 5,6 м, а по окончании четвертой секунды остановилась. Найти путь, пройденный шайбой за четвертую секунду. Ответ запишите в сантиметрах, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

Решение:

В описанных условиях шайба до остановки двигалась под действием силы трения скольжения с постоянным ускорением, направленным против начальной скорости. Пусть начальная скорость шайбы равна v_0, величина ускорения – a, а $\tau \equiv 1$с. Тогда, поскольку шайба остановилась после 4-й секунды, то $v_0 = 4a\tau$. Тогда путь, пройденный за первую секунду, $s_1 = v_0\tau - \frac{a\tau^2}{2} = \frac{7a\tau^2}{2}$. Путь за четвертую секунду можно найти как разность путей за 4 с и за 3 с: $s_4 = v_0 4\tau - \frac{a(4\tau)^2}{2} - \left(v_0 3\tau - \frac{a(3\tau)^2}{2}\right) = \frac{a\tau^2}{2}$ (впрочем, если учесть обратимость движения, то можно сразу понять, что путь за четвертую секунду равен пути за 1 секунду тела, которое стартует из состояния покоя с ускорением a, и получить тот же результат). Сравнивая полученные выражения, находим, что $s_4 = \frac{1}{7}s_1 = 0{,}8$м.

Ответ: 80.

Вопрос 3 (10 баллов):

Две зеркальные стены образуют двугранный угол величиной 54º. В точке P на биссектрисе этого угла стоит человек и оглядывается по сторонам (см. рисунок). Сколько своих изображений он видит?

Решение:

Эту задачу проще всего решать построением.

Изображение светящейся точки в плоском зеркале (точка, от которой идут отраженные от зеркала лучи) расположено за плоскостью зеркала на таком же расстоянии от нее, что и сама светящаяся точка (это и называют «зеркально симметричное» положение). Заметим, что светящаяся точка и е изображение в любой из граней двугранного угла расположены на одинаковом расстоянии от вершины этого угла (см. рисунок, на котором выполнено построение для одного из вариантов – в котором угол $\alpha = 54°$, грани зеркального двугранного угла обозначены A и B). Поэтому удобно провести окружность, проходящую через точку положения человека (P), и тогда изображение любой точки в любом из двух зеркал всегда есть пересечение перпендикуляра, опущенного на это зеркало из этой точки, и окружности.

Сначала строим изображение P в зеркалах A (это P_1) и B (P_2), затем изображение P_1 в зеркале B (P_3) и P_2 в зеркале A (P_4). Вторая пара изображений появляется благодаря лучам, которые испытывают, прежде чем вернуться в точку P, два отражения – сначала от одного зеркала, затем от другого. Но есть еще лучи, испытывающие по три отражения, и благодаря им появляется еще одна пара изображений (P_5 и P_6). А вот еще одна пара изображений не появится – нетрудно заметить, что если построить четвертую пару изображений, то лучи от них не смогут попасть в точку P: например, линия от изображения P_5 в зеркале B, идущая к точке P, не пересекает зеркало B (то есть отраженного от зеркала B луча, выходящего из P_5 и попадающего в P, не существует). Можно также в дополнение заметить, что P_5 и P_6 оказались «позади» того зеркала, в котором они должны были бы отразится в следующий раз (например, P_5 – «позади» зеркала B), и из этого тоже можно сделать вывод, что новых изображений не будет.
Таким образом, всего человек увидит 6 своих изображений.
Ответ: 6.

ИТОГО: максимальная оценка за тестовую часть – 25 баллов.

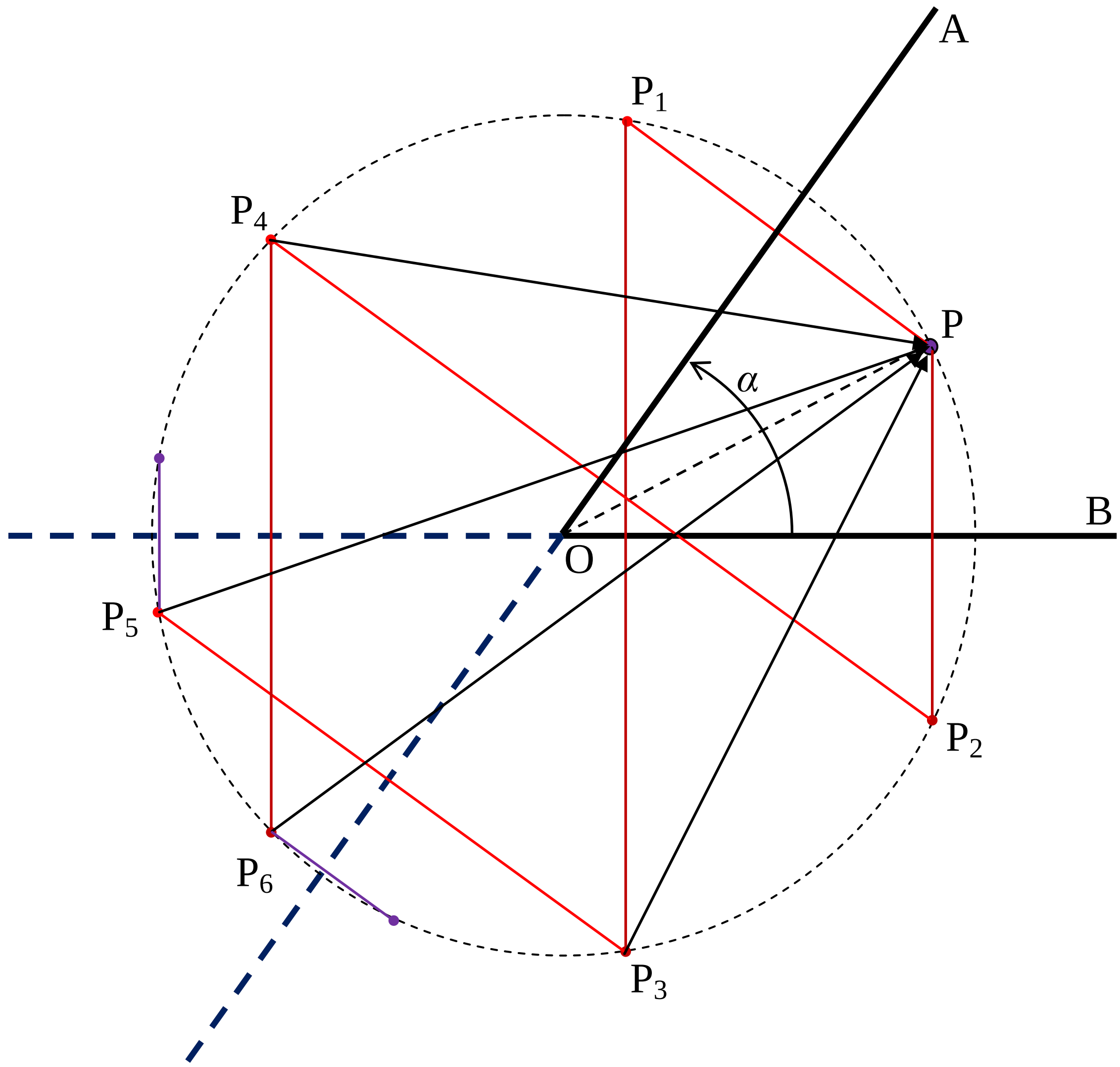
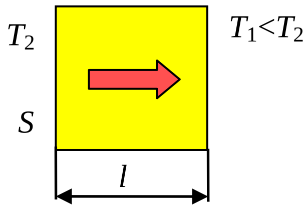
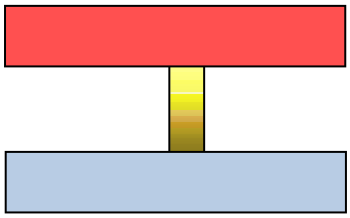
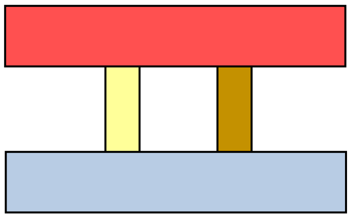


Рисунок к вопросу 3.

Часть II (творческое задание). Возможные решения:

1. («**Тепловые резисторы**») Как известно, одним из способов теплообмена является *теплопроводность*. В этом механизме теплота передается благодаря межмолекулярным взаимодействиям от более горячих областей тел к более холодным. Количество теплоты δQ, протекающее за время δt через объем вещества с площадью поперечного сечения S,



прямо пропорционально разности температур $\Delta T = T_2 - T_1$ и обратно пропорционально расстоянию l (см. рисунок слева): $\delta Q = \kappa \cdot \frac{S\,\Delta T}{l}\delta t$. Коэффициент пропорциональности κ зависит от вещества и называется *коэффициентом теплопроводности*. Допустим, что у нас есть 100 разных веществ, коэффициенты теплопроводности которых отличаются друг от друга на 5% (у первого вещества это κ, у второго – $1{,}05 \cdot \kappa$, у третьего – $(1{,}05)^2 \cdot \kappa$ и так далее. Из одинаковых по высоте цилиндрических слоев всех этих веществ (одинакового сечения, по одному слою для каждого вещества) склеили цилиндр и вставили его между двумя параллельными поверхностями веществ, одно из которых горячее другого (центральный рисунок). Слои «клея» такие тонкие, что не влияют на теплопроводность. Второй раз между этими поверхностями при той же разности их температур вставили два цилиндра такого же сечения и длины, один из которых целиком изготовлен из первого вещества, а второй – из сотого (правый рисунок). Во сколько раз переданное за секунду тепло во втором случае больше, чем в первом (разность температур поддерживается неизменной в течении достаточно долгого времени). Объем между поверхностями вакуумирован, излучением можно пренебречь.

<u>Примечание</u>: Вы легко можете доказать, а потом использовать алгебраическое тождество: $1 - q^N = (1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{N-1})$.

Решение:

Рассмотрим сначала поток через «слоистый» цилиндр. В установившемся режиме поток тепла ($\frac{\delta Q_1}{\delta t}$) одинаков для всех слоев. Пусть δT_n - изменение температуры в n-ом слое с коэффициентом теплопроводности $\kappa_n = \kappa \cdot (1{,}05)^{n-1}$. Из сообщенного в условии *закона Фурье* следует, что $\delta T_n = \frac{\delta l}{S\kappa_n} \cdot \frac{\delta Q_1}{\delta t}$ (где $\delta l = \frac{l}{N}$ - толщина слоя). Суммируя все эти изменения от первого до последнего (N-го) слоя, получим полную разность температур между поверхностями: $\Delta T = \frac{l}{S\kappa N} \cdot \frac{\delta Q_1}{\delta t}\left[1 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right) + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{N-1}\right]$. С учетом алгебраического тождества, которое упоминалось в примечании, сумма в скобке равна $\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^N\right] / \left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)\right] = 21\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^N\right]$. Следовательно, с учетом того, что $N = 100$:

$$\frac{\delta Q_1}{\delta t} = \frac{S\kappa\,\Delta T}{l}\frac{100}{21}\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right]^{-1} \approx 4{,}7257\cdot\frac{S\kappa\,\Delta T}{l}.$$

Во втором случае общий поток есть сумма потоков через два цилиндра:

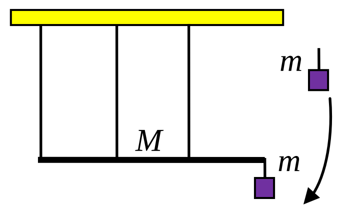
$$\frac{\delta Q_2}{\delta t} = \frac{S\kappa_1\,\Delta T}{l} + \frac{S\kappa_{100}\,\Delta T}{l} = \frac{S\kappa\,\Delta T}{l}[1+(1{,}05)^{99}] \approx 126{,}2393\cdot\frac{S\kappa\,\Delta T}{l}.$$

В результате получаем, что во втором случае за секунду действительно передается больше тепла, чем в первом, в $x = \frac{21}{100}[1+(1{,}05)^{99}]\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right] \approx 26{,}7$ раза. Если в процессе вычислений пренебрегать 1 по сравнению с $(1{,}05)^{99}$ и $\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}$ по сравнению с 1, то ошибка будет не очень большой: $x \approx \frac{21}{100}(1{,}05)^{99} \approx 26{,}3$.

ОТВЕТ: в $x = \frac{21}{100}[1+(1{,}05)^{99}]\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right] \approx 26{,}7$ **раза. Максимальная оценка: 15 баллов.**

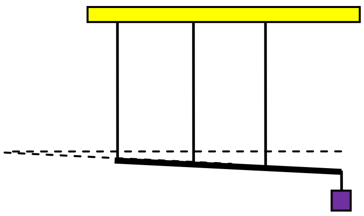
<u>Комментарий</u>: Название задачи «тепловые резисторы» связано с тем, что можно усмотреть явную аналогию между законом Ферми для теплопроводности и законом Ома для электрического тока, согласно которому заряд δQ, протекающее за время δt через объем вещества длиной l с площадью поперечного сечения S, пропорционален напряжению (разности потенциалов): $\delta Q = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{SU}{l}\delta t$. Здесь роль теплопроводности играет величина, обратная удельному сопротивлению ρ («удельная проводимость»), а роль разности температур – напряжение. Таким образом, наша задача аналогична задаче о последовательном и параллельном соединении резисторов: в первом случае у нас цепочка 100 последовательно соединенных резисторов, а во втором – два параллельно соединенных, и отношение токов равно обратному соотношению «сопротивлений».

2. («**Тройной подвес**») Однородный стержень массой $M = 1$кг подвешен на трех одинаковых длинных легких практически нерастяжимых нитях таким образом, что все три нити вертикальны. При этом одна из нитей прикреплена к «левому» концу стержня, другая – к точке, расположенной на расстоянии, равном трети длины стержня от этого конца, а третья – на таком же расстоянии от второй (см. рисунок). К выступающему «правому» концу стержня прикреплен небольшой по размеру груз массой $m = 110$г. Как и на сколько изменится сила натяжения «средней» нити, если к грузу подвесить еще один, точно такой же?



Решение:

На стержень действуют силы натяжения нитей $T_{1,2,3}$, сила тяжести (приложенная к его середине, так как стержень однородный) и вес груза. Условия равновесия стержня – это условие равенства нулю суммы действующих на него сил, то есть $T_1 + T_2 + T_3 = (M+m)g$, и условие равенства нулю суммы моментов этих сил (например, относительно левого конца стержня): $T_2\frac{l}{3}+T_3\frac{2l}{3}=Mg\frac{l}{2}+mgl \Rightarrow T_2+2T_3=\frac{3}{2}Mg+3mg$. Этих уравнений не хватает для однозначного определения сил натяжения нитей. Если дополнительно *предположить*, что все три нити натянуты, то можно получить еще одно уравнение. Силы упругости нитей пропорциональны их деформациям, которые малы, но все же отличны от нуля. Естественно считать, что деформации стержня и потолка еще во много раз меньше, и поэтому деформации нитей – это отрезки трех параллельных прямых между сторонами одного угла. Так как вторая нить находится точно посередине между первой и третьей, то



ее деформация есть точно полусумма деформаций этих нитей, или $2x_2=x_1+x_3$ (см. рисунок, на котором для наглядности деформации показаны увеличенными). Нити по условию одинаковы, поэтому коэффициенты жесткости у них также одинаковы, и поэтому $2T_2=T_1+T_3$. Из этого уравнения и условия равновесия сил сразу получается, что $3T_2=(M+m)g$. Таким образом, <u>если</u> все три нити натянуты, то $T_2=\frac{M+m}{3}g\approx 3{,}7$ Н (если считать, что $g\approx 10$ м/с^2). Проверим выполнение предположения: из правила моментов следует, что $T_3=\frac{3}{4}Mg+\frac{3}{2}mg-\frac{1}{2}T_2=\frac{7}{12}Mg+\frac{4}{3}mg$, и поэтому при любых массах стержнях и груза третья нить натянута ($T_3>0$). Сила натяжения первой нити $T_1=(M+m)g-T_2-T_3$, то есть $T_1=\frac{M-8m}{12}g$. Значит, первая нить натянута при $m<\frac{M}{8}$, и это условие выполняется в случае подвешивания одного груза. После подвешивания второго груза в этих формулах нужно заменить $m\to 2m$, но при этом оказывается, что полученными формулами пользоваться нельзя, так как $2m>\frac{M}{8}$! Таким образом, после подвешивания второго груза первая нить провисает ($T_1=0$), и теперь

$$\left\{\begin{aligned} T_2+T_3&=(M+2m)g \\ T_2+2T_3&=\frac{3}{2}Mg+6mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2=\frac{M-4m}{2}g\approx 2{,}8\,\text{Н}.$$

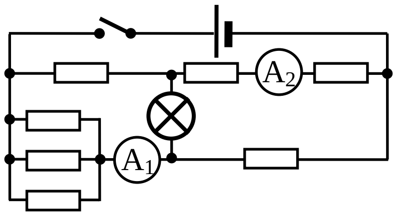
Как видно, в результате подвешивания второго груза сила натяжения «средней» нити уменьшится на $\Delta T_2=\frac{M+m}{3}g-\frac{M-4m}{2}g=\frac{14m-M}{6}g\approx 0{,}9$ Н.

ОТВЕТ: сила натяжения «средней» нити уменьшится на $\Delta T_2=\frac{14m-M}{6}g\approx 0{,}9$ Н.

Максимальная оценка: 20 баллов.

3. («**А лампа-то горит!**») Однажды некий ученик 8 класса нашел в школьной лаборатории коробку с семью одинаковыми резисторами, на которых не была обозначена

величина сопротивления. Из этих резисторов и найденных в том же шкафу ключа, двух амперметров, батареи и лампочки он собрал установку по схеме, показанной на рисунке. После замыкания ключа лампочка загорелась. При этом первый амперметр (A_1) показал, что через него течет ток $I_1 = 1{,}8$ А. Какую величину силы тока показывал второй амперметр? Амперметры считать идеальными.



Решение:

Прежде всего заметим, что, если неизвестное сопротивление каждого из резисторов обозначить R, то сопротивление в ветви с первым амперметром равно $\frac{R}{3}$, а в ветви со вторым амперметром – $2R$. Обозначим символом I_1' величину тока в ветви, параллельной первому амперметру, I_2 - величину силы тока через второй амперметр, I_2' - через резистор, подключенный параллельно второму амперметру. Тогда напряжение, создаваемое источником на концах цепи, можно записать двумя способами:

$$U = RI_1' + 2RI_2 = \frac{R}{3}I_1 + RI_2'.$$

Также двумя способами можно вычислить и ток в ветви с источником:

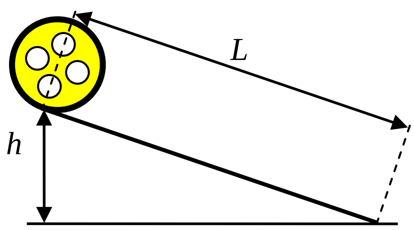
$$I = I_1' + I_1 = I_2 + I_2'.$$

Если второе равенство умножить на R и вычесть из первого, то получится уравнение связи I_1 и I_2:

$$2RI_2 - RI_1 = \frac{R}{3}I_1 - RI_2 \Rightarrow I_2 = \frac{4}{9}I_1 = 0{,}8\,\text{А}.$$

ОТВЕТ: второй амперметр показывает ток $I_2 = \frac{4}{9}I_1 = 0{,}8$ А. Максимальная оценка: 15 баллов.

4. («**Покатушки**») Известно, что при поступательном движении кинетическая энергия тела массы m равна $E_{пост} = \frac{mv^2}{2}$ (где v – скорость тела, одинаковая для всех его точек). В общем случае движение твердого тела (то есть такого, деформациями которого в процессе движения мы пренебрегаем) можно представить как комбинацию поступательного движения и вращения. Тогда и кинетическая энергия общего движения находится как сумма кинетических энергий поступательного движения и вращения. Рассмотрим колесо с достаточно сложным, но симметричным относительно оси колеса распределением масс, скатывающееся по наклонной поверхности без проскальзывания так, что каждая его точка движется в одной вертикальной плоскости. При таком движении вращательная скорость каждой точки колеса связана с вращательной скоростью точек его внешнего обода (при вращении скорость точки, конечно же, пропорциональна радиусу ее вращения). А скорость вращения точек обода вокруг центра колеса равна скорости движения центра относительно поверхности. Поэтому вклад вращения в кинетическую энергию должен выражаться через массу колеса



и скорость центра колеса. В таблице показаны результаты проведенных с высокой точностью измерений времени скатывания такого колеса по наклонной плоскости длиной $L = (100{,}0 \pm 0{,}1)$ см при разной высоте положения верхнего конца плоскости.

h, см ± 1 мм	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0
t, с ± 0,01 с	1,85	1,52	1,32	1,18	1,09

На основании этих данных найдите для этого колеса отношение кинетических энергий вращения и поступательного движения во время скатывания: $\frac{E_{вращ}}{E_{пост}} = ?$ В ответе укажите точность, с которой Вы нашли эту величину. Силой сопротивления воздуха и трением качения можно пренебречь.

Решение:

В процессе соскальзывания или скатывания тела с наклонной плоскости его потенциальная энергия в поле тяжести Земли переходит в кинетическую энергию. При соскальзывании в отсутствие сил трения движение происходит равноускоренно, и при этом связь конечной скорости и начальной высоты определяется законом сохранения энергии: $mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. При скатывании колеса без проскальзывания, как следует из пояснений в условии, при каждой величине скорости определенная доля кинетической энергии приходится на энергию вращения. Пусть $\frac{E_{вращ}}{E_{пост}} \equiv z$. Тогда кинетическая энергия выражается через скорость движения центра колеса $E_K = (1+z)\frac{mv^2}{2}$, и в этом случае конечная скорость находится из аналогичного случаю соскальзывания соотношения: соотношения $mgh = (1+z)\frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1+z}}$. Так как здесь квадрат скорости тоже растет пропорционально пройденному расстоянию, то и здесь движение будет равноускоренным, и средняя скорость скатывания равна половине конечной скорости, поэтому время скатывания $t = \frac{L}{v_{ср}} = \frac{L\sqrt{2(1+z)}}{\sqrt{gh}}$. Из этого соотношения можно определить z: $\frac{E_{вращ}}{E_{пост}} \equiv z = \frac{gt^2h}{2L^2} - 1$. Вычислим эту величину для каждой из имеющихся «точек» экспериментальной зависимости $t(h)$.

h, см ± 1 мм	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0
t, с ± 0,01 с	1,85	1,52	1,32	1,18	1,09
z	0,679	0,700	0,709	0,707	0,748

Как видно, эта величина с хорошей точностью остается постоянной (наибольшие отклонения наблюдаются по «краям» исследованного интервала – при малых и больших высотах). Среднее значение $z_{ср} \approx 0{,}71$, а разброс значений около $\Delta z \approx 0{,}03$ (то есть 4-5% от результата). Заметим, что точность измерений для всех величин была выше (лучше 1%), поэтому неточность определения z в основном связана с неточностью модели (возможно, проявилось влияние сил сопротивления воздуха или силы трения качения, или небольшого проскальзывания).

ОТВЕТ: $\frac{E_{вращ}}{E_{пост}} = 0{,}71 \pm 0{,}03$ **. Максимальная оценка: 25 баллов.**

Примечание: Анализ данных можно было проводить и другими способами. Например, наша теоретическая модель предсказывает линейную зависимость величины $y \equiv \frac{gt^2}{2L}$ от $x \equiv \frac{L}{h}$: $y = (1+z)\,x$. Можно, нанеся экспериментальные точки на плоскость (x, y), провести прямую, проходящую через начало координат, с наименьшими отклонениями от этих точек. Коэффициент наклона этой прямой $k = 1+z$. Для подбора «наилучшей» прямой можно потребовать, чтобы сумма квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{5}(y_i - kx_i)^2$ было минимальным (это так называемый «метод наименьших квадратов»). При таком подходе особенно заметно, что одна из точек (для $h = 30$ см) согласуется с моделью гораздо хуже остальных – если ее убрать, то точность повышается: $\frac{E_{вращ}}{E_{пост}} = 0{,}690 \pm 0{,}016$.

ИТОГО: максимальная оценка творческого задания: 75 баллов.

МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА: 100 БАЛЛОВ.