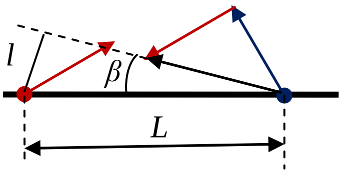
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» ПО ФИЗИКЕ.
2012/13 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 10 и 11 классы.

1. («Артиллерийская дуэль на Луне»: **10**) Два орудия, установленных на плоском горизонтальном участке лунной поверхности на расстоянии $L = 3535$ м, одновременно произвели выстрелы друг по другу. Снаряды вылетели из жерл орудий с одинаковыми скоростями, причем оба снаряда попали точно в цель, а минимальное расстояние между ними в процессе полета равнялось $l = 500$ м. Найти скорость вылета снарядов. Ответ запишите в м/с, округлив до целого значения. Ускорение свободного падения на Луне принять равным $g \approx 1{,}6$ м/с^2.

Решение:

Поскольку оба снаряда попали точно в цель, то дальность их полета одинакова и равна L. Так как на Луне нет атмосферы, то используем формулу для дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту: $L = \frac{v_1^2}{g}\sin(2\alpha_1) = \frac{v_2^2}{g}\sin(2\alpha_2)$. Поскольку скорости вылета снарядов одинаковы: $v_1 = v_2 \equiv v$, то $\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2)$, откуда $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$ (для определенности считаем «вторым» больший угол: заметим, что углы вылета не могут быть равны, иначе снаряды столкнутся). Для изучения относительного движения снарядов перейдем в систему отсчета, связанную с первым снарядом. В ней первый снаряд покоится, а второй движется равномерно-прямолинейно (относительное ускорение снарядов очевидно равно нулю!). Скорость этого движения можно определить по начальному моменту времени: скорость второго снаряда относительно первого $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, и поэтому,



построив треугольник векторов скоростей, можно заметить: этот треугольник прямоугольный равнобедренный, поэтому острые углы в нем по 45°, и угол наклона $\vec{v}_2'$ к горизонту $\beta = \alpha_2 - \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(\frac{l}{L}\right)$.

Следовательно, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{l}{L}\right)$, и $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{l}{L}\right)$. Таким образом,

$$v^2 = \frac{gL}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - 2\beta\right]} = \frac{gL}{\cos(2\beta)} = \frac{gL}{1 - 2\sin^2(\beta)} = \frac{gL^3}{L^2 - 2l^2} \Rightarrow v = L\sqrt{\frac{gL}{L^2 - 2l^2}} \approx 77 \text{ м/с.}$$

ОТВЕТ: 77.

2. («Теплообменник»: **10**) В теплоизолированном цилиндрическом вертикальном сосуде объемом $V = 2$ л содержится $V_1 = 1$ л воды с температурой $t_1 = 40^0 C$. На середине высоты из этого сосуда выведена тонкая трубка с краном. В другом теплоизолированном сосуде содержится $V_2 = 1$ л воды с температурой $t_2 = 67^0 C$. Для подогрева воды в первом сосуде можно n раз медленно доливать в него воду из второго сосуда и сливать часть воды через кран (не наклоняя первый сосуд). Какой максимальной температуры воды в первом сосуде можно достичь таким образом при $n = 2$? Ответ запишите в градусах по шкале Цельсия, округлив до целого значения.

Решение:

Ясно, что для достижения максимальной температуры надо использовать всю «горячую» воду и сливать максимальное количество «холодной». Пусть в первый раз мы доливаем $x \cdot V_2$ «горячей» воды. Тогда после этого температура смеси, образовавшейся в первом сосуде (с учетом того, что $V_1 = V_2$)

$$t_1' = \frac{t_1 \cdot V_1 + t_2 \cdot xV_2}{V_1 + xV_2} = \frac{t_1 + x t_2}{1 + x}.$$

После этого надо слить воду до уровня трубочки (объем воды снова уменьшится до 1 *л* – именно для этого в условии присутствуют слова «цилиндрическом вертикальном», «на середине высоты», «тонкая» и введен запрет на наклон сосуда) и долить оставшуюся «горячую» воду (объем $(1-x)\cdot V_2$). Конечная температура воды в первом сосуде

$$t_1''=\frac{1}{1+1-x}\left[\frac{t_1+xt_2}{1+x}+(1-x)t_2\right]=\frac{t_1+(1+x-x^2)t_2}{(1+x)(2-x)}=t_2-\frac{\Delta t}{(1+x)(2-x)}, \qquad (1)$$

где введено обозначение

$$\Delta t\equiv t_2-t_1.$$

Нетрудно заметить, что максимум t_1'' достигается при значении x, отвечающем максимуму знаменателя дроби, содержащей Δt, то есть максимуму

$$y(x)=(1+x)(2-x), \quad x\in[0,1].$$

Положение вершины этой параболы легко находится:

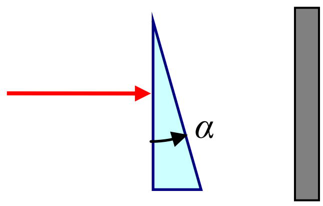
$$x_0=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, максимальная достижимая температура

$$t_{\max}=t_2-\frac{4}{9}\Delta t=55^0C.$$

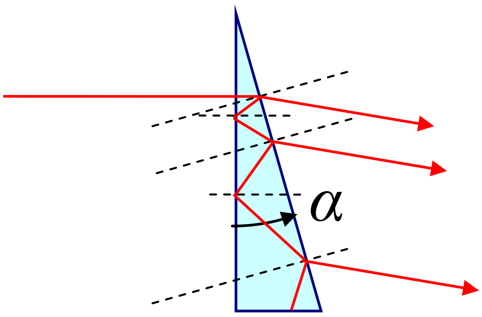
ОТВЕТ: 55.

3. («Солнечные зайчики»: **10**) Клин с преломляющим углом $\alpha=7°$ изготовлен из стекла с показателем преломления $n=1{,}6$. Перпендикулярно одной из граней клина падает узкий пучок параллельных световых лучей. За клином поставлен экран. Сколько светлых пятен будет видно на экране?



Решение:

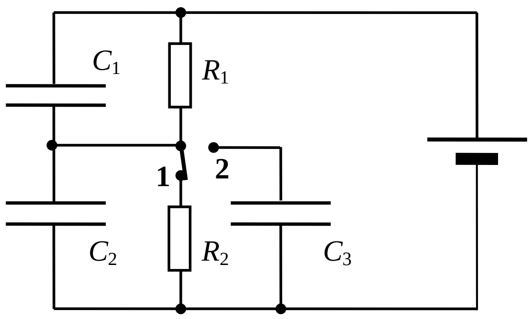
При нормальном падении луч не преломляется, и угол падения при первом падении этого луча на «заднюю» поверхность клина $\alpha_1=\alpha$. При этом луч частично преломится и выйдет из призмы, частично отразится и в следующий раз упадет на «переднюю» поверхность, где тоже будет отраженный луч и так далее. Из построения видно, что при каждом следующем падении угол падения увеличивается на α: $\alpha_n=n\cdot\alpha$, и нечетные падения на «заднюю» грань могут давать преломленные лучи, которые и образуют светлые пятна на экране (см. рисунок). Преломленные лучи исчезнут, когда угол падения на «заднюю» грань станет больше угла полного внутреннего отражения: $\sin(\alpha_c)=\frac{1}{n}\Rightarrow\alpha_c=\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\approx 38{,}7°$.



Как видно, $\alpha_5=35°=<\alpha_c<\alpha_7=49°$, то есть выйдут только три преломленных луча ($\alpha_1=\alpha$, $\alpha_3=3\alpha$ и $\alpha_5=5\alpha$), а при четвертом падении на «заднюю» грань луч испытает полное внутреннее отражение.

ОТВЕТ: 3.

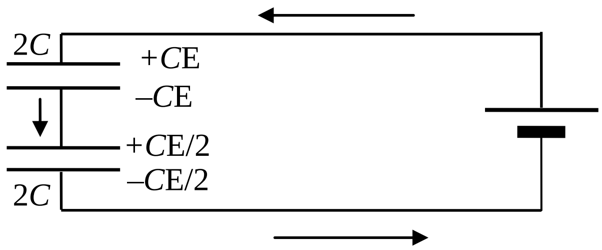
4. («От PRESTISSIMO до ADAGIO»: **11**) В схеме, показанной на рисунке, переключатель достаточно долго находился в положении 1. Какое количество теплоты выделится в резисторе $R_1=R$ после перевода переключателя в положение 2? ЭДС источника $\mathrm{E}=24$ В, емкости конденсаторов $C_2=C_3\equiv C=200$ мкФ, $C_1=2C=400$ мкФ, $R_2=R$, сопротивление соединительных проводов и внутреннее сопротивление источника пренебрежимо малы по сравнению с R. Ответ записать в мДж, округлив до целого значения.



Решение:

Пока ключ переключателя находился в положении 1, по контуру, состоящему из источника и двух резисторов, тек постоянный ток $I = \frac{E}{2R}$, конденсаторы $C_{1,2}$ были подключены к участкам с разностью потенциалов $U = IR = \frac{E}{2}$, и были заряжены до зарядов $q_1 = C_1\frac{E}{2} = CE$ и $q_2 = C_2\frac{E}{2} = \frac{CE}{2}$. После перевода ключа в положение 2 начинается перезарядка образовавшейся батареи конденсаторов. Следует сразу заметить, что эту перезарядку можно разделить на две стадии:

а) «очень быстрая - PRESTISSIMO»: за времена, много меньшие постоянной времени разрядки C_1 через R_1 $\tau_1 = 2CR$, через резистор R_1 заряд протечь не успевает, зато по проводам с очень малым сопротивлением успевают протечь заряды в ходе дозарядки батареи из трех конденсаторов. Заметим, что в этой батарее соединенные параллельно C_2 и C_3 эквивалентны конденсатору емкостью $C_{23} = 2C$ (между ними заряд этой емкости распределяется поровну). Рассмотрим эту стадию:



На рисунке показаны начальные заряды конденсаторов и направление движения зарядов. Заряды перемещаются до того момента, когда сумма напряжений на конденсаторах станет равна ЭДС:

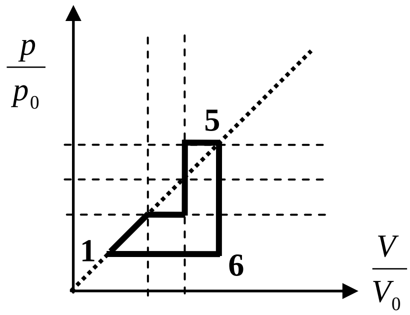
$$\frac{CE + \Delta q}{2C} + \frac{(CE/2) + \Delta q}{2C} = E.$$

Из этого условия находим перемещенный заряд: $\Delta q = \frac{1}{4}CE$. Следовательно, после «очень быстрой» стадии заряд конденсатора C_1 станет равен $q_1' = \frac{5}{4}CE$, а заряд конденсатора, образованного C_2 и C_3 – $q_{23}' = \frac{3}{4}CE$. На этой стадии источник совершает работу, энергия теряется за счет выделения джоулева тепла в подводящих проводах и на внутреннем сопротивлении источника, возможно (если процессы уж очень быстрые) и за счет излучения электромагнитных волн, но совершенно ясно, что в резисторе R_1 на этой стадии тепло практически не выделяется!

б) «медленная – ADAGIO»: на временах порядка $\tau_1 = 2CR$ через резистор R_1 протекают заряды в ходе полной разрядки закороченного этим резистором конденсатора C_1 ($q_1'' = 0$) и дозарядки C_{23} до напряжения, равного ЭДС ($q_{23}'' = 2CE$). На этой стадии источник перемещает заряд $2CE - \frac{3}{4}CE = \frac{5}{4}CE$, совершая работу $A = \frac{5}{4}CE^2$. Изменение энергии конденсаторов $\Delta E_C = \frac{(2CE)^2}{4C} - \frac{(5CE/4)^2}{4C} - \frac{(3CE/4)^2}{4C} = \frac{15}{32}CE^2$. Потерянная энергия – это и есть тепло, выделившееся в резисторе R_1: $Q_1 = A - \Delta E_C = \frac{25}{32}CE^2$. Отметим, что этот ответ можно получить и другим способом: если заметить, что в начале «медленной» стадии напряжение на резисторе R_1 равно $U_0 = \frac{5}{8}E$, в конце оно падает до нуля, линейно уменьшаясь по мере протекания заряда, а полный протекший заряд (складывающийся из начального заряда C_1 и заряда, перемещенного источником) $q = \frac{5}{2}CE$, то можно посчитать работу электростатических сил по перемещению заряда через резистор, равную выделившемуся количеству теплоты: $Q_1 = \frac{U_0 + 0}{2}\cdot q = \frac{25}{32}CE^2$. Итак, $Q_1 = \frac{25}{32}CE^2 = 0{,}09$ Дж.

ОТВЕТ: 90.

5. («Термодинамический сапог»: **10**) Диаграмма цикла постоянного количества идеального одноатомного газа, являющегося рабочим телом тепловой машины, в координатах $p-V$ имеет форму «сапога» (см. рисунок). Известно, что линия 1-5 в выбранном масштабе – биссектриса координатного квадранта, а максимальная и минимальная температура газа в цикле отличаются в 16 раз. Найдите КПД этого цикла. Ответ приведите в процентах.



Решение:

В соответствии с уравнением состояния идеального газа, его температура пропорциональна произведению давления на объем: $T=\dfrac{pV}{\nu R}$. Поэтому минимальная температура в цикле соответствует точке 1, а максимальная – точке 5. Значит, $\dfrac{p_5V_5}{p_1V_1}=\dfrac{T_5}{T_1}=16$. Кроме того, как видно из диаграммы, эти точки лежат на прямой, проходящей через начало координат, и $\dfrac{p_5}{p_1}=\dfrac{V_5}{V_1}\Rightarrow p_5=4p_1, V_5=4V_1$. Работа цикла вычисляется как площадь цикла (видно, что «сапог» без изменения площади можно преобразовать в прямоугольный треугольник):

$$A=\frac{1}{2}(p_5-p_1)(V_5-V_1)=\frac{9}{2}p_1V_1.$$

Для нашего цикла удобнее вычислять не теплоту нагревателя, а теплоту холодильника, так как рабочее тело отдает тепло только в изохорическом процессе 5-6 и изобарическом 6-1: $Q_X=-Q_{56}-Q_{61}$. С учетом величин теплоемкостей одноатомного идеального газа в таких процессах и используя уравнение состояния, получим:

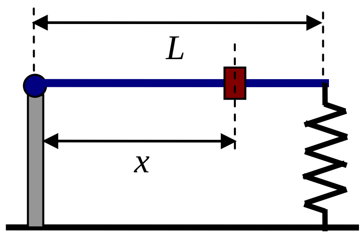
$$Q_X=\frac{3}{2}\nu R(T_5-T_6)+\frac{5}{2}\nu R(T_6-T_1)=\frac{3}{2}V_5(p_5-p_1)+\frac{5}{2}p_1(V_5-V_1)=\frac{51}{2}p_1V_1.$$

Следовательно, КПД цикла

$$\eta=\frac{A}{A+Q_X}=\frac{9}{9+51}=0{,}15.$$

ОТВЕТ: 15.

6. («Покачаемся?»: **11**) Один любознательный школьник построил у себя во дворе установку для изучения колебаний (см. рисунок). Легкая штанга длиной $L=1{,}5$ м левым концом закреплена в шарнире, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, а правым опирается на пружину жесткостью $k=800$ Н/м. На штанге закрепляется небольшой по размерам груз массой $m=18$ кг, причем положение пружины регулируется так, что при любом размещении груза на штанге (то есть при любом x) в положении равновесия штанга горизонтальна. Школьник исследовал зависимость периода малых колебаний штанги с грузом от величины x. Определите разность периодов колебаний $\Delta T\equiv T_1-T_2$, если $x_1=1$ м, а $x_2=0{,}5$ м. Ответ приведите в миллисекундах, округлив до целого значения.



Решение:

В положении равновесия моменты сил упругости пружины и силы тяжести груза компенсируют друг друга. При малом смещении груза (можно считать, что он смещается по вертикали) на расстояние y, дополнительная к равновесной деформация пружины составит $\Delta l=\dfrac{L}{x}y$. Значит,

$\Delta F_{упр} = -k\dfrac{L}{x}y$. Суммарный момент сил относительно шарнира, действующий на штангу равен нулю т.к. штанга невесома. Поэтому на груз будет действовать сила $F = \dfrac{L}{x}\Delta F_{упр} = -k\left(\dfrac{L}{x}\right)^2 y$. Таким образом, уравнение малых вертикальных движений груза $my'' = -k\left(\dfrac{L}{x}\right)^2 y$ (штрихами обозначены производные по времени) является уравнением гармонических колебаний: $y'' + \left(\dfrac{L}{x}\right)^2 \dfrac{k}{m} y = 0$, циклическая частота которых $\omega = \dfrac{L}{x}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Период колебаний зависит от положения груза $T(x) = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\dfrac{x}{L}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. В итоге находим:

$$\Delta T = T(x_1) - T(x_2) = 2\pi\frac{x_1 - x_2}{L}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}314 \text{ с.}$$

Отметим, что эту задачу также можно решать из энергетических соображений: при малых смещениях груза по вертикали кинетическая энергия системы $E_K = \dfrac{my'^2}{2}$, а потенциальная энергия (договоримся отсчитывать ее от значения в положении равновесия)

$$U(y) = mgy + \frac{k(\Delta l_0 + \Delta l)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_0)^2}{2} = \left(\frac{L}{x}\right)^2 \frac{ky^2}{2}$$

(здесь $\Delta l_0 = -\dfrac{x}{L}\dfrac{mg}{k}$ - деформация пружины в положении равновесия). Квадратичность этих выражений указывает на то, что малые колебания являются гармоническими, и поэтому максимальные значения этих энергий совпадают, а $y'_{\max} = \omega \cdot y_{\max}$. Поэтому

$$\frac{my'^2_{\max}}{2} = \left(\frac{L}{x}\right)^2 \frac{ky^2_{\max}}{2} \Rightarrow \omega^2 y^2_{\max} = \left(\frac{L}{x}\right)^2 \frac{k}{m} y^2_{\max} \Rightarrow \omega = \frac{L}{x}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T(x) = 2\pi\frac{x}{L}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

ОТВЕТ: 314.

7. («Нарушение покоя»: **11**) Тонкая прямая однородная палочка покоится на горизонтальной поверхности. Если действовать на эту палочку силой, направленной строго вдоль нее, то она начнет двигаться, если величина этой силы достигнет $F_1 = 2{,}4$ Н. Чему равна минимальная сила, способная заставить палочку прийти в движение? Дайте последовательно ответы для трех значений коэффициента трения палочки о поверхность: $\mu_1 = 0{,}4$, $\mu_2 = 0{,}8$ и $\mu_3 = 1{,}6$. Ответы записать в Ньютонах, округлив до сотых.

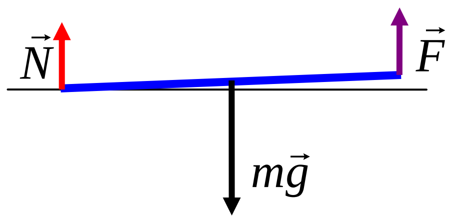
Решение:

Сразу следует подчеркнуть, что эта задача по уровню решения резко выделяется на фоне всех остальных: фактически ее решение – это исследование, требующее от участника наличия физической интуиции, хороших технических навыков в рамках программ профильного уровня и творческого подхода. Прежде всего надо перечислить возможные способы нарушения равновесия палочки. Могут иметь место:

I) отрыв палочки от поверхности,
II) продольное скольжение палочки по поверхности,
III) поперечное скольжение палочки по поверхности (сопровождающееся поворотом).

Для каждого из способов минимальная величина необходимой для начала движения силы вычисляется отдельно. Заметим, что заданная в условии величина силы очевидно равна $F_1 = \mu mg$ (m - масса палочки). Обозначим длину палочки символом L.

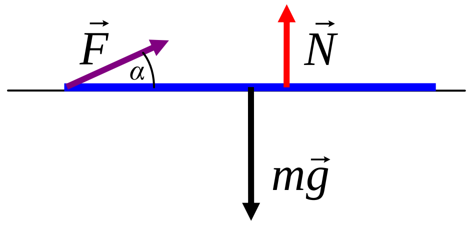
Для (I): ясно, что для обеспечения максимального момента надо тянуть палочку вертикально вверх за один из концов. В момент отрыва палочка опирается на поверхность только в одной точке (противоположны концом), и суммарный момент силы $\vec{F}$ и силы тяжести приводит ее во вращение вокруг этой точки при любом сколь угодно малом увеличении $|\vec{F}|$:



$$F \cdot L - mg \cdot \frac{L}{2} > 0 \Rightarrow F_I = \frac{mg}{2} = \frac{F_1}{2\mu}.$$

Следовательно, для этого способа нарушения равновесия минимальные величины сдвигающих сил для трех заданных значений коэффициента трения равны соответственно 3Н, 1,5 Н и 0,75 Н.

Для (II): важно догадаться, что минимум силы может быть достигнут, если действовать на палочку «продольной» (то есть лежащей в вертикальной плоскости, проходящей через палочку) силой, направленной под углом α к горизонту. В этом случае из условий равновесия находим для «критической» ситуации:



$$\begin{cases} F\cos\alpha = F_{mp} = \mu N \\ F\sin\alpha + N = mg \end{cases} \Rightarrow F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

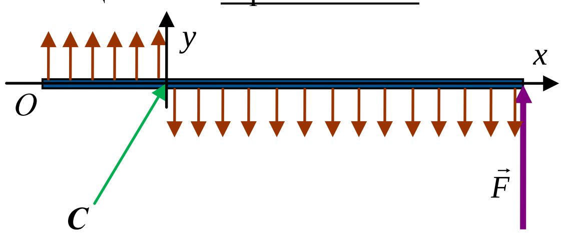
Для определения минимального значения силы определим угол α_0, для которого $\sin(\alpha_0) = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\cos(\alpha_0) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$

(то есть $\alpha_0 = arctg(\mu)$). Тогда

$$F = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}[\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha_0) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha_0)]} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{1}{\cos(\alpha-\alpha_0)}$$

и хорошо заметно, что минимум достигается при $\alpha = \alpha_0$. Значит, $F_{II} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{F_1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, и для заданных значений коэффициента трения $F_{II} \approx$ 2,23Н, 1,87Н и 1,27 Н соответственно.

Для (III): этот случай наиболее сложен для исследования, поэтому проведем анализ в два этапа. Сначала изучим простейший вариант, когда сдвигающая сила горизонтальна. Если линия действия прикладываемой силы не будет проходить через центр масс, то после превышения «критической» ее величины палочка начнет движение, содержащее вращение. В «критическом» состоянии силы трения на каждом участке палочки достигли максимального значения и направлены против начинающегося движения, и поэтому на части палочки силы трения будут сонаправлены с внешней силой (см. рисунок, дающий вид «сверху» на палочку, где обозначена точка C – мгновенный центр начинающегося вращения). В этом случае скольжение начнется при меньшем значении силы. Ясно, что выгоднее всего прикладывать силу к одному из концов палочки перпендикулярно ей, ибо именно в этом случае обеспечивается максимальный момент силы относительно центра масс палочки. Рассмотрим «критическое» состояние палочки при таком действии силы. Условия равновесия в этом состоянии еще выполняются, но силы трения покоя уже достигли максимальных значений. Поскольку палочка прижимается к поверхности силой тяжести равномерно, то и силы трения распределены равномерно по площади соприкосновения.



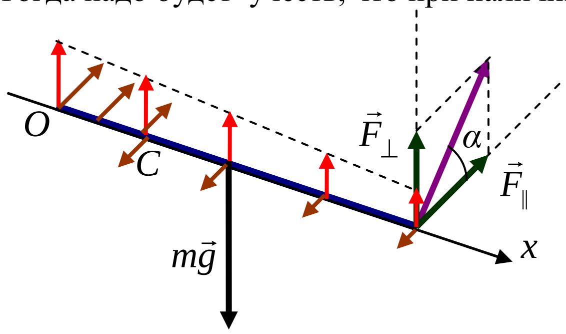
При поступательном движении $F_{mp}^{(\max)} = \mu mg$, так что для элемента палочки длиной Δx соответственно $\Delta F_{mp}^{(\max)} = \mu mg\frac{\Delta x}{L}$ (L - длина палочки). Нетрудно заметить, что сила трения, действующая в «критическом» состоянии на часть палочки слева от C $F_{mp}^{(1)} = \mu mg\frac{l}{L}$, $l \equiv |OC|$, и точка ее приложения – середина этой части. Аналогично и для силы трения, действующей на правую часть: $F_{mp}^{(2)} = \mu mg\frac{L-l}{L}$. Запишем условия равновесия в системе координат, показанной на рисунке:

$$\left\{\begin{aligned} F+\mu mg\frac{l}{L}-\mu mg\frac{L-l}{L}=0\\ F(L-l)-\mu mg\frac{l}{L}\frac{l}{2}-\mu mg\frac{L-l}{L}\frac{L-l}{2}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} F=\mu mg\frac{L-2l}{L}\\ 2(L-2l)(L-l)=l^2+(L-l)^2\end{aligned}\right. .$$

Из второго уравнения определяется положение точки C:

$$l^2-2Ll+\frac{L^2}{2}=0\Rightarrow l=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}L,$$

а затем из первого – величина минимальной силы $F_{III}^{(0)}=(\sqrt{2}-1)\mu mg=(\sqrt{2}-1)F_1$. Как можно заметить, для этого способа нарушения минимальная величина сдвигающей силы одинакова для всех значений коэффициента трения и равна $F_{III}^{(0)}\approx 0{,}99$ Н. Видно, что это значение «выгоднее» предыдущих для двух величин коэффициента трения из трех. Но на самом деле можно привести палочку в поперечное скольжение и еще меньшей силой, если направить эту силу в плоскости, перпендикулярной палочке, под углом к горизонту. Тогда надо будет учесть, что при наличии вертикальной составляющей силы, приложенной к одному из концов палочки, нагрузка на поверхность (и, как следствие, силы нормальной реакции поверхности) будут распределены вдоль палочки неравномерно!



Начнем именно с анализа распределения сил реакции. Пусть x - координата, отсчитываемая вдоль палочки от конца O, дальнего от точки приложения силы $\vec{F}$. Ясно, что в точке O палочка сильнее всего давит на поверхность, а ее конец, к которому приложена сила $\vec{F}$, давит слабее. Соответственно сила нормальной реакции ΔN, действующая на элемент палочки малой длины Δx, линейно убывает с ростом x: $\Delta N=(a-bx)\Delta x$. Постоянные a и b определяются по величине суммарной силы реакции и ее момента ($F_\perp=F\sin\alpha$):

$$\left\{\begin{aligned} mg-F_\perp=N=\sum\Delta N=\int_0^L(a-bx)dx=aL-b\frac{L^2}{2}\\ mg\frac{L}{2}-F_\perp L=M_N=\sum x\Delta N=\int_0^L(a-bx)xdx=a\frac{L^2}{2}-b\frac{L^3}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} a=\frac{mg+2F_\perp}{L}\\ b=\frac{6F_\perp}{L^2}\end{aligned}\right. .$$

Значит, $\Delta N=\left[mg+2F_\perp-6F_\perp\frac{x}{L}\right]\frac{\Delta x}{L}$. Нетрудно заметить, что это вычисление корректно только если $F_\perp\le\frac{mg}{4}$ - при больших величинах «поднимающей» силы полученная формула дает отрицательные значения ΔN для некоторых x. Это означает, что при $F_\perp>\frac{mg}{4}$ возникает «зона отрыва» палочки от поверхности – $\Delta N=c(\bar{x}-x)\ge 0$ для $0\le x\le\bar{x}$, и $\Delta N\equiv 0$ для $\bar{x}<x\le L$. Для этого случая, произведя вычисления заново, получим:

$$\left\{\begin{aligned} mg-F_\perp=N=\sum\Delta N=\int_0^{\bar{x}}c(\bar{x}-x)dx=c\frac{\bar{x}^2}{2}\\ mg\frac{L}{2}-F_\perp L=M_N=\sum x\Delta N=\int_0^{\bar{x}}c(\bar{x}-x)xdx=c\frac{\bar{x}^3}{6}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} c=\frac{2(mg-F_\perp)}{\bar{x}^2}\\ \bar{x}=\frac{3(mg-2F_\perp)}{2(mg-F_\perp)}L\end{aligned}\right. .$$

Эти формулы работают при $\frac{mg}{4}<F_\perp\le\frac{mg}{2}$ (как мы выяснили при анализе (I), при $F_\perp>\frac{mg}{2}$ уже вся палочка отрывается от поверхности, опираясь на поверхность только в точке O).

Перейдем к рассмотрению действия компоненты $F_\parallel=F\cos\alpha$. Для определенности рассмотрим сначала случай $F_\perp\le\frac{mg}{4}$. В «критической» ситуации получаем:

$$\begin{cases} F_{\parallel} = -F_{mp} = \int\limits_{l}^{L} \mu(a-bx)dx - \int\limits_{l}^{l} \mu(a-bx)dx = \mu\left[mg - F_{\perp} - 2(mg+2F_{\perp})\dfrac{l}{L} + 6F_{\perp}\dfrac{l^2}{L^2}\right] \\ F_{\parallel}L = -M_{mp} = \int\limits_{l}^{L} \mu(a-bx)xdx - \int\limits_{l}^{l} \mu(a-bx)xdx = \mu L\left[\dfrac{mg}{2} - F_{\perp} - (mg+2F_{\perp})\dfrac{l^2}{L^2} + 4F_{\perp}\dfrac{l^3}{L^3}\right] \end{cases}.$$

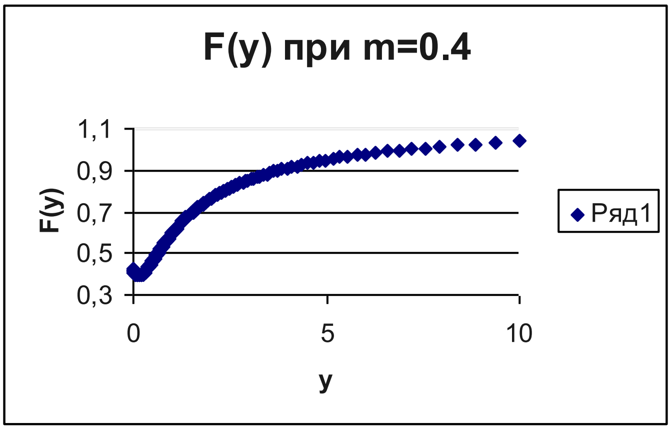
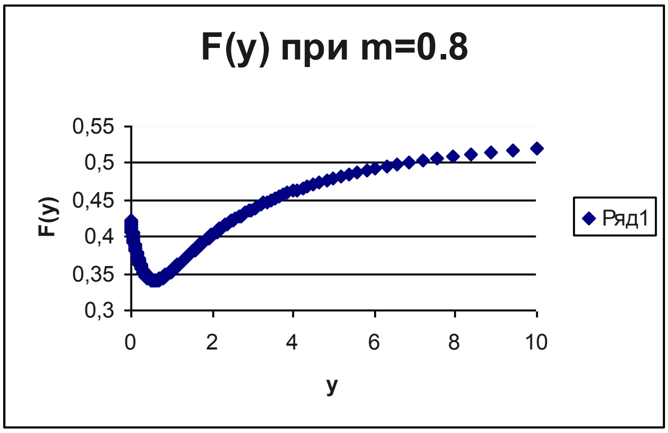
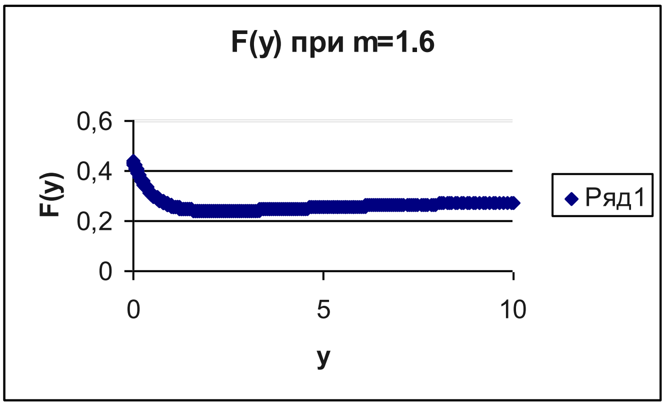
Из этой системы уравнений определяются величина «нарушающей покой» силы F и координата мгновенного центра вращения l при каждом значении α. Удобно ввести безразмерные величины $f \equiv \dfrac{F}{F_1} = \dfrac{F}{\mu mg}$ и $z \equiv \dfrac{l}{L}$, уравнения для которых имеют вид:

$$\left.\begin{cases} f[\cos\alpha + \mu \sin\alpha(1+4z-6z^2)] = 1-2z \\ f[\cos\alpha + \mu\sin\alpha(1+2z^2-4z^3)] = \dfrac{1-2z^2}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f = \dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1-2z}{1+\mu\, tg\alpha(1+4z-6z^2)} \\ \dfrac{1-4z+2z^2}{-1+8z-12z^2+8z^3-4z^4} = \mu\, tg\alpha \end{cases}.$$

Как видно, для z получается уравнение 4-й степени. Используя методику решений таких уравнений, можно получить аналитический ответ для $f(\mu,\alpha)$, но он получается очень громоздким и неудобным для анализа. Гораздо проще решать эту систему, например, графически: для заданного μ, выбирая различные z из диапазона $z_1 < z < 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (где $z_1 \approx 0.16$ – корень уравнения $1-8z+12z^2-8z^3+4z^4 = 0$, отвечающий значению $\mu\, tg\alpha = +\infty$, при этом $z = 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует значению $\mu\, tg\alpha = 0$), для каждого из них по второй формуле подсчитываем значение α, а затем по первой – соответствующее значение $f(\mu,\alpha)$. В результате получаем график зависимости силы от угла и выбираем ее минимальное значение. В таком исследовании можно эффективно использовать MS Excel (с функцией «формула в ячейке») или математические пакеты. При этом необходимо для каждой полученной точки вычислять величину $\dfrac{F_{\perp}}{mg} = f\cdot\mu\cdot\sin\alpha$, которая должна быть меньше $\dfrac{1}{4}$. Это требование связано с тем, что мы проводили вычисления по формулам, отвечающим области $F_{\perp} \le \dfrac{mg}{4}$. В противном случае придется вычислять все заново по аналогичным формулам для $\dfrac{mg}{4} < F_{\perp} \le \dfrac{mg}{2}$, которые выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} f = \dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1-4z+2z^2}{1+\mu\, tg\alpha(1+4z-6z^2)} \\ \dfrac{4z^3-10z^2+8z-1}{(1-6z^2+4z^3)(1-4z+2z^2)} = \mu\, tg\alpha \end{cases}.$$

(здесь $z \equiv \dfrac{l}{x}$, причем $z_2 < z < 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (где $z_2 \approx 0.15$ – корень уравнения $1-8z+10z^2-4z^3 = 0$, отвечающий значению $\mu\, tg\alpha = 0$, и при этом $z = 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ отвечает значению $\mu\, tg\alpha = +\infty$). Как оказывается, для двух значений $\mu = 0{,}4$ и $\mu = 0{,}8$ минимум действительно относится к области $F_{\perp} \le \dfrac{mg}{4}$, а для $\mu = 1{,}6$ – области $\dfrac{mg}{4} < F_{\perp} \le \dfrac{mg}{2}$. В качестве примера приведем построенные по соответствующим формулам графики зависимости f от переменной $y \equiv \mu\, tg\alpha$ при заданных значениях μ:

$\mu = 0{,}4$	
$\mu = 0{,}8$	
$\mu = 1{,}6$	

Точки минимума соответствуют:

μ	f	α
0,4	0,3936	19°
0,8	0,3410	35°
1,6	0,2399	54°

Таким образом, для поперечного скольжения минимальные значения силы, приводящей палочку в движение, для трех заданных значений коэффициента трения равны соответственно $F_{III} \approx$ 0,94 Н, 0,82 Н и 0,58 Н. Эти значения и есть минимальные среди всех найденных!

ОТВЕТ: 0,94; 0,82; 0,58.

Примечание: можно разобрать и «самый общий» случай, когда сила, приложенная к одному из концов палочки, не только составляет угол α с горизонтом, но и лежит в вертикальной плоскости, составляющей угол β с плоскостью, перпендикулярной палочке (как ясно, выше в варианте III разбирался случай $\beta = 0$). Тогда мгновенный центр вращения палочки в момент начала движения уже не лежит на ней, и его положение надо будет характеризовать двумя величинами: $l_\perp$ - расстояние от этого центра до прямой, проходящей через палочку, и $l_\parallel$ - расстояние от противоположного конца палочки до проекции центра на эту прямую. Условия равновесия для критической ситуации при каждом наборе значений μ, α и β образуют систему трех трансцендентных алгебраических уравнений для трех величин - F, $l_\parallel$ и $l_\perp$. Она существенно сложнее разобранной, однако, используя ее, можно доказать, что для любых заданных μ и α точка $\beta = 0$ есть точка минимума $F(\mu, \alpha, \beta)$. Поэтому в действительности такой анализ не нужен. Отчасти это понятно и из физических соображений – для создания движения, являющегося комбинацией двух разных вариантов нарушения равновесия, требуется сила, не меньшая, чем для каждого из них по отдельности.

ТАБЛИЦА ПРАВИЛЬНЫХ ОТВЕТОВ:

задача	ответ 1	ответ 2	ответ 3	ответ 4
1	**77**	**0**	**0**	**0**
2	**55**	**0**	**0**	**0**
3	**3**	**0**	**0**	**0**
4	**90**	**0**	**0**	**0**
5	**15**	**0**	**0**	**0**
6	**314**	**0**	**0**	**0**
7	**0,94**	**0,82**	**0,58**	**0**

О критериях проверки:

Во всех случаях приоритет отдавался работам, в которых четко описана используемая физическая модель явления (особенно в задачах 4, 6 и 7) и получены правильные аналитический (кроме случая III в задаче 7) и численный ответы. В задаче 4 «ключевым» соображением считалось разделение процесса перезарядки на быструю и медленную стадию. В задаче 7 оценивался отдельно каждый из разобранных вариантов нарушения равновесия, поэтому решения, в которых были разобраны все возможные варианты, получали более высокую оценку. Некоторые участники в решениях задачи 7 считали, что заданное значение сдвигающей силы $F_1 = 2{,}4\,\text{Н}$ относилось только к первому из заданных значений коэффициента трения, и пересчитывали эту силу для других его значений. Жюри не считало это ошибкой.