ЗАДАНИЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО (ФИНАЛЬНОГО) ЭТАПА. 7-9 классы.

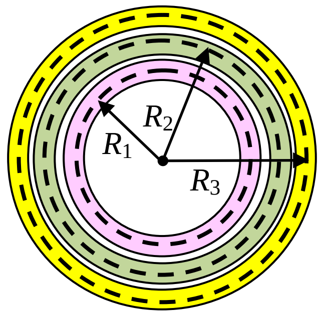
Задания заключительного этапа состояли из оригинальных творческих задач повышенного уровня сложности. Каждое задание состояло из качественного вопроса и задачи, связанных между собой тематически и логически, поэтому участникам необходимо было продемонстрировать умение строить рассуждения на базе известных из профильного школьного курса законов физики, и умение решать сложные задачи.

БИЛЕТ № 10 (7-9 классы): возможные решения, ответы и критерии проверки

Задание 1:

Вопрос: Тело прошло первую половину пути со скоростью 3 м/с, а вторую – со скоростью 6 м/с. Чему равна его средняя скорость на этом пути?

Задача: Юные техники собрали трек для испытания своих моделей. Круглый трек состоит из трех дорожек. Внутренняя дорожка покоится, средняя движется по часовой стрелке со скоростью 1 м/с, а внешняя движется в ту же сторону, что и средняя, со скоростью 1,9 м/с. Когда по треку по часовой стрелке запустили модель автомобильчика, оказалось, что наименьшее время понадобилось автомобилю для совершения круга по средней дорожке, а наибольшее – по внутренней дорожке. Определить скорость модели с ошибкой не более 0,2 м/с, если



радиусы дорожек $R_1 = 5$ м, $R_2 = 7$ м, $R_3 = 9$ м. Какова наилучшая возможная точность?

Ответ на вопрос: $V_{cp} = \dfrac{s}{(s/2V_1)+(s/2V_2)} = \dfrac{2V_1V_2}{V_1+V_2} = 4$ м/с. **Максимальная оценка: 5 баллов**.

Решение задачи: Пусть V - скорость автомобильчика в м/с. Тогда времена совершения круга определяются соотношениями $t_1 = \dfrac{2\pi R_1}{V}$, $t_2 = \dfrac{2\pi R_2}{1+V}$ и $t_3 = \dfrac{2\pi R_3}{1{,}9+V}$. По условию $t_2 < t_3 < t_1$.

Ясно, что наиболее строгие границы для возможных значений скорости дадут «крайние» неравенства:

$$t_2 < t_3 \Rightarrow \frac{R_2}{1+V} < \frac{R_3}{1{,}9+V} \Rightarrow V > \frac{43}{20}\text{ м/с},\quad t_3 < t_1 \Rightarrow \frac{R_3}{1{,}9+V} < \frac{R_1}{V} \Rightarrow V < \frac{19}{8}\text{ м/с}.$$

Среднее значение для полученного интервала $V \approx \frac{181}{80}\text{ м/с} \approx 2{,}26\text{ м/с}$. Возможный разброс значений меньше 0,2 м/с (он меньше 0,12 м/с).

ОТВЕТ: $V \approx (2{,}26 \pm 0{,}12)$ м/с.

Записаны выражения для времен прохождения кругов	5
Записаны через скорости неравенства $t_2 < t_3$ и $t_3 < t_1$	5
Получен интервал значений для скорости	5
Записано выражение для скорости с указанием неточности	5
Максимальная оценка	**20**

Примечание: если для верхней границы использовано неравенство $t_2 < t_1$, дающее менее строгую оценку ($V < 2{,}5$ м/с), оценка снижается на 5 баллов.

Задание 2:

Вопрос: Кастрюля с водой стоит на газовой плите. От чего зависит скорость увеличения внутренней энергии воды? Предположим, что нагрев 1 литра воды при закрытой крышке от $20°C$ до $100°C$ происходит за 2 минуты, а после выключения плиты эта вода остывает до $20°C$ за 20 минут. Оцените (в процентах) величину ошибки, которая будет допущена, если мы посчитаем, что эта скорость не зависит от температуры кастрюли с содержимым.

Задача: К дню рождения мамы Вова (ученик 8 класса) решил сварить компот. Он смешал в кастрюле воду, изюм, орехи, мед и килограмм варенья, и поставил кастрюлю на плиту. Через $T = 25$ минут компот закипел. Вова испугался и долил туда холодной воды. До какой температуры охладился компот, если в следующий раз он закипел через $\tau = 4$ минуты? Компот кипит при $t_1 = 100°C$, температура изначальных ингредиентов и холодной воды $t_0 = 20°C$. Можно считать, что скорость поступления тепла от плиты к содержимому кастрюли и скорость утечки тепла из кастрюли в окружающую среду практически постоянны.

Ответ на вопрос: Скорость увеличения внутренней энергии воды зависит от количества тепла, поступающего в единицу времени в кастрюлю от плиты (оно определяется мощностью плиты, температурой и геометрическими и физическими свойствами плиты и кастрюли) и количества тепла, рассеивающегося из кастрюли в окружающую среду (зависит от тех же свойств кастрюли и разности температур кастрюли и окружающей среды). Ясно, что при изменении температуры кастрюли сильнее изменяется поток тепла в окружающую среду, чем поток тепла от плиты (равновесная температура плиты заведомо больше 100ºC, и к тому же при нагревании кастрюли несколько увеличивается и равновесная температура плиты). Поэтому основная ошибка в указанном приближении возникает именно из-за пренебрежения изменением рассеиваемого тепла. Как видно из данных, в среднем рассеиваемый поток тепла составляет не более 10% от поступающего от плиты. Средняя разность температур кастрюли и окружающей среды 40ºC, и при анализе остывания или нагревания в «крайних» областях (около 20ºC или около 100ºC), отличие скорости увеличения внутренней энергии от средней будет соответствовать ошибке в вычислении потока тепла порядка среднего значения рассеиваемого потока. Если P_H - мощность нагрева, а P - средняя мощность потерь, то средняя скорость увеличения внутренней энергии есть $P_H - P$, вблизи 20ºС она равна P_H, а вблизи 100ºС - $P_H - 2P$. Итак, указанная ошибка порядка 10%.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Примечание: Согласно нашим рассуждениям, влияние изменения температуры кастрюли на поток тепла от плиты меньше, чем на поток тепла в окружающую среду, но он все же есть. Ясно, что при его учете ошибка должна возрасти менее чем в два раза. Поэтому при «грубом» оценивании можно добавить некую меньшую ошибку, связанную с учетом этого фактора (например, установить, что суммарная ошибка будет в районе 15%). Наиболее надежное ограничение – по максимуму (считать, что полная ошибка не должна превосходить 20%). Все подобные оценки также следует признать разумными.

Решение задачи: Пусть N – скорость поступления тепла в кастрюлю (мощность, отдаваемая плитой минус мощность потерь в окружающую среду), которая считается неизменной. Обозначим также C_K – теплоемкость кастрюли вместе с компотом, C_B – теплоемкость долитой воды. Тогда уравнение теплового баланса для закипания компота: $NT = C_K(t_1 - t_0)$, откуда выразим $\frac{N}{C_K} = \frac{t_1 - t_0}{T}$. Уравнение теплового баланса для охлаждения компота: $C_K(t_1 - t) = C_B(t - t_0)$, где t- искомая температура. Отсюда следует, что $\frac{C_B}{C_K} = \frac{t_1 - t}{t - t_0}$. Наконец, запишем уравнение теплового баланса для второго закипания компота: $N\tau = (C_K + C_B)(t_1 - t)$. Разделив обе части этого равенства на C_K и используя ранее полученные соотношения, получаем:

$$\frac{N}{C_K}\tau = \left(1 + \frac{C_B}{C_K}\right)(t_1 - t) \Rightarrow t = \frac{Tt_1 + \tau t_0}{T + \tau} \approx 89°C.$$

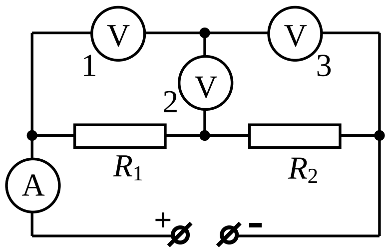
ОТВЕТ: $t = \frac{Tt_1 + \tau t_0}{T + \tau} \approx 89°C$.

Записано уравнение теплового баланса для закипания компота	4
Записано уравнение теплового баланса для охлаждения компота	4
Записано уравнение теплового баланса для повторного закипания компота	4
Получен ответ для температуры	8
Максимальная оценка	**20**

Задание 3:

Вопрос: Если вольтметр подключить непосредственно к полюсам батареи, то он не будет показывать разность потенциалов между полюсами «ненагруженной» батарейки. С чем это связано? Больше или меньше показания вольтметра указанной разности потенциалов? Если параллельно вольтметру подключить второй такой же, то что произойдет с показаниями вольтметра? Ответ объяснить.

Задача: Ученик подключил к аккумулятору два резистора с сопротивлениями $R_1 = 40$ Ом и $R_2 = 60$ Ом, амперметр и три одинаковых вольтметра по схеме, показанной на рисунке. Амперметр и вольтметры не идеальны – в частности, внутренние сопротивления вольтметров равны $R_V = 0{,}5$ Мом (1Мом = 1000000 Ом). Амперметр показывает ток $I = 0{,}6$ А. Каковы показания вольтметров? Цена деления шкалы у вольтметров $\Delta V = 0{,}1$ В.

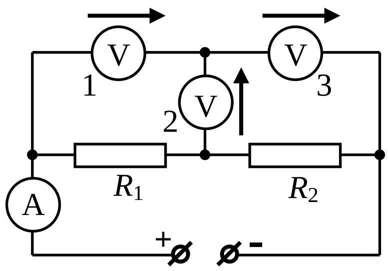


Ответ на вопрос: это связано с тем, что вольтметр неидеален, то есть имеет конечное внутреннее сопротивление R, и батарейка имеет ненулевое внутреннее сопротивление r. Если разность потенциалов, создаваемая на полюсах ненагруженной батарейки, равна U_0, то ток через вольтметр и батарейку будет равен $I = \dfrac{U_0}{R+r}$, и напряжение на вольтметре $U = IR = \dfrac{R}{R+r}U_0 < U_0$, то есть показания вольтметра меньше U_0. Если параллельно вольтметру подключить второй такой же, то их общее сопротивление станет в два раза меньше, и ток в цепи возрастет: $I' = \dfrac{U_0}{(R/2)+r}$, поэтому напряжение на вольтметрах (а значит, и показания вольтметра) уменьшится: $U' = U_0 - I'r < U_0 - Ir = U$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Внутренние сопротивления вольтметров настолько велики, что ток через них порядка одной десятитысячной доли тока через резисторы, и при вычислении тока через резисторы сопротивлениями вольтметров вообще можно пренебречь (цена шкалы деления вольтметров соответствует измерению напряжений с точностью порядка $\dfrac{0{,}1}{0{,}6\cdot 100} \approx 0{,}2\%$).

Поэтому напряжения на резисторах $U_1 \approx IR_1$ и $U_2 \approx IR_2$. Если $V_{1,2,3}$ – показания вольтметров, соответствующие разностям потенциалов между точками их подключения, то $U_1 = V_1 - V_2$ и $U_2 = V_2 + V_3$ («положительные» направления токов через вольтметры выбраны так, как показано на рисунке – в случае, если «настоящие» направления токов не совпадают с выбранными, соответствующие напряжения на вольтметрах окажутся отрицательными, но это не помешает нам определить их величину). Кроме того, поскольку ток через



вольтметр 3 равен сумме токов через вольтметры 1 и 2, а их сопротивления одинаковы, то $V_3 = V_1 + V_2$. Решая полученную систему, находим: $V_1 = \dfrac{2U_1 + U_2}{3} \approx \dfrac{I(2R_1 + R_2)}{3} = 28$ В, $V_2 = \dfrac{U_2 - U_1}{3} \approx \dfrac{I(R_2 - R_1)}{3} = 4$ В, $V_3 = \dfrac{U_1 + 2U_2}{3} \approx \dfrac{I(R_1 + 2R_2)}{3} = 32$ В.

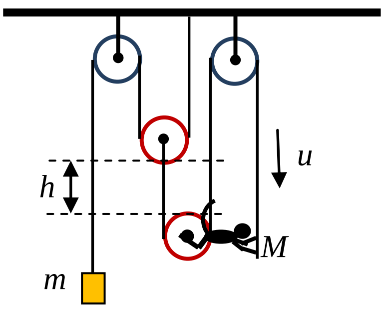
ОТВЕТ: $V_1 \approx \frac{I(2R_1+R_2)}{3} = 28\,\text{В}$, $V_2 \approx \frac{I(R_2-R_1)}{3} = 4\,\text{В}$, $V_3 \approx \frac{I(R_1+2R_2)}{3} = 32\,\text{В}$.

Объяснено, что ток через резисторы можно вычислять, пренебрегая током через вольтметры	3
Записаны уравнения $U_1 = V_1 - V_2$ и $U_2 = V_2 + V_3$ (или аналогичные им)	4
Записано уравнение непрерывности тока через напряжения на вольтметрах ($V_3 = V_1 + V_2$)	4
Получены ответы для показаний вольтметров	по 3 балла
Максимальная оценка	**20**

Задание 4:

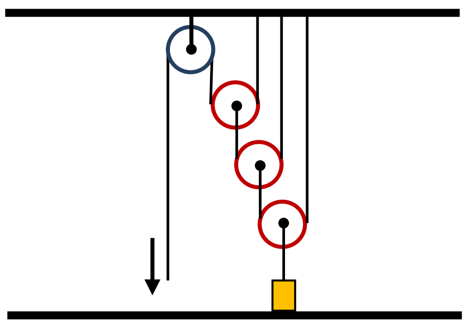
Вопрос: Предложите вариант системы блоков, с помощью которой, стоя на земле, можно плавно поднимать вверх с земли груз, прикладывая усилие, которое в 8 раз меньше веса груза.

Задача: Обезьянка массы $M = 21$ кг повисла, ухватившись за конец легкой нерастяжимой веревки и за один из блоков системы, изображенной на рисунке. При этом система оказалась в равновесии. Затем обезьянка стала выбирать передними лапами веревку так, что конец веревки опускался вниз со скоростью $u = 1$ м/с. Так было до тех пор, пока подвижный блок, за который задними лапами держалась обезьянка, не столкнулся с расположенным над ним подвижным блоком. В момент начала подъема расстояние между этими блоками по вертикали было равно $h = 3$ м. Чему равна масса груза m?



Найти время подъема. Какую работу совершила обезьянка за все время, прошедшее с момента, когда она еще покоилась, до момента столкновения блоков? Все блоки очень легкие, веревка по ним не скользит. Трения в осях блоков нет.

Ответ на вопрос: Вариант такой «идеальной» системы приведен на рисунке: каждый из подвижных блоков дает выигрыш в два раза, поэтому система из трех последовательно соединенных подвижных блоков дает выигрыш по силе в 8 раз. Разумеется, при этом требуется выбрать веревки в 8 раз больше высоты подъема груза.



Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пока система находилась в равновесии, вес обезьянки уравновешивался тройной силой натяжения «правой» веревки системы. Поэтому $T = \frac{Mg}{3}$. Если рассмотреть равновесие верхнего подвижного блока, на который действует сила натяжения «правой» веревки и удвоенная сила натяжения «левой», то можно заключить, что сила натяжения «левой» веревки $T' = \frac{1}{2}T = \frac{Mg}{6}$. Именно эта сила уравновешивает вес груза. Значит, $T' = mg \Rightarrow m = \frac{M}{6} = 3{,}5$ кг.

Теперь рассмотрим движение системы. При разгоне тел до тех скоростей, с которыми они будут двигаться равномерно, обезьянка за счет своих мускульных усилий увеличит силу натяжения T так, что она станет больше $\frac{Mg}{3}$, и за счет этого за время разгона Δt ее направленная вверх скорость станет равной $V = \frac{3T - Mg}{M}\Delta t$. Так как верхний подвижный блок легкий, то на для создания у него конечного ускорения нужна очень малая результирующая сила, и поэтому по-прежнему $T' = \frac{1}{2}T$. В результате груз разгонится до скорости $v = \frac{T' - mg}{m}\Delta t = \frac{T - 2mg}{2m}\Delta t = \frac{3T - Mg}{M}\Delta t = V$. Эта скорость тоже направлена вверх. Заметим, что верхний подвижный блок при этом должен опускаться – всякое смещение груза вверх должно при натянутой веревке сопровождаться опусканием этого блока на вдвое меньше расстояние (так как он висит в «петле» веревки, и удлинение этой петли поровну распределяется между ее сторонами). Значит, этот блок наберет скорость $v' = \frac{V}{2}$, направленную вниз. В процессе дальнейшего движения, когда конец «правой» веревки за время t смещается вниз на расстояние $u\,t$, то сумма длин трех вертикальных участков этой веревки выше уровня обезьянки уменьшилась точно на такую же величину. С другой стороны, эта длина уменьшается за счет движения обезьянки вместе с нижним блоком вверх (на $3V\,t$) и за счет опускания верхнего блока (на $\frac{V}{2}t$). Следовательно, $\left(3V + \frac{V}{2}\right)t = u\,t \Rightarrow V = \frac{2}{7}u$. Скорость сближения верхнего и нижнего блока в процессе движения равна $\frac{V}{2} + V = \frac{3}{2}V = \frac{3}{7}u$. Значит, время подъема до столкновения блоков $t \approx \frac{7h}{3u} = 7$ с (мы считаем, что $\Delta t << t$).

Работа, совершенная обезьянкой, – единственный источник увеличения механической энергии системы. Поэтому, пренебрегая возможными потерями, найдем, что эта работа пошла на увеличение кинетической энергии системы в процессе разгона и увеличение потенциальной энергии системы в поле тяжести Земли. Вычислим их. Увеличение кинетической энергии $E_K = \frac{(M+m)V^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{7}{6}M\left(\frac{2u}{7}\right)^2 = \frac{Mu^2}{21} = 1$ Дж. Двигаясь с одинаковыми скоростями, обезьянка и груз поднимутся на расстояние $s = \frac{2}{7}u\,t = \frac{2h}{3}$, поэтому увеличение потенциальной энергии системы $E_P = (M+m)gs = \frac{7}{9}Mgh \approx 480{,}2$ Дж (в расчете было использовано значение $g \approx 9{,}8$ м/с^2). Таким образом, работа $A = E_K + E_P = M\left[\dfrac{u^2}{21} + \dfrac{7gh}{9}\right] \approx 481{,}2$ Дж.

ОТВЕТ: масса груза $m = \dfrac{M}{6} = 3{,}5$ кг, время подъема $t \approx \dfrac{7h}{3u} = 7$ с, работа обезьянки $A = \dfrac{M(3u^2 + 49gh)}{63} \approx 481{,}2$ Дж.

Рассмотрены условия равновесия и найдены связи между весами груза и обезьянки и силами натяжения веревки	3
Найдена масса груза	2
Найдены связи между скоростями обезьянки, груза и верхнего подвижного блока	4
Найдено время подъема	3
Указано, что искомая работа связана с увеличением механической энергии системы и верно определены ее составляющие	2
Найдена работа	6
Максимальная оценка	**20**

ПРИМЕЧАНИЯ:

- при использовании другого значения ускорения свободного падения (например, $g \approx 10$ м/с^2, при котором $A = E_K + E_P = M\left[\dfrac{u^2}{21} + \dfrac{7gh}{9}\right] \approx 491$ Дж), баллы не снижаются;
- при потере кинетической энергии системы в вычислении работы снимается 2 балла.