МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»
по физике

2015/2016 учебный год

http://pvg.mk.ru

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

ПО ФИЗИКЕ, 2015/16 учебный год, МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО (ОТБОРОЧНОГО) ЭТАПА. 10 и 11 классы.

Часть I. Тестовое задание: у разных участников были разные числовые данные, поэтому приведены решения одного из возможных вариантов теста.

Вопрос 1 (7 баллов):

Шайба, скользящая без вращения по горизонтальной поверхности, за первую секунду движения прошла путь 4,2 м, а за вторую секунду – 2,9 м в том же направлении. Какой путь она пройдет за третью секунду (препятствий на ее пути нет)? Ответ запишите в сантиметрах, при необходимости округлив до целого значения.

Решение:

В указанных условиях шайба движется с постоянным ускорением, создаваемым силой трения скольжения. Обозначим модуль ускорения a, а начальную скорость шайбы v_0, запишем (время $\tau \equiv 1$с): путь за первую секунду $s_1 = v_0\tau - \frac{a}{2}\tau^2$, путь за вторую секунду $s_2 = v_0 2\tau - \frac{a}{2}(2\tau)^2 - v_0\tau + \frac{a}{2}\tau^2 = v_0\tau - \frac{3a}{2}\tau^2$. Скорость в конце третьей секунды $v_3 = v_0 - 3a\tau = \frac{5s_2 - 3s_1}{2\tau} > 0$, поэтому на третьей секунде шайба продолжала движение в том же направлении. Значит, путь за третью секунду

$$s_3 = v_0 3\tau - \frac{a}{2}(3\tau)^2 - v_0 2\tau + \frac{a}{2}(2\tau)^2 = v_0\tau - \frac{5a}{2}\tau^2 = 2s_2 - s_1 = 1{,}6\,\text{м}.$$

Таким образом, $s_3 = 160$ см, и округление не требуется.

Ответ: 160.

Вопрос 2 (10 баллов):

Один моль гелия участвует в процессе, уравнение которого в координатах «температура-объем» имеет вид $T = T_0 \cdot \left[3 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2\right]$, причем $T_0 = 228$К, $V_0 = 50$л, и объем в этом процессе изменяется от $V_1 = 40$л до $V_2 = 120$л. Найти минимальное давление гелия в этом процессе. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $R \approx 8{,}31$Дж/моль·К. Ответ запишите в килопаскалях, округлив до целого значения.

Решение:

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, выразим давление гелия в ходе процесса как функцию объема: $p = \frac{RT}{V} = RT_0\left[\frac{3}{V} + \frac{V}{V_0^2}\right] = \sqrt{3}\frac{RT_0}{V_0} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}V_0}{V} + \frac{V}{\sqrt{3}V_0}\right]$. Так как минимальное значение функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ равно 2 и достигается при $x = 1$, а значение

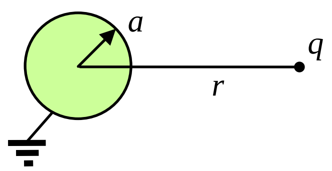
$V = \sqrt{3} V_0 \approx 86{,}6$ л принадлежит заданному интервалу значений объема, то $p_{\min} = 2\sqrt{3}\dfrac{RT_0}{V_0} \approx 131267$ Па.

Ответ: 131.

Вопрос 3 (8 баллов):

Незаряженный металлический шар радиусом 20 см соединен тонким длинным проводом с «землей» (очень большим удаленным незаряженным проводящим телом). К этому шару поднесли маленький шарик с зарядом +42 мкКл, расположив его на расстоянии 1,2 м от центра шара. Найти индуцированный на шаре заряд. Ответ запишите в микрокулонах, округлив до целого значения и с учетом знака.

Решение:



При поднесении заряда на шаре появится индуцированный заряд противоположного знака. Величина и распределение этого заряда по поверхности шара таковы, что потенциал всех точек шара одинаков и равен нулю (потенциалу «земли»). Запишем условие равенства нулю центра шара: в соответствии с принципом суперпозиции, потенциал этой точки равен сумме потенциалов, создаваемых зарядом q и всеми зарядами δq_i, появившимися на каждом участке поверхности шара. С учетом того, что все индуцированные заряды находятся на одинаковом расстоянии от центра шара: $0 = \dfrac{q}{r} + \sum \dfrac{\delta q_i}{a} = \dfrac{q}{r} + \dfrac{q_i}{a}$. Следовательно, полный индуцированный заряд $q_i = -\dfrac{a}{r} q = -7$ мкКл.

Ответ: - 7.

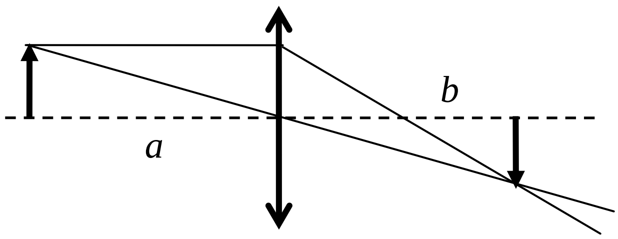
ИТОГО: максимальная оценка за тестовую часть – 25 баллов.

Часть II (творческое задание). ***«ИЗОБРЕТЕНИЯ КОНСТРУКТОРА КЛАПАУЦИЯ».***

Возможные решения:

1. («**Старинная лупа**») Однажды Клапауций нашел у себя в кабинете старинную лупу – линзу большого диаметра, вставленную в оправу. Он взял лампочку с прямолинейной светящейся нитью длиной $L = 5{,}4$ мм, разместил ее так, что середина нити оказалась на главной оптической оси линзы, а сама нить была перпендикулярна этой оси. Конструктор разместил экран так, что на нем наблюдалось четкое изображение нити лампы и обнаружил, что размер изображения $L_1 = 1{,}8$ мм. Затем он повернул лампу так, что нить расположилась вдоль главной оптической оси линзы. Перемещая экран микрометрическим винтом, Клапауций аккуратно измерил длину нового изображения нити. Какой результат он получил? При всех измерениях расстояние от нити до линзы было более 60 см.

Решение:



Изображение, наблюдаемое на экране – это действительное изображение, которое можно получить только с помощью собирающей линзы, если расстояние от объекта до линзы больше ее фокусного расстояния (см. рисунок): $a > F$. Из построения для такого случая видно, что увеличение при поперечном расположении нити: $k = -\frac{L_1}{L} = -\frac{b}{a}$. С учетом формулы линзы находим, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \quad \frac{L_1}{L} = \frac{F}{a-F}$. Отметим, что заданные значения L и L_1 соответствуют $a = 4F$, причем, как следует из условия, это расстояние было значительно больше размера нити. Следовательно, при продольном расположении нить тоже была далека от линзы и от ее ближнего фокуса. Значит, можно получить выражение для увеличения нити непосредственно из формулы линзы:

$$\tilde{a} = a - L \Rightarrow L_2 = \tilde{b} - b = \frac{(a-L)F}{a-L-F} - \frac{aF}{a-F} = \frac{F^2}{(a-L-F)(a-F)} L \approx \left(\frac{F}{a-F}\right)^2 L .$$

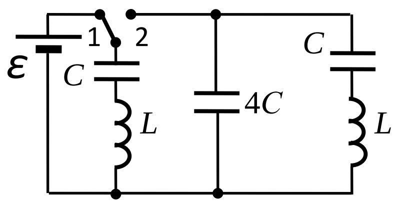
Таким образом,

$$L_2 = \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 L = \frac{L_1^2}{L} = 0{,}6 \text{ мм.}$$

Можно оценить возможный разброс значений L_2, взяв результат для минимального допустимого значения $a = 60$ см: $L_2^{(\max)} \approx 0{,}607$ мм. Ясно, что точность определения размера при описанном способе измерений не позволит обнаружить такое различие.

ОТВЕТ: $L_2 = \frac{L_1^2}{L} = 0{,}6$ **мм. Максимальная оценка: 15 баллов.**

2. («**Нарушенная симметрия**») В одном из своих изобретений Клапауций использовал симметричный «двойной» колебательный контур, схема которого вместе со схемой устройства для запуска колебаний показана на рисунке. При использовании контура ключ сначала переводится в положение 1, а затем электронное устройство переводит ключ в положение 2 в момент, когда заряд «левого» конденсатора достиг максимального значения. Найти закон изменения заряда на «правом» конденсаторе после этого момента времени. До начала использования все конденсаторы были разряжены. Сопротивлениями всех элементов схемы на рассматриваемых интервалах времени можно пренебречь, остальные их параметры показаны на рисунке.



Решение:

Рассмотрим сначала процессы, протекающие в схеме после перевода ключа в положение 1. В контуре, содержащем источник, «левый» конденсатор и катушку, возникнут колебания. Так как сопротивления пренебрежимо малы, то эти колебания будут слабозатухающими (то есть практически гармоническими). Колебания заряда на конденсаторе будут происходить вокруг равновесного значения (очевидно соответствующего $q_0 = C\mathcal{E}$). Так как начальный ток равен нулю, то амплитуда этих колебаний равна величине начального отклонения заряда ($q = 0$) от равновесного, то есть q_0. Таким образом, максимальная величина заряда на «левом» конденсаторе в ходе этих колебаний примерно равна $2q_0$. В этот момент ток в катушке равен нулю (он равен нулю в моменты, когда заряд конденсатора проходит через максимум).

После перевода ключа в положение 2 (далее момент $t = 0$) начинаются колебания в «двойном» контуре. Начальные условия для этих колебаний таковы: токи в катушках равны нулю, «правый» и «средний» конденсаторы не заряжены, заряд «левого» конденсатора равен $2q_0$. Сама схема симметрична по отношению к замене «право-лево», но начальные условия нарушают эту симметрию. Рассмотрим два других процесса колебаний для других, более симметричных начальных условий:

А) «Правый» и «левый» конденсаторы заряжены одинаково. В этом случае удобно заменить «средний» конденсатор емкостью $4C$ на два параллельно соединенных конденсатора с емкостями по $2C$ каждый (см. рисунок):

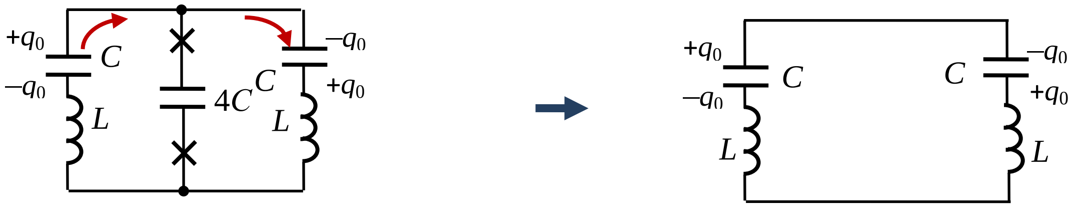
Ясно, что здесь «крайние» конденсаторы в силу полной симметрии будут синхронно заряжать «средние», и напряжения на «средних» в любой момент времени будут одинаковы. Это значит, что токи по соединяющим их проводам течь не будут, и поэтому их можно удалить без изменения токов в других элементах схемы. Таким образом, закон колебания заряда на «правом» конденсаторе для таких начальных условий совпадает с законом колебаний в одном «правом» контуре, составленном из последовательно соединенных конденсаторов C и $2C$ и катушки индуктивности L. С учетом направления движения зарядов будем считать, что полярности включения конденсаторов противоположны, и уравнение баланса напряжений в контуре $\frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{2C} + L\frac{dI}{dt} = 0$, где $I \equiv \frac{dq_1}{dt}$. С учетом закона сохранения заряда для пары соединенных обкладок двух конденсаторов $q_1 + q_2 = const = q_0$ получаем, что для любого момента времени $q_2 = q_0 - q_1$, и поэтому уравнение колебаний заряда конденсатора C имеет вид:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{3}{2CL} q_1 = \frac{q_0}{2CL}.$$

Как видно, заряд интересующего нас конденсатора совершает гармонические колебания с частотой $\omega_A = \sqrt{\frac{3}{2CL}}$ вокруг значения $\frac{q_0}{3}$ (подстановка $q_1(t) = \frac{q_0}{3} + \tilde{q}(t)$ приводит это уравнение к стандартному уравнению гармонических колебаний $\tilde{q}'' + \omega_A^2 \tilde{q} = 0$). С учетом начальных условий ($q_1(0) = q_0$, $I(0) = 0$) получаем:

$$q_1^{(A)}(t)=\frac{q_0}{3}+\frac{2q_0}{3}\cos(\omega_A t).$$

В) «Правый» и «левый» конденсаторы заряжены противоположно. Теперь токи в ветвях с этими конденсаторами противоположны, и поэтому в ветви со «средним» конденсатором



ток всегда равен нулю, и его можно убрать из схемы. Последовательно соединенные конденсаторы C оказываются в данном контуре эквивалентны одному конденсатору емкостью $\frac{C}{2}$, а две последовательно соединенные катушки L – одной с индуктивностью $2L$. В этом контуре возникают гармонические колебания с частотой $\omega_B=\frac{1}{\sqrt{CL}}$, а заряд «правого» конденсатора изменяется по закону $q_1^{(B)}(t)=-q_0\cos(\omega_B t)$.

Теперь можно заметить, что начальные условия для колебаний в нашем случае есть в точности сумма начальных условий для случаев (А) и (В). Значит,

$$q_{np}(t)=q_1^{(A)}(t)+q_1^{(B)}(t)=\frac{q_0}{3}+\frac{2q_0}{3}\cos(\omega_A t)-q_0\cos(\omega_B t).$$

ОТВЕТ: $q_{np}(t)=\frac{q_0}{3}\{1+2\cos(\omega_A t)-3\cos(\omega_B t)\}$, **где** $q_0=C\mathcal{E}$, $\omega_A=\sqrt{\frac{3}{2CL}}$, $\omega_B=\frac{1}{\sqrt{CL}}$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

3. («**Водный акселерометр**») Одним из первых изобретений Клапауция был детектор ускорения ракеты при равномерном разгоне в межзвездном пространстве. Детектор представлял собой узкую трубку длиной $l=10$ м, заполненную водяным паром, относительная влажность которого в отсутствие ускорения равнялась $\phi_0=99{,}00\,\%$. Трубка располагалась вдоль оси ракеты и помещалась в термостат, поддерживающий постоянную температуру содержимого трубки $T=360{,}00$ К. Величина ускорения a, по замыслу Клапауция, должна была определяться по высоте наблюдаемого под микроскопом столба жидкости h. Можно ли использовать этот детектор для измерения ускорений в диапазоне от $5g$ до $20g$? А в диапазоне от $50g$ до $200g$? Для того диапазона, для которого Вы считаете детектор пригодным, определите, как его следует проградуировать, то есть получите формулу связи $a(h)$. Отношение плотности насыщенного водяного пара к плотности жидкой воды при температуре термостата считайте равным $\varepsilon\equiv\frac{\rho_n}{\rho_B}\approx 3{,}84\cdot10^{-4}$.

Решение:

Прежде всего заметим, что труба является «узкой» по сравнению с ее длиной, что позволяет нам считать ее достаточно широкой для того, чтобы пренебрегать силами поверхностного натяжения.

Выясним, при каком ускорении в «детекторе» появится жидкая вода. Масса воды в трубке может быть определена из уравнения Менделеева-Клапейрона или через плотность насыщенного пара: $m_0 = \frac{\mu p_0 Sl}{RT} = \phi_0 \frac{\mu p_H Sl}{RT} = \phi_0 \rho_n Sl$ (здесь $\mu = 0{,}018$ кг/моль – молярная масса воды, S – сечение трубки, $R \approx 8{,}31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная, p_H – давление насыщенного пара при температуре T). Пока вся вода находится в виде пара, ее ускорение создается разностью давлений у «задней» (пол отношению к ускорению) и «передней» стенки трубки: $m_0 a = (p_1 - p_2)S \Rightarrow p_1 - p_2 = \phi_0 \frac{\mu p_H l}{RT} a$. С другой стороны, записав уравнение движение для слоя пара толщиной dx на расстоянии x от «задней» стенки, найдем, что

$$dpS = -dm\,a = -\frac{\mu a p}{RT} Sdx \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{\mu a}{RT} p.$$

Вспомнив, у какой функции производная пропорциональна ей самой, можно записать $p(x) = p_1 \exp\left(-\frac{\mu a x}{RT}\right)$. Тогда уравнение для определения давления p_1 имеет вид:

$$p_1\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu a l}{RT}\right)\right] = \phi_0 \frac{\mu p_H a l}{RT}.$$

Начало конденсации у «задней» стенки соответствует $p_1 = p_H$, то есть $1 - \exp\left(-\frac{\mu a l}{RT}\right) = \phi_0 \frac{\mu a l}{RT}$, откуда и находится минимальное значение ускорения, к которому чувствителен прибор. Если заметить, что даже для $a = 200g$ величина $\frac{\mu a l}{RT} \approx 0{,}118$, то есть довольно мала, то можно, считая $1 - e^{-z}|_{z<<1} \approx z - \frac{z^2}{2}$ найти, что минимальное ускорение $a_{\min} \approx (1-\phi_0)\frac{2RT}{\mu l} \approx 33{,}9g$. Таким образом, для диапазона ускорений от $5g$ до $20g$ акселерометр заведомо непригоден, а для диапазона от $50g$ до $200g$ в принципе может быть использован.

При $a > a_{\min}$ у «задней» стенки появляется столбик жидкой воды высоты h. Так как вблизи границы раздела фаз давление пара равно p_H, то $p_1 = p_H + \rho_B a h$, и при этом из соотношения, аналогичного полученному в предыдущем действии, $p_2 = p_H \exp\left(-\frac{\mu a(l-h)}{RT}\right)$. Следовательно, теперь уравнение для ускорения

$$p_H + \rho_B a h - p_H \exp\left(-\frac{\mu a(l-h)}{RT}\right) = \phi_0 \rho_n l a.$$

Запишем, учитывая то, что $h << l$: $p_H\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu a(l-h)}{RT}\right)\right] \approx \frac{\mu p_H (l-h)}{RT} a - \frac{\mu^2 p_H^2 l^2}{2R^2T^2} a^2$, и тогда (поскольку $\frac{\mu p_H}{RT} = \rho_n$) $(\rho_B - \rho_n)h + (1-\phi_0)\rho_n l = \rho_n \frac{\mu l^2}{2RT} a$. Наконец, из этого соотношения получаем уравнение для «градуировки» прибора:

$$a(h) \approx a_{\min}\left[1+\frac{h}{\varepsilon(1-\phi_0)l}\right] \approx 33{,}9g \cdot \left[1+\frac{h}{0{,}0384\,мм}\right].$$

Как видно, даже в диапазоне, в котором это возможно, прибор не слишком удобен для использования, ибо требует точных измерений очень малых h. Например, для $a = 200g$ соответствующее $h \approx 0{,}188$ мм. Кроме того, при приближении к верхней границе диапазона точность полученной формулы падает.

ОТВЕТ: для диапазона от $50g$ до $200g$ градуировка шкалы акселерометра дается выражением $a(h) \approx (1-\phi_0)\dfrac{2RT}{\mu l}\left[1+\dfrac{h}{\varepsilon(1-\phi_0)l}\right] \approx 33{,}9g \cdot \left[1+\dfrac{h}{0{,}0384\,мм}\right]$. Максимальная оценка: 15 баллов.

Примечание: Многие участники не использовали разложение экспоненты, и вместо зависимости $a(h)$ получали $h(a)$. В этом случае из формулы $p_H + \rho_B ah - p_H \exp\left(-\dfrac{\mu a(l-h)}{RT}\right) = \phi_0\rho_n la$ с учетом $\dfrac{\mu p_H}{RT} = \rho_n$ и $h << l$ получается

$$h(a) \approx \varepsilon\left[\phi_0 l - \frac{RT}{\mu a}(1-e^{-\frac{\mu la}{RT}})\right] \approx 3{,}8\,мм \cdot \left[1-\frac{1-e^{-z}}{0{,}99z}\right], \quad \text{где} \quad z \equiv \frac{a}{1{,}66\cdot 10^6\,м/с^2} \approx 0{,}59\cdot 10^{-5}\frac{a}{g}.$$

Центральным соображением для зачета результата были: правильное использование полученной формулы для определения возможности использования прибора в указанных диапазонах и представление «градуировочной зависимости» $a(h)$ - например, таблицей или графиком.

4. («**Нейтринная тяга**») Среди многих изобретений Клапауция был прыгающий шар на нейтринной тяге (внутри шара был установлен компактный направленный излучатель нейтрино – нейтринный пучок создавал реактивную тягу и при этом практически не взаимодействовал с окружающим веществом). Работа двигателя была запрограммирована таким образом, что шар совершал «прыжки» по поверхности Земли на заданное расстояние L, двигаясь строго по полной ветви циклоиды, лежащей в вертикальной плоскости. В течении первых $\tau \approx 0{,}2$ с движения шар разгоняется, затем двигается с постоянной по величине скоростью, строго равной $u = \sqrt{\dfrac{gL}{\pi}}$, а в последние $\tau \approx 0{,}2$ с шар тормозит. Во время прыжка специальные приборы фиксируют с высокой точностью высоту шара над «начальной горизонталью» h и величину силы тяги нейтринного двигателя F_T. Однажды Клапауций экспериментировал с шаром на полигоне и заметил, что во время одного из прыжков шар прошел через неподвижно висящее в воздухе облако аэрозоля. Клапауций предположил, что при прохождении через облако действующая на шар сила сопротивления была больше, чем в чистом воздухе. Из памяти бортового компьютера он взял данные об изменении во время этого прыжка величин $x \equiv \dfrac{\pi h}{L}$ и $f \equiv \dfrac{F_T}{mg}$ (см. таблицу, в которой t – время, отсчитываемое от начала прыжка, полная длительность которого составляла примерно 13,68 с, m – масса шара).

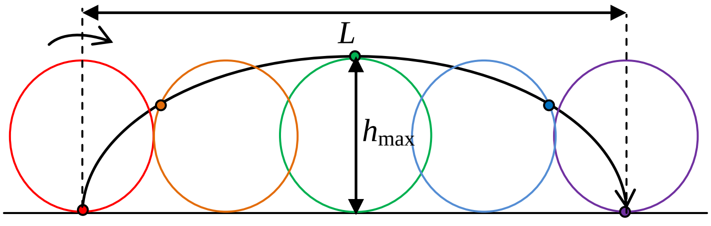
t, с	x, ± 0,0010	f, ± 0,0020
1	0,3038	0,7982
2	0,5218	0,5723
3	0,6989	0,4904
4	0,8353	0,4652
5	0,9308	0,4688
6	0,9856	0,4891
7	0,9995	0,509
8	0,9726	0,4814
9	0,9049	0,4257
10	0,7963	0,3649
11	0,647	0,3463
12	0,4568	0,6202
13	0,2258	0,9542

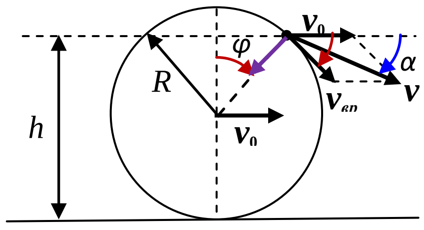
На основании этих данных определите, какие из указанных моментов времени относятся к прохождению шара через облако. Во сколько раз изменилась сила сопротивления в облаке (по сравнению с силой сопротивления вне него)?

Примечание: Циклоида – это кривая, по которой движется точка на ободе вертикального колеса, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности.

Решение:

Необходимо отметить, что данное задание не является «задачей» в обычном смысле – для его выполнения, помимо обычного решения необходимо проведение «мини-исследования» с целью разобраться в весьма нетипичной ситуации, описанной в условии. Начало этого исследования в принципе похоже на решение «обычной» олимпиадной задачи, причем довольно сложной (хотя формально и не выходящей за рамки школьной программы профильного уровня).





Начнем с изучения характеристик циклоиды. Рассмотрим вертикальное колесо, катящееся без проскальзывания по горизонтальной поверхности, центр которого движется равномерно и прямолинейно со скоростью v_0. При таком движении скорость точки на ободе колеса складывается из скорости центра и скорости вращения вокруг центра: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{вр}$, причем модуль скорости вращения для точек обода тоже равен v_0. Поэтому для точки, радиус которой отклонен от вертикали на угол φ, вектор скорости (направленный по касательной к циклоиде) составляет с горизонталью угол $\alpha = \varphi/2$, а его модуль $v = 2v_0 \cos(\varphi/2)$. Аналогично ускорение этой точки складывается из ускорения центра (равного нулю) и ускорения вращательного движения. Поэтому вектор ускорения направлен к центру колеса и равен по модулю $a = v_0^2 / R$, где R – радиус колеса. Центростремительная (то есть перпендикулярная вектору скорости) компонента этого ускорения $a_{цс} = a\cos(\alpha) = \frac{v_0^2}{R}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ может быть записана через радиус кривизны циклоиды в этой точке: $a_{цс} = \frac{v^2}{R_K}$. Сопоставляя эти соотношения, находим, что $R_K = 4R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2R\sqrt{2[1+\cos(\varphi)]}$ (такой же результат можно получить, если обратить внимание на положение мгновенного центра вращения, которым является нижняя точка колеса). Отметим, что высота рассматриваемой точки циклоиды над поверхностью $h = R[1+\cos(\varphi)]$, а длина «арки» циклоиды очевидно (так как наше колесо катится без проскальзывания) равна $L = 2\pi R$. Следовательно, радиус кривизны циклоиды в точке на высоте h над поверхностью $R_K = 2\sqrt{2Rh} = 2\sqrt{\frac{Lh}{\pi}}$. Кроме того, угол наклона касательной к циклоиде к горизонту $\alpha = \varphi/2$ в этой точке удовлетворяет соотношению $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}} = \sqrt{\frac{h}{2R}} = \sqrt{\frac{\pi h}{L}}$. Значит, эти характеристики циклоиды могут быть выражены через переменную $x \equiv \frac{\pi h}{L}$ следующим образом: $R_K = \frac{2L}{\pi}\sqrt{x}$, $\cos(\alpha) = \sqrt{x}$. При выбранном направлении отсчета углов $\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-x}$ («плюс» - для нисходящего участка циклоиды, «минус» - для восходящего).

Теперь рассмотрим движение шара по циклоиде. Так как всюду, кроме участков разгона и торможения, величина скорости шара постоянна, то ускорение шара в точках равномерного движения состоит только из центростремительной компоненты, то есть перпендикулярно скорости и равно по величине $a = \frac{u^2}{R_K} = \frac{g}{2\sqrt{x}}$. Это ускорение создается действием силы тяги двигателя $\vec{F}_T$, силы тяжести $m\vec{g}$ и силы взаимодействия шара с воздухом $\vec{F}_B$. Естественно на первом этапе исследования предположить, что последняя сила – это сила сопротивления воздуха, которая должна быть направлена против скорости шара относительно воздуха: $\vec{F}_B \approx \vec{F}_C$. Поскольку во время изучаемого прыжка облако аэрозоля висело неподвижно, то можно считать, что ветер отсутствовал, и скорость относительно воздуха совпадала со скоростью относительно земли, направленной по касательной к циклоиде, то есть $\vec{F}_C \approx -F_C\frac{\vec{u}}{u}$. Таким образом, касательная к циклоиде компонента силы тяги должна уравновешивать равнодействующую касательной компоненты силы тяжести и силы сопротивления воздуха: $F_{T\tau} = F_C - mg\sin(\alpha)$ (поскольку касательная компонента ускорения равна нулю). Нормальная (центростремительная) компонента силы тяги вместе с нормальной компонентой силы тяжести создает центростремительное ускорение: $F_{Tn} = ma - mg\cos(\alpha)$. Следовательно,

$$F_T^2 = (F_C - mg\sin(\alpha))^2 + (ma - mg\cos(\alpha))^2 .$$

С учетом того, что $a = \frac{g}{2\sqrt{x}}$, $\cos(\alpha) = \sqrt{x}$, $\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-x}$, можно связать величину $y \equiv \frac{F_C}{mg}$ с x и $f \equiv \frac{F_T}{mg}$. Поскольку $F_{T\tau}$ может иметь разный знак, то получаем два возможных решения:

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 + f^2 - x - \frac{1}{4x}} - \sqrt{1-x}, & \textit{при подъеме шара} \\ \sqrt{1 + f^2 - x - \frac{1}{4x}} + \sqrt{1-x}, & \textit{при опускании шара} \end{cases} \quad \text{и}$$

$$y = \begin{cases} -\sqrt{1 + f^2 - x - \frac{1}{4x}} - \sqrt{1-x}, & \textit{при подъеме шара} \\ -\sqrt{1 + f^2 - x - \frac{1}{4x}} + \sqrt{1-x}, & \textit{при опускании шара} \end{cases}.$$

Во втором решении сила сопротивления при подъеме оказывается отрицательной при любом поведении силы тяги, что делает его менее реалистичным.

Все приведенные в таблице значения $f(x)$ относятся именно к участку равномерного движения (они отстоят от моментов начала и окончания прыжка более чем на $\tau \approx 0{,}2$ с). Поэтому в рамках предложенной модели по данным Клапауция можно найти величину силы сопротивления (вычисления производились с помощью Excel, сохранялись четыре знака после запятой, как и в данных Клапауция): для первого решения

t, с	1	2	3	4	5	6	7
y	– 0,1200	– 0,1200	– 0,1199	– 0,1198	– 0,1203	– 0,1201*	0,1201

(* при $t = 6$ с $1 + f^2 - x - \frac{1}{4x} \approx -1{,}38 \cdot 10^{-5} < 0$, и полученная формула «не работает», но понятно, что в пределах ошибок измерений эту величину можно считать нулем)

8	9	10	11	12	13
0,2117	0,3174	0,6026	0,8884	1,3539	1,6398

Для второго решения:

t, с	1	2	3	4	5	6	7
y	– 1,5488	– 1,2630	– 0,9775	– 0,6919	– 0,4056	– 0,1201*	– 0,0746

8	9	10	11	12	13
0,1196	0,2996	0,3000	0,3000	0,1201	0,1199

Как видно, полученный результат свидетельствует о фантастической ситуации – в рамках рассматриваемой модели при подъеме шара в любом случае $F_C < 0$, то есть сила «сопротивления» воздуха была направлена <u>вдоль</u> скорости шара, то есть в действительности «подталкивала» его! Такое поведение силы взаимодействия шара с воздухом невозможно для «обычных» газов и аэрозолей, поэтому у нас есть два варианта действий:

1) Связать обнаруженную аномалию с неизвестными свойствами аэрозоля. Тогда мы должны считать, что шар проходил через облако аэрозоля во время подъема, то есть к этой области относятся моменты времени от $t = 1$ с до $t = 6$ с (для первого решения). В этом случае предположение конструктора оказалось неверным в корне – ведь в облаке

сила сопротивления не только не увеличивается, но становится силой «подталкивания». Что касается величины силы сопротивления, то – опять же для первого решения – ее среднее значение в облаке равно $|F_C|_{cp} \approx 0{,}1200\,mg$ с максимальным отклонением не более $\Delta F_C = 0{,}0003mg$, что составляет 0,25% от среднего. В рамках такой точности эта величина совпадает с минимальной величиной силы сопротивления в воздухе (на максимальной высоте полета), и примерно в 13,67 раза меньше максимальной величины силы сопротивления в воздухе. То есть, если считать что сила сопротивления в воздухе определена примерно с той же точностью, то $\dfrac{|F^B_{C\min}|}{|F^A_C|} \approx 1{,}0000 \pm 0{,}0005$, $\dfrac{|F^B_{C\max}|}{|F^A_C|} \approx 13{,}67 \pm 0{,}06$. Нужно отметить, что в этом случае мы должны считать, что сила сопротивления в воздухе очень сильно изменялась с высотой, что при заданных масштабах траектории не очень реалистично. В самом деле, нам известно время одного «прыжка» $T \approx 13{,}68$ с. Длина одной «арки» циклоиды связана с ее шириной соотношением $S = \dfrac{4L}{\pi}$, поэтому $uT = T\sqrt{\dfrac{gL}{\pi}} = \dfrac{4L}{\pi} \Rightarrow L = \dfrac{\pi}{16}gT^2 \approx 370$ м. Максимальная высота подъема шара во время прыжка $h_{\max} = \dfrac{L}{\pi} \approx 118$ м – вряд ли на такой высоте плотность воздуха меняется так сильно. Поэтому такой путь считался допустимым, но максимальная оценка при таком подходе не превышала 20 баллов.

2) Принять, что сила взаимодействия шара с воздухом не сводится к силе сопротивления, и попробовать построить более сложную модель явления, в которой не нужно предполагать наличие каких-либо фантастических свойств у аэрозоля. Следует отметить, что поле для поиска довольно обширно – ведь у нас есть только данные о траектории, а характеристики шара (размеры и вес шара) нам неизвестны. Неизвестно нам также, вращается ли шар во время «прыжка». Поэтому мы вполне можем предполагать наличие силы Архимеда или силы Магнуса, существенно влияющих на движение шара (эффект Магнуса – появление «поперечной» силы, действующей на вращающееся тело, обтекаемое потоком жидкости или газа: если тело при вращении «увлекает» за собой жидкость или газ, то из-за сложения набегающего потока с потоком «циркуляционного» движения скорости – а вместе с ней и давления – жидкости или газа различны с разных сторон тела). Впрочем, сразу можно заметить, что, поскольку движение шара происходит по плоской кривой, следует предполагать вращение шара в той же вертикальной плоскости, и тогда сила Магнуса будет лежать в этой же плоскости и будет перпендикулярна скорости шара. Значит, ее присутствие будет влиять только на нормальную компоненту необходимой силы тяги, и, как нетрудно установить, для силы сопротивления воздуха в первые три секунды подъема при учете только этой силы все равно будет получаться «экзотическое» направление вдоль скорости. Приведем <u>одну из возможных</u> схем такого подхода. Пусть «подъемная» (например, архимедова) сила, действующая на шар, примерно постоянна: $F_A \equiv \alpha \cdot mg \approx const$. Ели шар сохраняет свою ориентацию относительно Земли, то он будет вращаться относительно обтекающего его потока газа с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения вектора скорости:

$\omega = \dfrac{u}{R_K} = \dfrac{\pi u}{2L\sqrt{x}}$. Разность давлений в обтекающем шар потоке пропорциональна разности квадратов скоростей обтекания, и для шара радиуса r сила Магнуса $F_M \propto r^2 \cdot [(u+\omega r)^2 - (u-\omega r)^2] = 2r^3 u\omega = \dfrac{\pi r^3 u^2}{L\sqrt{x}}$, поэтому можно положить $F_M \equiv \dfrac{\beta}{2\sqrt{x}} \cdot mg,\ \beta \approx const$, причем эта сила будет направлена по нормали к траектории. Тогда для касательной и нормальной компонент силы тяги получим: $F_{T\tau} = F_C + (F_A - mg)\sin(\alpha)$, $F_{Tn} = ma - F_M + (F_A - mg)\cos(\alpha)$. Из этих соотношений, например, для «первого» решения:

$$y = \begin{cases} \sqrt{f^2 - \left[\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{x}} - (1-\alpha)\sqrt{x}\right]^2} - (1-\alpha)\sqrt{1-x}, & \textit{при подъеме шара} \\ \sqrt{f^2 - \left[\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{x}} - (1-\alpha)\sqrt{x}\right]^2} + (1-\alpha)\sqrt{1-x}, & \textit{при опускании шара} \end{cases}.$$

Теперь задача состоит в подборе таких α и β, при которых сила сопротивления (y) будет иметь «естественное» направление и примерно постоянную величину для большей части точек траектории (тогда эти точки будут соответствовать движению в воздухе). В данном случае для подбора тоже использовалась таблица Excel (учитывая разброс значений порядка 0,01, здесь в вычислениях сохранялся только один «запасной» порядок): наименьший относительный разброс достигался при $\alpha \approx 0{,}89$ и $\beta \approx 0{,}87$ (эти значения соответствуют очень легкому и довольно большому по размерам шару), при которых

t, с	1	2	3	4	5	6	7
y	0,704	0,496	0,430	0,420	0,438	0,474	0,509

8	9	10	11	12	13
0,498	0,458	0,414	0,412	0,701	1,047

Как видно, здесь со 2-й по 11-ю секунду можно принять $y \approx 0{,}45 \pm 0{,}05$, а на 1-й, 12-й и 13-й секундах сила сопротивления резко возрастает, что можно связать с наличием аэрозоля вблизи поверхности Земли. Сила сопротивления в этой модели возрастает (в верхнем слое облака) как минимум до $y \approx 0{,}703 \pm 0{,}002$, то есть в $1{,}6 \pm 0{,}2$ раза, причем в более низких слоях аэрозоля сила сопротивления возрастает еще сильнее.

Необходимо отметить, что эта модель может быть еще развита: во-первых, можно считать, что подъемная сила и сила Магнуса тоже должны возрасти в облаке аэрозоля, и отдельно подбирать соответствующие значения α и β (уже после того, как сами моменты прохождения через облако установлены), во-вторых, можно учесть, что, в соответствии с законами гидродинамики, при движении с ускорением величина «подъемной» силы зависит от величины ускорения. Учет этого обстоятельства несколько снизит расчетное значение силы сопротивления в «верхней» части траектории (то есть с 6-й по 8-ю секунду) по отношению к остальным моментам времени – что еще уменьшит разброс значений ее величины в воздухе – и немного уменьшит оценку для величины силы Магнуса. Но такие «уточнения» значительно усложняют и без того непростую модель (а гидродинамический расчет подъемной силы при наличии ускорения тела значительно выходит за рамки школьной программы), и при этом не приводят к качественному изменению результата.

ОТВЕТ: моменты, относящиеся к прохождению прыгающего шара через облако аэрозоля $t = 1,12,13$ с, в эти моменты сила сопротивления среды возрастает минимум в $1,6 \pm 0,2$ раза. Максимальная оценка: 25 баллов.

Примечания:

1. Как отмечалось выше, описанное решение – не единственное «правильное». Важно было: провести правильный анализ модели, в которой взаимодействие шара с неподвижным воздухом сводится к силе сопротивления, и обнаружить ее некорректность; предложить корректировку модели, объясняющую «странное» поведение силы взаимодействия с воздухом; описать поведение силы сопротивления воздуха в скорректированной модели. Например, одним из участников была предложена еще одна возможная корректировка, существенно отличающаяся от описанной в «авторском» решении. Он предположил, что ветер отсутствовал только на нисходящей части траектории, где и висело облако аэрозоля, а восходящая ветвь траектории оказалось в области потока воздуха, в котором скорость течения воздуха в каждой точке была направлена вверх вдоль касательной к циклоиде, по которой двигался шар, и равна по величине в точности $2u = 2\sqrt{\dfrac{gL}{\pi}}$. Тогда в этих точках скорость шара относительно воздуха была направлена вдоль касательной вниз и равна u. Сила сопротивления должна зависеть именно от скорости относительно воздуха, и тогда с 1-й по 7-ю секунду она имела постоянную величину и направление, в точности соответствующую «первому» решению, а с 8-й по 13-ю секунду сила сопротивления росла в соответствии с изменением плотности аэрозоля. Конечно, такая модель является допустимой. Вместе с тем, многие участники предлагали «нефизические» объяснения необычного поведения силы – такие, как «ошибка бортового компьютера» или «ошибка автора задачи». Разумеется, такие «модели» не считались правильными. По правилам проведения олимпиады к условию нужно относиться как заданной информации, не подлежащей переделке. Конечно, данные в таблице не были получены в результате реальных измерений, а были по определенной схеме построены автором задачи, но к ним нужно было отнестись как к реальным данным и постараться объяснить их. На самом деле, в данном случае мы обнаруживаем, что при ограниченных экспериментальных данных (нам был известен только модуль силы тяги, и неизвестно ее направление) «полная расшифровка» ситуации возможна только при относительно простой физике явления (если бы «хорошее» поведение силы сопротивления было бы получено в «простой» модели), а в более сложных ситуациях возможно много вариантов моделирования реального явления.

2. Жюри обратило внимание, что даже при правильной записи уравнений движения шара при вычислении силы сопротивления многие участники допускали ошибки. Самыми распространенными из них были две: (1) Потеря или смена знака в выражении для этой силы на подъеме шара – в этом случае «странность» в поведении силы сопротивления оставалась незамеченной. (2) Использование для описания $\vec{F}_C$ на подъеме и при опускании двух «половинок» разных решений (т.е. одно выражение бралось из «первого» решения, второе – из «второго») – это неправильно, так как такая «стыковка» вносит в поведение силы сопротивления мгновенный скачок, никак не связанный с поведением

других сил. Понятно, что в реальности изменение силы сопротивления может быть довольно резким (при входе в облако с четкой границей), но все равно не мгновенным! Сразу в нескольких работах эти ошибки были совершены одновременно – например, рассматривалось решение $y = \sqrt{1-x} - \sqrt{1 + f^2 - x - \frac{1}{4x}}$ для всей траектории, для которого

t, с	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	0,1200	0,1200	0,1199	0,1198	0,1203	0,1201*	– 0,0746	0,1196	0,2996	0,3000	0,3000	0,1201	0,1199

3.

Если в этой таблице «не обращать» внимание на значение при $t = 7$ с, то возникает очень «хорошее» поведение силы сопротивления – во всех остальных точках она с высокой точностью имеет всего два разных значения. Тем не менее – это решение содержит сразу две серьезных ошибки, и к тому же в нем есть и третья – «выкидывание» одного из значений. Поэтому такое решение (с ответом, что шар проходил через облако аэрозоля в моменты $t = 9, 10, 11$ с, в которые сила сопротивления возрастает в $2{,}50 \pm 0{,}01$ раза) оценивалось не более чем в 14 баллов.

ИТОГО: максимальная оценка творческого задания: 75 баллов.

МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА: 100 БАЛЛОВ.