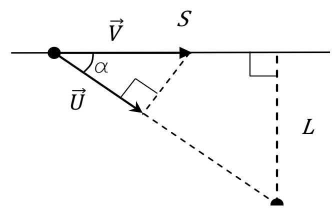
Заочный тур - Физика 9-10 классы

9.1 По прямой дороге с постоянной скоростью V едет автомобиль. В стороне от дороги на расстоянии L от неё находится неподвижный наблюдатель. В некоторый момент времени автомобиль приближается к наблюдателю со скоростью U. Через какой промежуток времени автомобиль будет ближе всего к наблюдателю?

Решение. Скорость сближения объектов — это величина проекции относительной скорости объектов на соединяющую их прямую.



Поскольку наблюдатель неподвижен, скорости автомобиля относительно него и относительно земли совпадают.

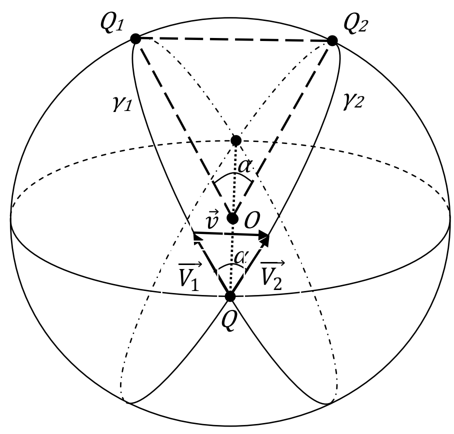
Вводя угол α между дорогой и направлением от автомобиля к наблюдателю и расстояние S между положениями автомобиля в начальный момент и момент t наибольшего сближения объектов, можем записать:

$\cos\,\alpha = U/V$; $\quad S = L\ ctg\,\alpha = L\,\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\,\alpha}} = L\,\frac{U/V}{\sqrt{1-(U/V)^2}}$; $\quad t = S/V\ =\ L\,\frac{U/V}{\sqrt{V^2-U^2}}$.

Ответ: $t = L\,\frac{U/V}{\sqrt{V^2-U^2}}$.

9.2 (10.3) Во время ремонтных работ на МКС космонавт, находясь снаружи, пользовался молотком, и после его неудачного удара «головная часть молотка» отломилась и улетела со скоростью $20\ м/с$ относительно станции. Оказалось, что сразу после этого удара и МКС и «новый спутник» имели относительно Земли одинаковые по величине скорости $\approx 8\ км/с$, которые были «горизонтальными» для наблюдателя на Земле, над головой которого произошло описываемое происшествие. На какое максимальное расстояние удалятся друг от друга МКС и «новый спутник» за первый час его самостоятельного полета?

Решение. $8\ км/с$ — это примерно первая космическая скорость, значит, орбиты спутников околоземные и за их радиус можно принять радиус Земли $R_З$.



За $1\ час = 3\,600\ с$ спутники, двигаясь со скоростью $8\ км/с$, пройдут путь $28\,800\ км$, что больше четверти длины экватора (окружности большого радиуса околоземной орбиты) $¼\ 40\,000 = 10\ 000\ км$. Значит, максимальное расстояние будет достигнуто, когда спутники совершат $¼$ оборота (через $½$ оборота они встретятся).

Траектории спутников — окружности большого радиуса — есть пересечения «сферы околоземных орбит» с плоскостями γ_1 и γ_2, имеющими общую прямую l, проходящую через центр Земли O и точку разлёта осколков Q. (То есть прямая l задаётся радиусом OQ.)

Условие «горизонтальности» начальных скоростей $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ спутников означает, что $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ перпендикулярны радиусу OQ, т.е. прямой l, а значит, угол между ними есть угол между плоскостями γ_1 и γ_2. ($\overrightarrow{V_{1,2}}$ лежат в плоскостях $\gamma_{1,2}$.) Угол этот $\alpha\ \approx\ v\,/\,V\ =\ (20\ м/с)\,/\,(8\ км/с)\ =\ 1/400$.

Расстояние от *прямой* l (а не только от центра Земли O !) до положений Q_1 и Q_2 спутников через $¼$ оборота (когда расстояние между ними максимально) равно радиусу околоземной орбиты (т.к. $\angle QOQ_{1,2}$ — прямой, т.е. радиусы $OQ_{1,2}$ перпендикулярны прямой l). Следовательно, искомое расстояние $|Q_1Q_2|\ \approx\ R_З \bullet \alpha\ \approx\ R_З \bullet v\,/\,V \approx\ 6\,400\ км \bullet 1/400\ \approx\ 16\ км$.

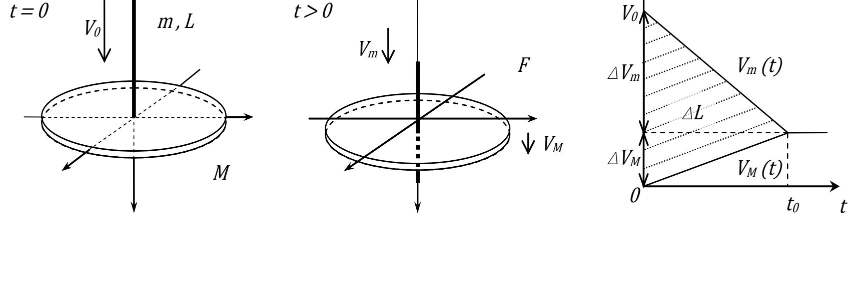
(Из подобия треугольника начальных скоростей и ΔOQ_1Q_2 следует точное аналитическое равенство: $|Q_1Q_2|\,/\,R_З = v\,/\,V \Longrightarrow |Q_1Q_2| = R_З \bullet v\,/\,V$.)

Ответ: $|Q_1Q_2|\ \approx\ R_З \bullet v\,/\,V\ \approx\ 16\ км$.

9.3 В космосе находятся тонкая плоская круглая пластина из пенопласта массы M и длинная тонкая стальная спица массы m, которая расположена перпендикулярно пластине. Другие тела находятся так далеко, что о них можно даже и не думать. Спица имеет длину L и движется поступательно в направлении центра неподвижной пластины, причем скорость её движения направлена вдоль спицы. Когда спица протыкает пластину и движется относительно неё, между телами действуют силы трения F. При какой минимальной начальной скорости V_0 спицы она проткнет пластину и пройдет целиком через неё?

Решение.

Будем рассматривать движение тел относительно следующей инерциальной системы отсчёта:



за начальный момент времени примем момент соприкосновения тел,

начало координат совместим с положением центра пластины ***до*** её взаимодействия со спицей,

две первые координатные оси расположим в плоскости ***покоившейся*** пластины,

третью ось направим перпендикулярно первым в сторону начальной скорости спицы.

В выбранной системе координат скорости тел, а с ними силы, ускорения и смещения, будут иметь отличные от нуля составляющие лишь вдоль третьей оси.

Сначала разберём случай очень длинной спицы, застревающей в пластине при любой начальной скорости.

В этом случае процесс взаимодействия тел состоит из двух стадий:

сразу после соприкосновения между телами возникают силы трения, замедляющие спицу и разгоняющие пластину; действуют они до тех пор, пока скорости тел не сравняются;

как только скорости спицы и пластины совпадут, трение между ними исчезнет и тела будут двигаться равномерно как единое целое.

Для решения задачи воспользуемся графическим подходом.

По условию, на первой стадии силы трения F постоянны, а значит, спица и пластина будут двигаться с неизменными ускорениями, по величине равными $a_m = F/m$ и $a_M = F/M$, соответственно. При этом скорости тел будут линейными функциями времени. Общая точка их графиков отвечает моменту t_0 совпадения скоростей тел. Величины изменений скоростей спицы и пластины к этому времени обозначим через $\triangle V_m$ и $\triangle V_M$, соответственно. Как нетрудно видеть,

$$V_0 = \triangle V_m + \triangle V_M = t_0\, a_m + t_0\, a_M = t_0\, F\,(\,1/m + 1/M\,) = t_0\, F\,(m+M)/(mM)\,,$$

а значит,

$$t_0 = (V_0/F)\; mM/(m+M)\,.$$

Смещения тел относительно начальных положений к моменту времени t_0 даются площадями под графиками их скоростей, а смещение относительно друг друга (глубина вхождения спицы в пластину) — площадью треугольника между графиками с заданным основанием V_0 и найденной высотой t_0:

$$L_0 = (1/2)\; V_0\, t_0 = (1/2)\; (V_0^2/F)\; mM/(m+M)\,.$$

Ясно, что в случае спицы конечной длины L она полностью пройдёт через пластину, если её начальная скорость превышает значение, даваемое обратным соотношением:

$$V_{0\,min} = (\,2LF\,(m+M)/(mM)\,)^{1/2}\,.$$

Ответ: $V_{0\,min} = (\,2LF\,(m+M)/(mM)\,)^{1/2}$.

9.4 В сосуд больших размеров налита вода с температурой $99°C$. В эту воду очень быстро опустили куб с ребром равным $L = 1$ *м* из льда, имеющего температуру $0°C$. В устойчивом положении две грани куба горизонтальны. Найдите быстро (пока лёд не растаял) насколько выступает из воды плавающий в ней ледяной куб.

Решение. Необходимое условие равновесия плавающего в жидкости тела — равенство действующей на него силы тяжести и силы Архимеда, выталкивающей погружённую часть тела.

Введём следующие обозначения:

$l,\ S$ — длина ребра и площадь грани (основания) куба,
$h,\ x$ — глубина его погружения и высота выступающей над водой части,
$\rho_в,\ \rho_л$ — плотности воды и льда.

Используя принятые обозначения, запишем связь линейных величин и уравнение баланса сил:

$$x + h = l, \qquad \rho_в\, h\, S g = \rho_л\, l\, S g \qquad \Longrightarrow \qquad x = l \bullet (\,1 - \rho_л / \rho_в\,)\,.$$

Табличные данные для плотностей веществ при оговоренных в задаче условиях таковы:

$$\rho_в\,(\,99°C\,) = 959\ кг/м^3, \qquad \rho_л\,(\,0°C\,) = 917\ кг/м^3\,.$$

Подстановка числовых данных в аналитическое выражение даёт: $x \approx 4{,}4$ *см* .

Ответ: $x = l \bullet (\,1 - \rho_л / \rho_в\,) \approx 4{,}4$ *см* .

9.5 Школьник Вася приобрел очень качественный термос емкостью 1 *л* (сосуд, который исключает теплообмен содержимого с окружением), у которого теплоемкость стенок равна 100 *Дж/К*. Начальная температура стенок пустого термоса комнатная $= 20°C$. Вася последовательно наливает в термос 1 *г* воды при температуре $1°C$, затем 2 *г* воды при температуре $2°C$, затем 3 *г* воды при температуре $3°C$ … и так далее вплоть до заполнения термоса. Какой будет установившаяся температура содержимого термоса?

Решение. При решении задачи плотность воды в необходимом нам температурном интервале будем считать равной 1 *г/мл* .

Пока позволяет вместимость термоса (1000 *мл*), объёмы порций воды, последовательно наливаемых в него, по условию образуют арифметическую прогрессию $a_1, \ldots, a_n$, где $a_n = n$ *мл* . Соответственно, после добавления n - *ой* полной порции объём воды в термосе составит $V_n = (a_1 + a_n)\, n / 2 = (1 + n)\, n / 2$ *(мл)*. Последняя порция (обозначим её номер как $N + 1$) скорее всего войдёт в сосуд лишь частично.

Для определения номера N последней полной порции решим следующее приближённое уравнение:

$$1000\ мл \approx V_N = (1 + N)\, N / 2\ (мл) \quad \Longleftrightarrow \quad N^2 + N - 2000 \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad N \approx 44{,}2.$$

Отсюда ясно, что $N = 44$, а из 45 - *ой* порции в термос войдёт только

$$1000\ мл - V_N = 1000\ мл - (1 + N)\, N / 2\ (мл) = 10\ мл.$$

Введём обозначения:

$m = 1000\ г,\ \ c = 4{,}2\ Дж/(г\,°C)$	—	полная масса и удельная теплоёмкость воды,
$T_0 = 20\,°C\ ,\ \ S = 100\ Дж/°C$	—	начальная температура и теплоёмкость термоса,
T	—	интересующая нас конечная температура в термосе.

Тогда уравнение теплового баланса для всей системы запишется в виде:

$$T\,(mc + S) = T_0 S + \sum_{n=1}^{N} Q_n + Q_{N+1}\,,$$

где Q_n — вклады энергии от каждой порции воды:

при $n \le N = 44$ $\qquad Q_n = n(°C)\ n(г)\ c = n^2(г\ °C)\ c\,,$

при $n = N{+}1 = 45$ $\qquad Q_{N+1} = 45(°C)\ 10(г)\ c = 450(г\ °C)\ c\,.$

Как видим, при решении задачи возникла необходимость определить сумму квадратов N первых членов натурального ряда $\sum_{n=1}^{N} n^2$. Для этого можно прибегнуть к математическим справочникам, дающим формулу $\sum_{n=1}^{N} n^2 = N\,(N + 1/2)\,(N + 1)\,/\,3$. В нашем случае имеем: $\sum_{n=1}^{44} n^2 = 29\,370$. Также возможно вычислить требуемую сумму на компьютере или просто воспользоваться калькулятором (хотя последний способ требует особой внимательности).

Теперь, подставляя в уравнение теплового баланса найденную сумму, табличные и начальные данные, получим ответ задачи: $T = 29{,}6\ °C$.

Ответ: $T = 29{,}6\ °C$.

9.6 (10.6) Если к батарее подключен только первый вольтметр, то он показывает $4\ В$. Если подключен только второй – то он показывает $4{,}5\ В$. Если к батарее подключены *последовательно* оба этих вольтметра, то вместе они показывают $5\ В$. Какими будут показания этих двух вольтметров, если их подключить к этой же батарее *параллельно*?

Решение. Вольтметры – это обычно приборы с большими внутренними сопротивлениями, однако батареи бывают «подсевшими», поэтому показания вольтметров различаются. Будем считать, что внутреннее сопротивление батареи r, а ее ЭДС равна E. Сопротивление первого вольтметра R_1, а второго вольтметра R_2.

В первом эксперименте напряжение на 1-м вольтметре равно:

$$U_1 = ER_1/(R_1 + r) = E/(1 + x) = 4В.\ \ x = r/R_1$$

Во втором эксперименте – на 2-м вольтметре

$$U_2 = ER_2/(R_2 + r) = E/(1 + y) = 4{,}5В.\ \ y = r/R_2$$

В третьем эксперименте суммарное напряжение на двух вольтметрах равно:

$$U_3 = E(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + r) = E(1/x + 1/y)/(1 + 1/x + 1/y) = 5В.$$

Нужно найти показания вольтметров при их одновременном и параллельном подключении к этой же батарее:

$$U_4 = Er/[r + R_1R_2/(R_1 + R_2)] = E/[1 + 1/(x + y)].$$

Из уравнений для U_1, U_2 и U_3 можно найти: $x = 1/2,\ y = 1/3,\ E = 6В.$

Отсюда следует:

Ответ: $U = 36/11\ В \approx 3{,}27(27)\ В.$

10.1 На прямолинейном участке железной дороги паровоз везет за собой со скоростью V состав вагонов длиной L. Наблюдатель сидит на непрерывно и равномерно вращающемся стуле, стоящем на земле, и смотрит прямо перед собой, не поворачивая головы и не моргая. В тот момент, когда скорость паровоза относительно наблюдателя стала равной нулю, скорость последнего вагона относительно наблюдателя равна $2V$. На каком расстоянии от дороги находится наблюдатель? За какое время стул делает целый оборот?

Решение. Если пересесть в систему отсчета, вращающуюся вместе с креслом и наблюдателем, то все участки железной дороги приобретут так называемые переносные скорости. Сумма относительной (V) скорости паровоза и его переносной скорости в некоторый момент равна нулю. Это возможно только в том случае, когда эти скорости направлены вдоль одной линии, то есть в этот момент паровоз находится на минимальном расстоянии h от наблюдателя. Переносная скорость места, на котором сейчас находится паровоз, равна (ωh) здесь ω – угловая скорость вращения кресла относительно земли. В выбранной вращающейся системе отсчета скорость последнего вагона перпендикулярна рельсам и равна $2V$. Она также складывается из переносной скорости, равной по величине $\omega(L^2+h^2)^{0.5}$ и направленной перпендикулярно линии, соединяющей последний вагон и наблюдателя, и относительной скорости (V) вдоль рельсов.

Продольная (вдоль рельсов) составляющая переносной скорости равна по величине V. Отсюда легко находится: $h = L/2, \omega = 2V/L$.

Ответ: Наблюдатель находится на расстоянии $L/2$ от дороги. Период вращения кресла равен $T = \pi L/V$.

10.2 Вокруг Земли летают с выключенными двигателями два спутника. Периоды обращения вокруг Земли этих спутников одинаковы и равны *12 часам*. На какое максимальное расстояние могут удаляться друг от друга эти два спутника? Для справки: периоды обращения вокруг Земли всех спутников, летающих на «низких орбитах», примерно равны *1,5 часам*.

Решение. Согласно *1*-му закону Кеплера спутники Земли в системе отсчета с началом в центре Земли и с осями, направленными на далекие звезды, летают по орбитам, которые имеют форму эллипсов. Центр Земли находится в фокусе (одном из двух) каждого из таких эллипсов. Согласно третьему закону Кеплера отношения больших осей орбит спутников D_1 и D_2 и их периодов T_1 и T_2 связаны формулой:

$$(D_1/D_2)^3 = (T_1/T_2)^2$$

Низколетающие спутники имеют диаметр орбиты $2R_{Земли}$ и период $T_1 = 1{,}5$ *часа* . Следовательно, большие оси эллипсов, по которым спутники летают с периодом *12 часов* (в *8 раз* больше, чем *1,5 часа*), равны : $D_2 = 8\ R_{Земли}$. Каждый из спутников может удаляться от центра Земли на максимальное расстояние равное $\approx 7\ R_{Земли}$.

Максимальное расстояние между двумя такими спутниками равно:

Ответ: $L_{max} \approx 14R_{Земли} \approx 89{,}6$ *тысяч км* .

10.3 (9.2) Во время ремонтных работ на МКС космонавт, находясь снаружи, пользовался молотком, и после его неудачного удара «головная часть молотка» отломилась и улетела со скоростью *20 м/с* относительно станции. Оказалось, что сразу после этого удара и МКС и «новый спутник» имели относительно Земли одинаковые по величине скорости ≈ 8 *км/с*, которые были «горизонтальными» для наблюдателя на Земле, над головой которого произошло описываемое происшествие. На какое максимальное расстояние удалятся друг от друга МКС и «новый спутник» за первый час его самостоятельного полета?

Ответ: $|Q_1Q_2| \approx R_З \bullet v / V \approx 16$ *км* .

10.4 Определение: «Вес тела $\boldsymbol{F}$ – это сумма всех сил *не гравитационного* происхождения, с которыми это тело действует на другие тела». На легкой нерастяжимой веревке длиной $L = 1м$, один конец которой закреплён на потолке в классе, раскачивается гиря небольших размеров с массой $m = 1\ кг$. Угол, который образует веревка с вертикалью, изменяется в пределах от $\alpha_{min} = 30°$ до $\alpha_{max} = 60°$. Каков по величине вес гири в тот момент, когда веревка составляет с вертикалью угол $(\alpha_{min} + \alpha_{max})/2 = 45°$? Какой угол составляют вектор $\boldsymbol{g}$ и вес гири $\boldsymbol{F}$ в этот момент?

Решение. Поскольку единственное тело, с которым гиря взаимодействует «негравитационным способом» – это веревка, то вес гири – это сила с которой гиря растягивает веревку. Направлена эта сила, очевидно, вдоль веревки, и в интересующий нас момент составляет с вектором $\boldsymbol{g}$ угол 45°.

Проекция ускорения гири на направление «к точке крепления веревки на потолке» (вдоль веревки) равна $(V_{45°})^2/L$. Это утверждение легко доказывается. Выберем начало отсчета совпадающим с точкой крепления веревки. Положение гири соответствует радиусу вектору $\boldsymbol{R}$. Скорость гири $\boldsymbol{V}$ перпендикулярна отрезку, соединяющему гирю и точку подвеса, так как длина веревки остается неизменной во время движения, то есть скалярное произведение этих величин равно нулю:

$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{V}) = 0$.

Если взять производную по времени от правой и левой частей этого соотношения, мы получим:

$(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a}) = 0$.

Это означает, что проекция вектора ускорения $\boldsymbol{a}$ на направление от гири к месту крепления веревки на потолке равна: V^2/R. Проекция суммарной силы (суммы всех сил), действующей на гирю, на это направление обеспечивает существование проекции ускорения гири на это направление. Следовательно: $(V_{45°})^2/L = F/M - g\cos(45°)$. Отсюда:

$F = Mg\cos(45°)+M(V_{45°})^2/L$.

Сила натяжения $\boldsymbol{F}$ веревки направлена вдоль веревки, то есть $\boldsymbol{F}$~$\boldsymbol{R}$, и на гирю действует сила тяжести, поэтому из 2-го закона Ньютона можно установить:

$M\boldsymbol{a} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}$.

Эти две силы лежат в плоскости, проходящей через точку крепления веревки к потолку, поэтому проекция момента количества движения, вычисленного относительно точки крепления веревки к потолку, не меняется со временем. Умножим выражения справа и слева от знака равенства векторно на вектор ***R***. Векторное произведение импульса гири M***V*** на радиус вектор ***R*** равно:

$M[\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{a}] = Md[\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}]/dt = M[\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{g}]$.

Из этого равенства следует, что проекция $[\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}]$ на вертикальное направление сохраняется. То есть при движении гири сохраняется произведение проекции скорости V_x и величины $L\times\sin\alpha$.

Скорости движения $V_{30°}$ и $V_{60°}$ гири в моменты, когда нить отклонена от вертикали на углы 30° и 60°, относятся друг к другу, как $\sin(60°)/\sin(30°) = 3^{0,5}$. При этом из закона сохранения механической энергии следует соотношение:

$(V_{30°})^2 - 2gL\cos(30°) = (V_{60°})^2 - 2gL\cos(60°) = (V_{45°})^2 - 2gL\cos(45°)$.

Отсюда можно найти:

$(V_{45°})^2 = gL\times(2\times2^{0.5}+3^{0.5}-3)/2$.

Ответ: $|\boldsymbol{F}| = Mg\times(3\times2^{0.5}+3^{0.5}-3)/2 = 14{,}85$ *Н (если* $g=10$ *м/с²) или* $14{,}59$ *Н (если* $g=9.81$ *м/с²), угол равен 45°.*

10.5 Какова плотность воздуха при атмосферном давлении $P = 10^5$ *Па*, температуре $t = 100°C$ и относительной влажности $\lambda = 30\%$?

Решение. Парциальное давление воздуха (азота и кислорода) равно 70000 *Па*. Парциальное давление водяного пара равно 30000 *Па*. При заданной температуре вклад в плотность газа равен: $P\mu/RT$. Молярная масса воды $0{,}018$ *кг/моль*, молярная масса воздуха (средняя) $0{,}029$ *кг/моль*.

В результате получается

Ответ: $P_{возд}\,\mu_{возд}/RT + P_{вода}\,\mu_{вода}/RT = 0{,}829$ *кг/м³* .

10.6 (9.6) Если к батарее подключен только первый вольтметр, то он показывает 4 *В* . Если подключен только второй – то он показывает $4{,}5$ *В* . Если к батарее подключены *последовательно* оба этих вольтметра, то вместе они показывают 5 *В* . Какими будут показания этих двух вольтметров, если их подключить к этой же батарее *параллельн* ?

Ответ: $U = 36/11$ *В* $\approx 3{,}27(27)$ *В*.