ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» ПО ФИЗИКЕ.
2014/15 учебный год, МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА. 10 и 11 классы.

Задание состояло из двух частей: тестовое задание и основная часть.

Часть I: тестовое задание.

Эта часть представляла собой тестовое задание, индивидуальное для каждого участника, причем все варианты тестового задания были равнозначны. Один из вопросов требовал выбрать вариант ответа из предложенных, остальные требовали введения ответа. Несмотря на тестовый характер, задания этой части тоже были «олимпиадного» типа, но проверка этой части производилась автоматически. Ниже приводится в качестве примера один из вариантов с комментариями методической комиссии.

Вопрос 1 (5 баллов):

Комета массы m пересекла орбиту Нептуна со скоростью V, облетела Солнце (минимальное расстояние до него было равно r) и снова вернулась к орбите Нептуна. Считая, что орбита Нептуна – это окружность радиуса R, найдите работу силы тяготения Солнца над кометой за время ее полета внутри этой орбиты. Масса Солнца M, гравитационная постоянная G.

Варианты ответа:

а) $\frac{mV^2}{2}$

б) $\frac{GmM}{r}$

в) $\frac{GmM}{R}$

г) 0

д) $-\frac{GmM}{R}$

Правильный ответ: «г».

Комментарий: во всех вариантах вопрос сводился к вычислению работы потенциальных сил при перемещении тела между точками с одинаковым значением потенциальной энергии (в данном случае – если считать Солнце шаром со сферически-симметричным распределением масс, потенциальная энергия кометы в поле тяготения Солнца зависит только от расстояния от Солнца до кометы; поэтому в двух разных точках одной круговой орбиты ее величина одинакова). Такая работа всегда равна нулю.

Вопрос2 (6 баллов):

Небольшая шайба, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, проходит точку А в момент времени, принятый за $t = 0$. Далее до момента времени $t_1 = 5$ с на шайбу действует постоянная сила, сонаправленная со скоростью, и к этому моменту скорость шайбы увеличивается в три раза. В этот момент времени сила мгновенно изменяет свое направление на противоположное, оставаясь такой же по абсолютной величине. В какой момент времени t шайба вернется в точку А? Ответ запишите в секундах, округлив до десятых долей секунды.

Правильный ответ: 22,8.

Комментарий: Пусть v_0 - скорость шайбы в момент $t=0$, а координату x будем отсчитывать от точки А в направлении начального движения шайбы. Обозначим a постоянную величину ускорения шайбы. Тогда $v_0 + at_1 = 3v_0 \Rightarrow a = \frac{2v_0}{t_1}$. При этом $x(t_1) = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = 2v_0 t_1$, и закон движения шайбы при $t > t_1$ записывается так: $x(t) = 2v_0 t_1 + 3v_0(t-t_1) + \frac{a(t-t_1)^2}{2} = 2v_0 t_1 + 3v_0(t-t_1) + \frac{v_0(t-t_1)^2}{t_1}$. Тогда искомое время определяется из уравнения $x(t) = 0 \Rightarrow (t-t_1)^2 - 3t_1(t-t_1) - 2t_1^2 = 0$.Следовательно, $t = \frac{5+\sqrt{17}}{2} t_1 \approx 22{,}8$ с.

Вопрос3 (10 баллов):

Диаграмма процесса расширения постоянного количества гелия в координатах «давление-объем» есть прямая линия (1-2 на рисунке 1). В этом процессе гелий обменивается с внешним источником количеством теплоты $Q = 506$ Дж. Какое количество теплоты нужно отнять от гелия, чтобы вернуть его в исходное состояние посредством изобарного сжатия и изохорного нагревания (2-3-1)? Известно, что абсолютная температура гелия в точках 1 и 2 одинакова и $n = 1{,}2$ раза больше его температуры в точке 3. Ответ запишите по абсолютной величине, в Джоулях, округлив до целого значения.

Правильный ответ: 460.

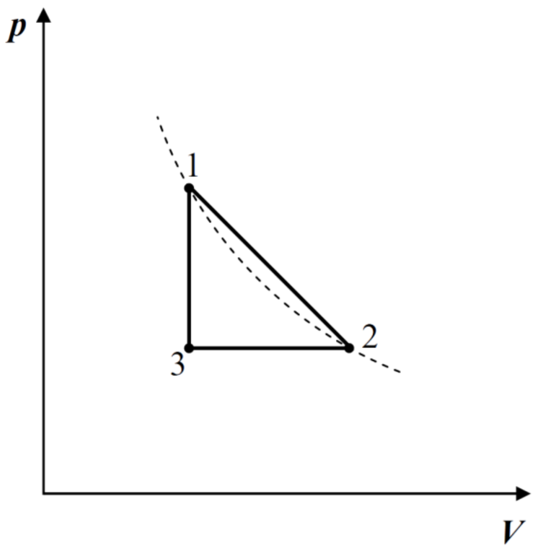


Рисунок 1.

Комментарий: в обоих процессах (1-2 и 2-3-1) начальная и конечная температуры совпадают, поэтому внутренняя энергия гелия не изменяется и количество теплоты равно работе гелия: $Q = Q_{12} = A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$, $Q' = Q_{231} = A_{23} = -p_2(V_2 - V_1)$ (как видно, в процессе 2-3-1 тепло действительно отводится от гелия). Следовательно, $|Q'| = \frac{2p_2}{p_1 + p_2} Q$.

Так как процесс 3-1 – изохорный, то $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_3} = n$, и $|Q'| = \frac{2}{n+1} Q = 460$ Дж.

Вопрос4 (8 баллов):

В схеме, показанной на рисунке 2, все резисторы имеют одинаковое сопротивление $R = 100$ Ом, ЭДС источника равна $E = 27$ В, а его внутреннее сопротивление $r = 16$ Ом. Каковы будут показания амперметра, если его внутреннее сопротивление $r' = 4$ Ом? Ответ запишите в миллиамперах, округлив до целого значения.

Правильный ответ: 225.

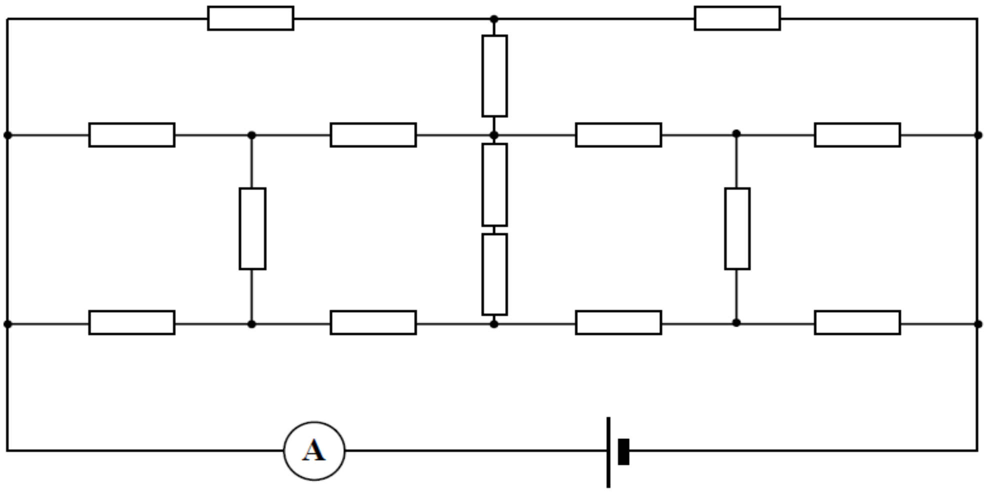
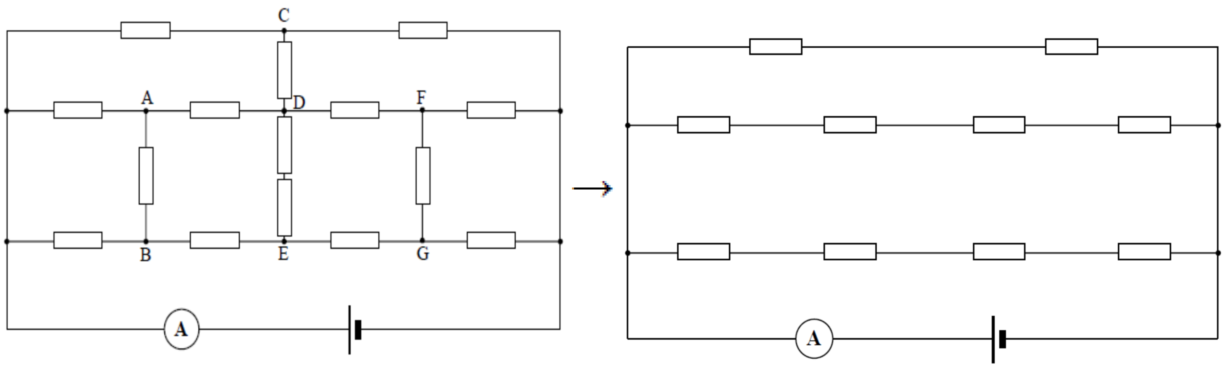


Рисунок 2.

Комментарий: В силу симметрии схемы потенциалы точек A и B, потенциалы точек C,D и E, потенциалы F и G равны. Поэтому ток по соединяющим их ветвям схемы не течет и их можно удалить их из схемы без изменения тока через амперметр. В результате получается существенно более простая схема, и ток легко вычисляется:



$R_{общ} = R$, и поэтому $I = \frac{E}{R + r + r'} = 225$ мА.

Максимальный балл за часть I: 29 балов.

Часть II. *«ПРИКЛЮЧЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАТОРА ТРУРЛЯ»*.

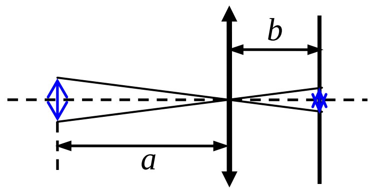
Задания этой части носили творческий характер и имели высокий уровень сложности. При проверке жюри обращало внимание в первую очередь на содержание решение и его соответствие предложенной участником модели рассматриваемого физического явления.

ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ.

1. («**Загадочная жидкость**») Однажды Трурль нашел емкость с неизвестной прозрачной жидкостью. Он взял синий светодиод и поместил его перед тонкой линзой таким образом, что светодиод светил строго по главной оси линзы. Диаметр выходного отверстия («глазка») светодиода $d = 2{,}4$ мм. Оказалось, что четкое изображение «глазка» светодиода на правильно размещенном экране имеет диаметр $d_1 = 1{,}2$ мм. Когда Трурль поместил светодиод и линзу в жидкость (не меняя относительного положения светодиода и линзы), то диаметр четкого изображения «глазка» стал $d_2 = 4{,}2$ мм (при новом положении экрана). Показатель преломления вещества линзы $n = 2{,}5$. Найдите показатель преломления жидкости.

Решение:

Поскольку изображение создавалось на экране, то оно было действительным, и поэтому ясно, что линза была собирающей. Соотношение поперечных размеров изображения и



предмета («поперечное увеличение») связано с расстоянием от линзы до предмета и до изображения: $\dfrac{d_1}{d} = |\Gamma| = \dfrac{b}{a}$. С другой стороны, по формуле тонкой линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F} \Rightarrow \dfrac{d_1}{d} = \dfrac{F}{a - F}$ (отметим, что изображение действительное при $a > F$). Из этого соотношения выражаем фокусное расстояние линзы в воздухе F : $F = \dfrac{ad_1}{d + d_1}$. Аналогичные рассуждения приводят нас к выражению для фокусного расстояния линзы в жидкости F' : $F' = \dfrac{ad_2}{d + d_2}$ (поскольку величина a не изменялась). Оптическая сила линзы $D = \dfrac{1}{F}$ пропорциональна отличию от 1 коэффициента преломления линзы относительно среды, поэтому:

$$\frac{D'}{D} = \frac{F}{F'} = \frac{\frac{n}{n_0} - 1}{n - 1} = \frac{n - n_0}{n_0(n-1)} = \frac{d_1(d + d_2)}{d_2(d + d_1)}$$

(здесь n_0 – показатель преломления жидкости). Из последнего уравнения легко выражается n_0 : $n_0 = \dfrac{d_2(d + d_1)}{d_2(d + d_1) + (n-1)d_1(d + d_2)} n = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$.

ОТВЕТ: $n_0 = \dfrac{d_2(d + d_1)}{d_2(d + d_1) + (n-1)d_1(d + d_2)} n = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Определен тип линзы	**1**

Записана связь увеличения с фокусным расстоянием (оптической силой) линзы и расстоянием до источника	**2**
Записана связь фокусного расстояния (оптической силы) линзы с показателем преломления среды	**2**
Получено правильное уравнение для определения n_0	**5**
Получен правильный ответ	**5**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**15**

2. («**Вариоконд**») Исследуя свойства синтезированного им диэлектрика, Трурль обнаружил, что его диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности электрического поля в нем, причем эта зависимость описывается формулой $\varepsilon = \frac{3}{2}\left[1 + \frac{E}{E_0}\right]$, где E_0 – некоторая константа. Тогда он взял два одинаковых воздушных плоских конденсатора с расстоянием между обкладками d, один из них зарядил до напряжения $U_0 = E_0 d$, а другой полностью заполнил диэлектриком. Затем Трурль соединил попарно обкладки конденсаторов проводами. Во сколько раз уменьшится заряд воздушного конденсатора за достаточно большое время после соединения?

Решение:

Пусть емкость воздушного конденсатора равна C_0. Тогда его начальный заряд $q_0 = C_0 U_0$. У конденсатора, заполненного диэлектриком, связь заряда с напряжением нелинейная: $q = C(U)U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon(U) S}{d} U = \frac{3}{2} C_0 \left(1 + \frac{U}{U_0}\right) U$ (здесь учтено, что $\frac{E}{E_0} = \frac{Ed}{E_0 d} = \frac{U}{U_0}$). За достаточно большое время после соединения напряжения на конденсаторах практически выровняются. Если заряд заполненного конденсатора при этом равен q, то воздушного - $q' = C_0 U_0 - q$, поэтому

$$U = \frac{q'}{C_0} = U_0 - \frac{q(U)}{C_0} = U_0 - \frac{3}{2} U \left(1 + \frac{U}{U_0}\right) \Rightarrow \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + \frac{5}{3}\frac{U}{U_0} - \frac{2}{3} = 0.$$

Ясно, что физический смысл имеет только положительный корень полученного квадратного уравнения $\frac{U}{U_0} = \frac{1}{3}$, и $q' = \frac{1}{3} C_0 U_0$ (отрицательный корень $\frac{U}{U_0} = -2$ соответствует случаю, когда конденсатор в процессе разрядки изменяет полярность пластин, и к тому же явно не согласуется с законом сохранения энергии). Значит, $\frac{q'}{q_0} = \frac{1}{3}$.

ОТВЕТ: в три раза.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Записана формула, связывающая заряд «вариоконда» с напряжением на нем	**5**
Из условия равновесия конденсаторов получено уравнение для конечного напряжения (либо заряда любого из конденсаторов, или другое эквивалентное уравнение)	**5**
Получен правильный ответ	**5**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**15**

3. («**Планета, которая гуляла сама по себе**») В одном из путешествий Трурль наткнулся на планету, которая, не вращаясь, двигалась равномерно (относительно центра Галактики) в межзвездном пространстве. Планета оказалась твердым шаром с ровной поверхностью и очень тонкой (по сравнению с радиусом планеты) атмосферой из гелия и аргона с относительной влажностью (по аргону) $\phi_0 = 60\,\%$. За счет медленного распада радиоактивных веществ в глубине планеты на ее поверхности и во всей атмосфере поддерживалась постоянная температура, превышающая 90 К. У Трурля был с собой прибор, позволяющий дистанционно регулировать скорость радиоактивного распада, и с помощью него он стал плавно уменьшать температуру поверхности планеты. Когда температура понизилась на $x_1 = 0{,}8\,\%$, на поверхности выпала роса. Опишите рост глубины аргонового океана на поверхности планеты при дальнейшем снижении температуры. На сколько процентов (от начальной) нужно еще снизить температуру поверхности, чтобы глубина океана стала равна половине от максимально возможной? В рассматриваемом диапазоне температур давление насыщенных паров аргона можно считать линейной функцией температуры, а тепловым расширением жидкого аргона можно пренебречь.

Решение:

Давление аргона на поверхность планеты определяется его весом, и поэтому является постоянным: $p_0 = \dfrac{mg}{S}$ (здесь m – масса аргона, g – ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты, S – площадь поверхности). Согласно условию, это давление $p_0 = \phi_0 \cdot p_H(T_0)$, где $p_H(T_0)$ – давление насыщенного пара аргона при начальной температуре. Для гелия указанные в условии температуры существенно выше критической, и он не конденсируется. Поэтому парциальное давление гелия просто добавляется к p_0, не влияя на начало конденсации аргона при охлаждении поверхности до температуры T_1, которая определяется из условия $p_0 = p_H(T_1)$. Запишем линейную зависимость давления насыщенных паров аргона от температуры в виде: $p_H(T) = \alpha + \beta T$. Тогда:

$$\left\{\begin{aligned} p_0 &= \phi_0(\alpha + \beta T_0) \\ p_0 &= \alpha + \beta T_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{p_0}{\phi_0}\left[1 - \frac{1-\phi_0}{x_1}\right] \\ \beta &= \frac{p_0}{\phi_0}\frac{1-\phi_0}{x_1 T_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_H(T) = \frac{p_0}{\phi_0 x_1}\left[\phi_0 + x_1 - 1 + (1-\phi_0)\frac{T}{T_0}\right].$$

После начала конденсации давление аргона на поверхность планеты остается прежним, но теперь оно складывается из давления слоя жидкого аргона глубиной h, которое равно $p_ж = \rho g h$ (ρ – плотность жидкого аргона, растворением гелия в жидком аргоне пренебрегаем) и давления насыщенных аргоновых паров над поверхностью планеты при новой температуре. Таким образом,

$$p_0 = \rho g h + \frac{p_0}{\phi_0 x_1}\left[\phi_0 + x_1 - 1 + (1-\phi_0)\frac{T}{T_0}\right] = \rho g h + \frac{p_0}{\phi_0 x_1}[x_1 - (1-\phi_0)x],$$

где введено обозначение $x \equiv \frac{T_0 - T}{T_0}$ (это относительное уменьшение температуры). Из этого уравнения находим, что $h(x) = \frac{p_0}{\rho g}\frac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\frac{x}{x_1} - 1\right)$. Как видно, при дальнейшем понижении температуры (то есть при $x > x_1$) глубина океана растет по линейному закону. Заметим также, что $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{m}{\rho S} = h_{\max}$ как раз и есть максимальная глубина аргонового океана, достигаемая в тот момент, когда весь аргон сконденсируется, и $h(x) = h_{\max}\frac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\frac{x}{x_1} - 1\right)$. Глубина океана равна половине максимальной при $\frac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\frac{x}{x_1} - 1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2-\phi_0}{2(1-\phi_0)}x_1 \equiv x_2$. Соответственно для достижения этой глубины нужно еще понизить температуру на $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\phi_0}{2(1-\phi_0)}x_1 = 0{,}6\%$.

ОТВЕТ: $h(x) = h_{\max}\frac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\frac{x}{x_1} - 1\right)$, где $x \equiv \frac{T_0 - T}{T_0}$, для достижения глубины океана, равной половине максимальной, нужно понизить температуру еще на $\Delta x = \frac{\phi_0}{2(1-\phi_0)}x_1 = 0{,}6\%$ от первоначальной.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1) Использование условия постоянства давления, равного $p_0 = \frac{mg}{S}$, очень важно – в условии сказано, что линейная зависимость для $p_H(T)$ может быть использована только «в рассматриваемом диапазоне температур», то есть на интервале $[T_2, T_0]$. Поэтому ее продолжение до температуры T_3, определяемой по пересечению прямолинейного графика с осью температур ($\alpha + \beta T_3 = 0 \Rightarrow T_3 = \frac{-\alpha}{\beta}$), недопустимо. Ясно, что такое «продолжение» графика «нефизично» - давление пара не может обращаться в ноль при ненулевой температуре. Таким образом, температура T_2 должна определяться именно из требования $m_c = \frac{m}{2}$, а не просто как $\frac{T_1 - \alpha/\beta}{2}$, несмотря на то, что в данном случае эти значения совпадают!
2) Использование предположения о «постоянстве объема атмосферы» не имеет под собой почвы – ни с точки зрения условия задачи, ни с точки зрения законов физики. «Тонкая» атмосфера над поверхностью столь «идеальной» планеты может быть достаточно равномерно прогрета, то есть можно считать, что в пределах нее не слишком сильно меняется абсолютная температура (тем более что на это есть явное указание в условии). Но при этом давление обязательно будет убывать с высотой, и определенной «верхней» границы у атмосферы вообще может не быть

(некоторые из участников даже использовали так называемую *барометрическую формулу* для описания зависимости давления от высоты). Но для решения это не нужно – достаточно понять, что в таких условиях конденсация всегда будет происходить в нижнем слое атмосферы, на границе с поверхностью планеты (в начале) или океана (затем). Тогда мы можем просто использовать (как это сделано в предложенном выше решении) условие, что при каждой температуре давление аргона над поверхностью океана равно давлению насыщенного пара.

3) Как известно, у аргона разница температур плавления и кипения очень мала – при давлениях, не слишком сильно отличающихся от нормального, она составляет примерно (3 – 4)% от температуры кипения. Но это заметно больше, чем найденное Δx, так что замерзания аргона в опыте Трурля не происходило.
4) Некоторые участники, не обратив внимание на слово «еще» в условии, вместо Δx находили $x_2 = \frac{2-\phi_0}{2(1-\phi_0)} x_1 = 1{,}4\%$. В случае, если эта величина была четко определена в работе, такой ответ тоже считался правильным.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Правильно описаны физические процессы в атмосфере, происходящие при охлаждении планеты	**2**
Указана связь давления аргона с его весом и обосновано постоянство давления	**2**
Найден вид зависимости давления насыщенных паров аргона от температуры (или от x) с учетом заданных в условии величин (ϕ_0 и x_1)	**4**
Записано уравнение для давления на поверхность планеты после начала конденсации, содержащее h	**4**
Найдена зависимость глубины океана от относительного понижения температуры	**4**
Получена аналитическая формула и найдено численное значение Δx	**4**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**20**

4. («**Несвободное падение**») Как-то Трурль раздобыл высокоскоростную видеокамеру и точные электронные весы. Тогда он взял маленький шарик, и измерил его массу. Она оказалась равна $m = (0{,}36 \pm 0{,}01)$ г. Затем экспериментатор стал снимать падение шарика с разных высот h и, используя специальную программу, определять скорость шарика перед ударом о землю V и время падения t. В результате у него получилась следующая таблица (все величины измерены с точностью до единицы последнего указанного разряда):

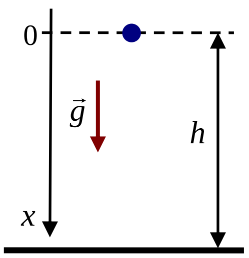
h, м	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
V, м/с	4,21	5,83	7,03	8,00	8,84	9,56	10,22
t, с	0,463	0,662	0,818	0,951	1,070	1,178	1,279

8,00	9,00	10,00	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00
10,82	11,37	11,88	12,35	12,80	13,22	13,61	13,98
1,374	1,465	1,551	1,633	1,713	1,790	1,865	1,938

Кроме того, из геофизических данных он нашел, что ускорение свободного падения в районе измерений $g = (9{,}81 \pm 0{,}01)$ м/с^2. Предложите физическую модель, описывающую падение шарика и согласующуюся с измерениями Трурля с ошибкой не более 5%. Ваша модель должна описывать действующие на шарик силы с такой же точностью, причем уровень точности должен быть указан явно и обоснован.

Решение:

Из значений скорости и времени падения, которые заметно отличаются от $\sqrt{2gh}$ и $\sqrt{\frac{2h}{g}}$, очевидно, что падение действительно не является свободным – логично предположить наличие силы сопротивления воздуха (так как шарик по условию маленький, будем считать архимедову силу пренебрежимо малой). Для описания этой силы можно пробовать разные модели, но наиболее широко используются модели, в которых эта сила линейна или квадратична по скорости тела относительно воздуха. Для выбранной модели необходимо получить связь между измеренными величинами и сравнить ее предсказания с результатами измерений. Рассмотрим линейную модель, то есть будем описывать силу сопротивления формулой $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, где $\vec{v}$ - скорость тела (отметим, что для квадратичной модели соответствие между моделью и измерениями оказывается хуже, да и вычисления в ней заметно сложнее, чем в линейной). Направим ось x вертикально вниз, совместив начало отсчета с начальной точкой падения шарика, и запишем уравнение движения в проекции на эту ось:



$$m\frac{dv_x}{dt} = mg - \alpha v_x \Rightarrow dv_x = g\,dt - \frac{\alpha}{m}v_x dt = g\,dt - \frac{\alpha}{m}dx.$$

Мы получили соотношение между малыми изменениями скорости, времени и координаты. Просуммировав эти изменения от начала падения шарика до удара его о землю, получим: $\sum dv_x = V - 0 = V$, $\sum dt = T$, $\sum dx = h - 0 = h$. Таким образом, связь измеренных в эксперименте величин в рамках этой модели должна выглядеть так: $V = gT - \frac{\alpha}{m}h$. Проверку модели можно провести следующим образом: если она справедлива, то величина $\frac{gT - V}{h} = \frac{\alpha}{m} = const$. Вычислив значения этой комбинации, получим (например, с помощью таблицы Excel см. первые четыре столбца):

h, м	V, м/с	T, с	α/m, 1/с	VT, м/с	ΔV, м/с	hT, м	Δh, м
1	4,21	0,463	0,3320	4,2092	0,0253	0,9995	0,0060
2	5,83	0,662	0,3321	5,8282	0,0350	2,0000	0,0120
3	7,03	0,818	0,3315	7,0245	0,0422	3,0033	0,0180
4	8	0,951	0,3323	7,9964	0,0480	4,0027	0,0240
5	8,84	1,07	0,3313	8,8303	0,0530	5,0042	0,0301
6	9,56	1,178	0,3327	9,5590	0,0574	5,9974	0,0360
7	10,22	1,279	0,3324	10,2172	0,0614	6,9963	0,0420
8	10,82	1,374	0,3324	10,8164	0,0650	7,9956	0,0480
9	11,37	1,465	0,3335	11,3729	0,0683	9,0053	0,0541
10	11,88	1,551	0,3335	11,8835	0,0714	10,0054	0,0601
11	12,35	1,633	0,3336	12,3569	0,0742	10,9994	0,0661
12	12,8	1,713	0,3337	12,8065	0,0769	12,0060	0,0721
13	13,22	1,79	0,3338	13,2281	0,0794	13,0084	0,0781
14	13,61	1,865	0,3347	13,6285	0,0819	14,0156	0,0842
15	13,98	1,938	0,3355	14,0087	0,0841	15,0244	0,0902

Как видно, разброс значений «константы» получается заметно меньше 5% (и даже меньше 1%): взяв в качестве значения для этой величины среднее из полученных, находим, что $\frac{\alpha}{m} = (0{,}3330 \pm 0{,}0025)\,c^{-1}$. Отметим, что эта точность лишь немногим хуже точности, с которой известны входящие в формулу для $\frac{\alpha}{m}$ величины. Таким образом, модель с линейной по скорости силой сопротивления воздуха описывает экспериментальные данные с требуемой точностью. Более серьезную проверку для модели можно осуществить, если вычислить *теоретические значения* высоты и скорости падения по времени падения. Для этого необходимо выйти за рамки школьной программы: можно убедиться, что из уравнения для зависимости скорости от времени $\frac{dv_x}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v_x$ следует, что $v_x(t) = \frac{mg}{\alpha} + C\cdot\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$. Так как $v_x(0) = \frac{mg}{\alpha} + C = 0$, то $C = -\frac{mg}{\alpha}$, и поэтому в рамках принятой модели связь скорости и времени падения описывается формулой $V(t) = \frac{mg}{\alpha}\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right]$. Интегрирование этого выражения дает и связь высоты с временем падения: $h(t) = \int_0^t v_x dt = \frac{m^2 g}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha}{m}t + \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) - 1\right]$. Подставляя в эти формулы найденное значение $\frac{\alpha}{m} = (0{,}3330 \pm 0{,}0025)\,c^{-1}$ и заданное значение $g = (9{,}81 \pm 0{,}01)$ м/с^2, для каждого t находим V и h, а также возможный разброс их значений $V_T \pm \Delta V$, $h_T \pm \Delta h$ (5-8 столбцы таблицы). Как видно, <u>все</u> экспериментальные значения находятся <u>внутри</u> интервалов для теоретических значений, поэтому модель действительно <u>описывает</u> экспериментальные данные.

Чтобы записать выражение для силы, нужно вычислить коэффициент $\alpha = \frac{\alpha}{m}m \approx 0{,}333\,c^{-1}\cdot 0{,}36\,г \approx 1{,}20\cdot 10^{-4}\,кг/c$. Поскольку измерение массы – самое неточное (ошибка около 3%), то величину силы мы описываем с меньшей точностью, но все равно лучше 5%: $\alpha = (1{,}20 \pm 0{,}04)\cdot 10^{-4}\,кг/c$.

ОТВЕТ: экспериментальные данные описываются с требуемой точностью в рамках модели, в которой шарик движется под действием сил тяжести $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (m и $\vec{g}$ заданы в условии) и силы сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, где $\alpha = (1{,}20 \pm 0{,}04)\cdot 10^{-4}\,кг/c$.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1) Разобранная в предлагаемом решении модель – не единственная «правильная». Более того, можно построить модели, в которых точность описания скоростей и перемещений будет даже выше – например, можно использовать более сложные модельные формулы для силы сопротивления воздуха. В частности, можно предложить, что $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v} - \beta v\vec{v}$, или $\vec{F}_c = -\alpha v^{\gamma}\vec{v}$. Поскольку в этих выражениях два «подбираемых» параметра, то они могут описать реальную зависимость точнее, чем в разобранном примере. Недостаток этих моделей в том, что они заметно сложнее для анализа, особенно в части используемых математических методов. Итак, «правильным»

считалось не решение, совпадающее с предложенным выше, а решение, в котором предложенная модель была правильно проанализирована и было доказано, что уровень точности удовлетворяет требованиям условия. Отметим, что из-за достаточно высокой ошибки в определении массы (а ее значение всегда необходимо для вычисления сил по наблюдаемым ускорениям), точность описания кинематических величин должна быть лучше 5%.

2) Модель должна быть именно физической, а не математической, то есть в ней должна быть указана природа сил и объяснено их поведение. Так как по условию опыт Трурля по изучению падения шарика происходил на Земле (обратите внимание на слова «из геофизических данных» в условии задачи), то весьма нелогично было учитывать в модели какие-либо «экзотические» силы неземного происхождения и при этом не учитывать ту же силу сопротивления воздуха. Нефизично считать, что такая сила будет зависеть от высоты над поверхностью Земли из-за неоднородности воздуха (в диапазоне высот до 15 метров!) и при этом не учитывать ее зависимости от мгновенной скорости тела относительно среды – именно от скорости в первую очередь должна зависеть сила сопротивления движению тела в газообразной среде. Не является физической модель, в которой дополнительной силе – независимо от ее предполагаемой природы – в каждый момент времени падения просто приписывается значение, которое при ее действии совместно с силой тяжести отвечает в точности наблюдаемому ускорению. В такой «модели» сила зависит от времени, причем вид описывающей ее поведение функции каждый раз зависит от начальной высоты тела.

3) В условии были описаны действия экспериментатора, поэтому при составлении модели не следовало предполагать, что автор задачи «скрыл» часть этих действий. Дополнительные факторы (кроме заданной в условии силы тяжести), учитываемые в модели, должны были быть естественного, а не «искусственного» происхождения. Например, можно было считать шарик проводящим и учитывать действие на него электрического поля Земли (которая действительно обладает зарядом и создает такое поле), но нельзя было предполагать, что экспериментатор «специально», для «запутывания» участников олимпиады, создавал дополнительное силовое поле да еще изменял его во время падения шарика по какому-либо довольно сложному закону. Нельзя было считать, что экспериментатор бросал шарик с ненулевыми скоростями, не вдоль вертикали и т.д. Если допустить такие возможности, можно без труда «объяснить» вообще все, что угодно.

4) В разобранном решении анализ модели был проведен на основе математического вывода из уравнения движения соотношений между измеренными величинами. Затем с помощью этих соотношений определялись входящие в модельные выражения для сил константы. Но это тоже не единственно правильный путь! Можно было построить анализ следующим образом. Например, сначала предположить, что на шарик действовала сила сопротивления, зависящая от скорости. Затем из уравнения движения выразить эту силу через мгновенные значения ускорения и скорости: $F_c(v) = m(g - a_x)$. После этого из экспериментальных данных найти максимальное количество точек графика этой зависимости. Для этого следует рассмотреть таблицу данных как таблицу значений скорости от времени в ходе одного падения с высоты 15 м. Тогда среднее на каждом интервале времени значение ускорения $\bar{a}_i = \dfrac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$ можно поставить в

соответствие средней скорости $\bar{v}_i = \frac{v_{i+1} + v_i}{2}$. Так находится 14 точек графика: $F_c(\bar{v}) = m(g - \bar{a})$. Если ввести естественное предположение, что на покоящееся по отношению к воздуху тело сила сопротивления не действует, то есть $F_c(0) = 0$, то появляется и 15-я точка. Дальше нужно через эти 15 точек (с учетом «разброса» значений скорости и ускорения) провести график модельной зависимости наилучшим образом. Конечно, в этом методе точность определения констант будет заметно ниже (в основном из-за того, что замена мгновенных значений ускорения и скорости на средние вносит довольно значительную ошибку), но при аккуратном исполнении можно обеспечить требуемую точность – например, с зависимостью $F_c(v) = \alpha v$, в которой коэффициент α подбирается так, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений экспериментальных точек от теоретической кривой, то есть $S(\alpha) = \sum_i [m(g - \bar{a}_i) - \alpha \bar{v}_i]^2$ (такой метод называется «*методом наименьших квадратов*»).

Отметим, что среди участников были как те, кто действовал методом, описанным в примерном решении, так и те, кто использовал метод из примечания 4, и даже те, кто использовал более сложные зависимости $F_c(v)$.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ:

Отмечено, что необходим учет силы сопротивления воздуха	**1**
Предложена модель (модели), в которой сила сопротивления зависит от скорости и проведен анализ	**2**
Предложен «работоспособный» метод проверки модели	**4**
Произведена проверка, подтвердившая справедливость модели в рамках требуемой точности	**5**
Определены все параметры модели	**4**
Корректно вычислена точность определения параметров модели	**5**
МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	**21**

Максимальный балл за часть II: 71 балл.

Максимальный балл за работу отборочного этапа: 100 баллов.