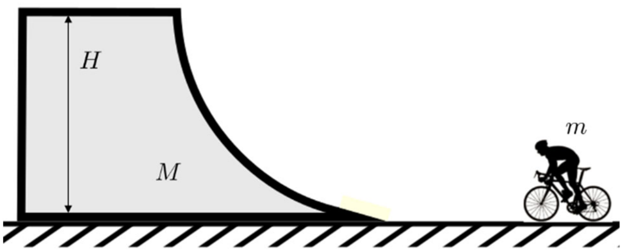
Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.
Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

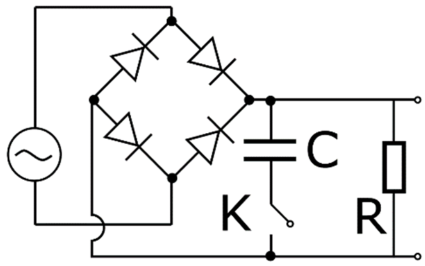


Задача 1. Велосипедист, не крутя педали, заезжает на горку, профиль которой представляет из себя четверть окружности. Если бы горка была закреплена на поверхности, он бы подпрыгнул вверх, поднявшись от поверхности Земли на удвоенную высоту горки. Однако горка может скользить по поверхности без трения. Какой высоты достигнет велосипедист, если его масса равна m, масса горки равна M, а высота горки равна H? Потерей энергии при трении между шинами велосипеда и поверхностью, а также кинетической энергией вращения колёс велосипеда пренебречь.

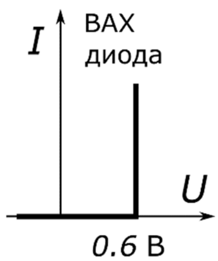
Задача 2. Воздушный шарик накачан гелием до объёма $V_0 = 3$ л. Для того, чтобы удерживать шарик у поверхности Земли, надо прикладывать силу F_0. Полагая, что атмосфера является изотермической и давление с высотой h падает по линейному закону $P = P_0 - P'h$, где $P_0 = 10^5 \text{Па}$ – атмосферное давление у поверхности Земли, а константа $P' = 12$ Па/м, найдите высоту H, до которой поднимется шарик, если его отпустить.

1. Сначала решите задачу в предположении, что объём шарика не меняется при изменении внешнего давления. Численный ответ получите для $F_0 = 0.01$ Н.
2. Учтите теперь то, что при уменьшении внешнего давления P шарик увеличивается в размерах. Пусть расширение шарика определяется упрощённым законом $P_{in} - P = P_\Delta$, где P_{in} —давление внутри шарика, а константа $P_\Delta = 10^4 \text{Па}$. Удерживающая сила равна $F_0 = 0.001$ Н.

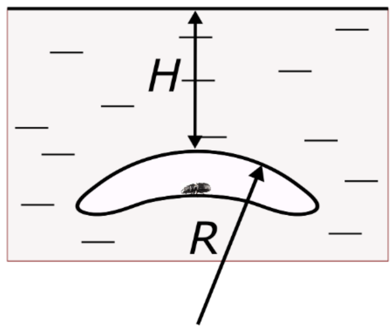
Плотность воздуха у поверхности Земли равна $\rho_0 = 1.2$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 считать не меняющимся с высотой.



Задача 3. На вход схемы подаётся переменное синусоидальное напряжение с амплитудой $U_0 = 12\text{ В}$ и частотой $f = 50\text{ Гц}$. Вольт-амперная характеристика диодов изображена на Рисунке, ёмкость $C = 2 \cdot 10^{-3}\text{ Ф}$, паразитное сопротивление $R = 1\text{ кОм}$.



1. Ключ K разомкнут. Нарисуйте зависимость напряжения U_R на резисторе R от времени. Чему равно максимальное напряжение? Чему равен период этой зависимости? Какую долю периода напряжение равно нулю?
2. Ключ K замыкают. Нарисуйте зависимость напряжения U_R на резисторе в этом случае. Оцените амплитуду колебаний напряжения на резисторе.



Задача 4. Только самые маленькие пузыри воздуха остаются почти круглыми в процессе всплывания в воде. Если пузырь воздуха, всплывающий в воде, имеет размеры порядка 10 см, то он принимает аксиально симметричную форму шляпки гриба, см. Рисунок. Жук плавает на нижней поверхности пузыря, перемещаясь вверх вместе со всем пузырём. На какой глубине увидит жука смотрящий на него вертикально сверху, находясь над поверхностью воды? Расстояние от верхней границы пузыря до поверхности воды равно H, радиус кривизны верхней границы пузыря равен R, коэффициент преломления воды $n = 4/3$. Размеры жука малы по сравнению с расстоянием h от него до верхней границы пузыря.

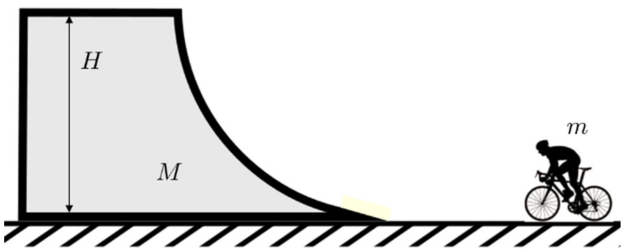
1. Пренебрегите тем, что верхняя поверхность пузыря не плоская, а изогнутая. На какой глубине тогда увидит жука наблюдатель, находящийся над водой?
2. Примите во внимание кривизну верхней поверхности пузыря и получите полный ответ.

Задача 5. Если перевернуть стакан, до краёв наполненный водой, то она из него вытечет. Если же перевернуть открытый флакон с глазными каплями, то жидкость вытекать не будет. Оцените размер отверстия во флаконе, при котором вода будет из него вытекать. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}\text{Н/м}$.

11 класс. Решения.

Предложение оценки: каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи; разбалловка приведена из расчёта 20 баллов на задачу.

Задача 1. Механика.



Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Велосипедист, не крутя педали, заезжает на горку, профиль которой представляет из себя четверть окружности. Если бы горка была закреплена на поверхности, он бы подпрыгнул вверх, поднявшись от поверхности Земли на удвоенную высоту горки. Однако горка может скользить по поверхности без трения. Какой высоты достигнет велосипедист, если его масса равна m, масса горки равна M, а высота горки равна H? Потерей энергии при трении между шинами велосипеда и поверхностью, а также кинетической энергией вращения колёс велосипеда пренебречь.

Решение: Начальная скорость велосипедиста определяется законом сохранения энергии, записанном для случая закреплённой на поверхности горки:

$$\frac{\mathrm{m\,v^2}}{2} = 2\mathrm{mgH}.$$

Теперь перейдём к свободно скользящей по поверхности горки. Когда велосипедистом будет достигнута максимальная высота h, горизонтальная скорость u велосипедиста будет равна горизонтальной скорости горки, а вертикальная скорость велосипедиста будет равна нулю. Это так для двух возможных вариантов: и если велосипедист не достигнет верха горки, и если велосипедист сможет подпрыгнуть над горкой – потому что горка имеет в конце вертикальный профиль. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$(\mathrm{m+M})\mathrm{u} = \mathrm{mv}, \qquad \mathrm{mgh} + \frac{(\mathrm{m+M})\,\mathrm{u^2}}{2} = \frac{\mathrm{m\,v^2}}{2} = 2\mathrm{mgH},$$

Откуда получим, что

$$\mathrm{h} = \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{m+M}}\mathrm{H}.$$

Разбалловка.

Записан закон сохранения энергии для неподвижной горки	3 балла
Записано условие равенства горизонтальных скоростей велосипедиста и подвижной горки в момент достижения им наивысшей точки	5 балла
Записан закон сохранения импульса	4 балла
Записан закон сохранения энергии	4 баллов
Получен окончательный ответ, оба случая (не достижения высшей точки горки и отрыва от неё) сведены к одному ответу	4 баллов

Задача 2. Термодинамика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Воздушный шарик накачан гелием до объёма $V_0 = 3$ л. Для того, чтобы удерживать шарик, надо прикладывать силу F_0. Полагая, что атмосфера является изотермической и давление с высотой h падает по линейному закону $P = P_0 - P'h$, где $P_0 = 10^5 \text{Па}$ – атмосферное давление у поверхности Земли, а константа $P' = 12\ \text{Па/м}$, найдите высоту H, до которой поднимется шарик если его отпустить.

1. Сначала решите задачу в предположении, что объём шарика не меняется при изменении внешнего давления. Численный ответ получите для $F_0 = 0.01$ Н.
2. Учтите теперь то, что при уменьшении внешнего давления P шарик увеличивается в размерах. Пусть расширение шарика определяется упрощённым законом $P_{in} - P = P_\Delta$, где P_{in} —давление внутри шарика, а константа $P_\Delta = 10^4 \text{Па}$. Удерживающая сила равна $F_0 = 0.001$ Н.

Плотность воздуха у поверхности Земли равна $\rho_0 = 1.2\ \text{кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$ считать не меняющимся с высотой.

Решение. Сила, действующая на шарик, равна разности его веса и силы Архимеда,

$$F = -(m + M_{He})g + \rho V g \qquad (1)$$

где $\rho = (P/P_0)\rho_0$ – плотность изотермического воздуха на высоте h, а V – текущий объём шарика, M_{He} – масса гелия в шарике, m – масса его оболочки.

Сначала считаем, что шарик не изменяет своего объёма в процессе поднятия, так что $V = V_0$. Когда шарик находился у поверхности Земли, уравнение (1) сводится к

$$F_0 = -(m + M_{He})g + \rho_0 V_0 g, \qquad (2)$$

Снова возвратимся к (1), записав его для максимальной высоты H, которая определяется условием равенства нулю действующей на него полной силы F:

$$H_s = \frac{P_0 F_0}{P' \rho_0 V_0 g} = 2300 \text{ м.} \qquad (3)$$

Теперь учтём то, что шарик расширяется, поскольку на высоте давление атмосферы падает. Поскольку атмосфера предполагается изотермической, объём шарика V и давление внутри него P_{in} связаны соотношением

$$P_{in} V = P_{in,0} V_0 = \text{const}, \qquad V = V_0 + \Delta V.$$

Воспользовавшись тем, что разность давлений снаружи шарика и внутри него постоянна, $P = P_{in} - P_\Delta$, получаем, что

$$PV = (P_{in} - P_\Delta)V = P_{in,0}V_0 - P_\Delta V_0 - P_\Delta(V - V_0) = P_0 V_0 - P_\Delta \Delta V.$$

Поэтому силу (1), действующую на шарик, можно выразить через приращение объёма ΔV:

$$F = -(m + M_{He})g + \frac{\rho_0 PV}{P_0} g = F_0 - \frac{\rho_0 P_\Delta \Delta V}{P_0} g.$$

Шарик прекратит подниматься, когда действующая на него сила будет равна нулю, $F = 0$, то есть когда его объём возрастёт на

$$\Delta V = \frac{F_0 P_0}{\rho_0 P_\Delta g} = 0.8 \text{ л.} \quad \left(\text{Отметим что} \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{P'}{P_\Delta} H_s, \quad \text{где теперь } H_s = 230 \text{ м}\right)$$

Теперь надо изменение объёма связать с изменением давления, которое в свою очередь даст высоту. Изменения внутреннего давления и объёма связаны между собой соотношениями

$$(V_0 + \Delta V)\,\Delta P_{in} + P_{in,0}\,\Delta V = 0, \qquad \Delta P = \Delta P_{in} = -\frac{\Delta V}{V_0 + \Delta V}\,(P_0 + P_\Delta) \qquad (4)$$

$$\left(\text{или} \qquad V = \frac{(P_0 + P_\Delta)V_0}{P_0 + P_\Delta - P'H}, \qquad \text{или} \qquad P = \frac{P_\Delta(m + M_{He})}{\frac{\mu_\text{в}}{\mu_\text{He}} M_{He} - (m + M_{He})}\right).$$

где $\mu_\text{в}$ и μ_He – молярные массы воздуха и гелия. Таким образом, получаем, что высота

$$H = \frac{\Delta P}{P'} = \frac{\Delta V}{V_0 + \Delta V}\,\frac{P_0 - P_\Delta}{P'} = \left(\frac{P_0}{P_\Delta} + 1\right) \frac{H_s}{1 + \frac{P' H_s}{P_\Delta}} = \frac{(P_0 + P_\Delta)P_0 F_0}{P'(P_0 F_0 + P_\Delta \rho_0 V_0 g)} =$$

$$= 2000 \text{ м} \quad . \qquad (5)$$

Полученный нами ответ (5) показывает, что расширение шарика значительно повышает высоту H (в нашем случае с 230 м до 2000 м). Для обычных шариков она оказывается равной нескольким десяткам километров, при этом латексный шарик увеличивает свой объём в 10 и более раз (а резиновый это сделать не может и лопается).

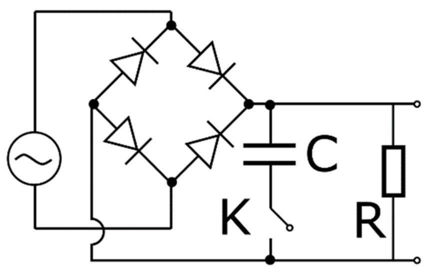
Разбалловка.

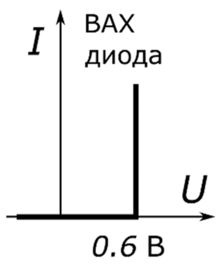
Записано условие равенства нулю полной силы, действующий на не изменяющий	6 баллов

свой объём шарик; получен ответ (вопрос 1)	
Записано условие равенства нулю полной силы, действующей на изменяющий свой объём шарик	3 балла
Найдена зависимость плотности воздуха от высоты	2 балла
Найдена величина изменения объёма шарика в наивысшей точке через F_0	3 балла
Найдена связь между изменением объёма шарика и высотой	3 балла
Получен окончательный ответ (вопрос 2)	3 балла

Задача 3. Электричество и магнетизм.

Задача 3 (Парфеньев Владимир Михайлович) (20 баллов). На вход схемы подаётся переменное синусоидальное напряжение с амплитудой $U_0 = 12$ В и частотой $f = 50$ Гц. Вольт-амперная характеристика диодов изображена на Рисунке, ёмкость $C = 2 \cdot 10^{-3}$ Ф, паразитное сопротивление $R = 1$ кОм.





1. Ключ K разомкнут. Нарисуйте зависимость напряжения U_R на резисторе R от времени. Чему равно максимальное напряжение? Чему равен период этой зависимости? Какую долю периода напряжение равно нулю?
2. Ключ K замыкают. Нарисуйте зависимость напряжения U_R на резисторе в этом случае. Оцените амплитуду колебаний напряжения на резисторе.

Решение. 1. Поскольку каждый диод может пропускать ток только в одном направлении, то благодаря схеме их соединения напряжение на резисторе (разница между потенциалами верхней и нижней точек) будет всегда неотрицательным. В зависимости от знака напряжения на источнике питания ток будет течь либо через пару диодов №1 (левый нижний и верхний правый), либо через пару диодов №2 (правый нижний и верхний левый). При этом, если течёт ток через резистор, падение напряжения на диодах будет в сумме составлять 1.2 В, то есть на резисторе будет напряжение $|U| - 1.2$ В, где U --- текущее напряжение на источнике питания. Если оно меньше чем пороговое значение $|U| < 1.2$ В, то ток течь не будет. В результате получаем зависимость напряжения на резисторе, показанную на Рисунке сплошной красной линией (не прорисованы горизонтальные участки с нулевым значением напряжения).

Период колебаний напряжения на резисторе в два раза меньше периода колебаний напряжения на источнике питания, то есть равен $T_R = 1/2f \; = 0.01$ с.

Посчитаем длительность времени, в течении которого ток через резистор отсутствует. Моменты времени, когда ток прекращается (или оканчивается время его отсутствия) определяются уравнением

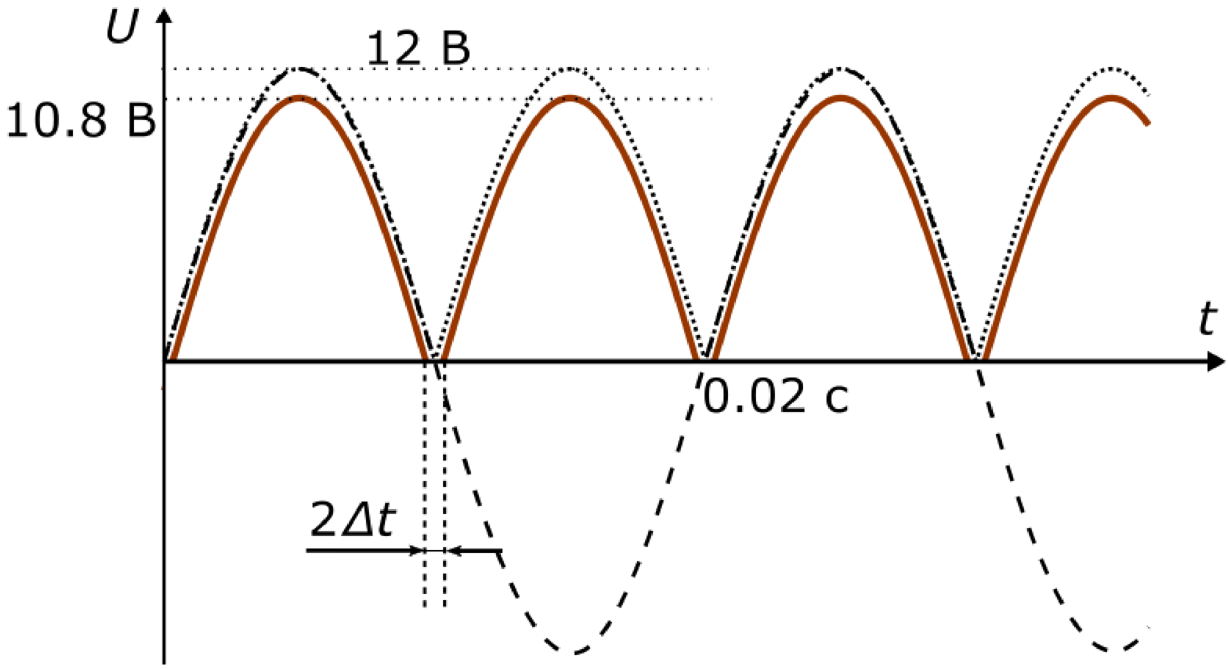
$$U_0|\sin(2\pi f\ t)| = 1.2\ \text{В}, \qquad \sin(2\pi f\ t) = 0.1$$

Ля самого первого момента (обозначим его Δt) это уравнение может быть с хорошей точностью решено приближённо:

$$2\pi f\ \Delta t = 0.1, \quad \Delta t = \frac{0.1}{2\pi f}$$

Доля времени, в течении которого ток отсутствует, определяется соотношением

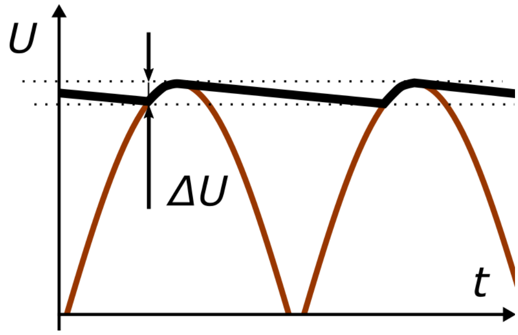
$$\frac{2\ \Delta t}{T_R} = \frac{2\cdot 0.1}{2\pi f}2f = \frac{0.2}{\pi} \approx 6\ \%$$



2. Если ключ K замкнут, то на конденсаторе возникнет некоторый ненулевой заряд. Поскольку диоды пропускают ток только в одном направлении, то этот заряд всегда будет оставаться одного знака. Ток через диоды неограничен, поэтому напряжение на конденсаторе U_R не может быть меньше чем приходящее напряжение от источника через два диода,

$$U_R \geq U_0\ |\sin(2\pi f\ t)| - 1.2\ \text{В}.$$

Отсюда заключаем, что максимальное значение напряжения на конденсаторе, которое достигается в течение каждого периода, равно $U_{R,\max} = 10.8$.



После достижения максимума, напряжение от источника питания начинает падать. В результате конденсатор начинает разряжаться через резистор. Если бы конденсатор имел бесконечную ёмкость, то напряжение на резисторе оставалось бы всегда равным $U_{R,\max}$. Однако поскольку ёмкость конденсатора конечна, то в некоторый момент периода колебаний скорость разряжения конденсатора начинает отставать от темпов падения напряжения от источника. После этого момента напряжение на резисторе определяется только зарядом конденсатора, а ток через источник оказывается равным нулю.

Для того, чтобы понять степень разрядки конденсатора в течение одного периода колебаний, оценим время разрядки R-C цепи:

$$\tau = RC = 2\text{ сек}$$

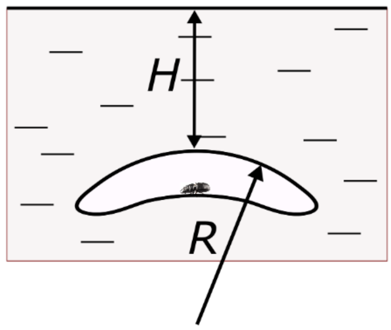
Это время значительно превышает период колебаний напряжения $\tau \gg T_R$. Отсюда следует, что конденсатор разряжается слабо, см. рисунок. С другой стороны, он разряжается почти весь период колебаний, поскольку скорость его разрядки почти всегда медленнее, чем темп изменения напряжения на источнике питания. Таким образом, заряд Q, прошедший через резистор за время разрядки конденсатора, и соответствующее ему падение напряжения ΔU на конденсаторе, равны

$$Q = \frac{U_{R,\max}}{R} T_R, \qquad \Delta U = \frac{Q}{C} = \frac{T_R}{RC} U_{R,\max} \approx 0.05\text{ В}.$$

Разбалловка.

Определено, что ток течёт только через пары противоположно расположенных диодов, если амплитуда напряжения больше 1.2 В (найдено максимальное напряжение)	4 балла
Установлен период колебаний (несменяемость знака напряжения на резисторе)	4 балла
Установлена длительность отсутствия напряжения на резисторе	4 балла
Найдено время разрядки цепи резистор-конденсатор	4 балла
Оценена амплитуда флуктуаций напряжения на конденсаторе	4 балла

Задача 4. Оптика



Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Только самые маленькие пузыри воздуха остаются почти круглыми в процессе всплывания в воде. Если пузырь воздуха, всплывающий в воде, имеет размеры порядка 10 см, то он принимает аксиально симметричную форму шляпки гриба, см. Рисунок. Жук плавает на нижней поверхности пузыря, перемещаясь вверх вместе со всем пузырём. На какой глубине увидит жука смотрящий на него вертикально сверху, находясь над поверхностью воды? Расстояние от верхней границы пузыря до поверхности воды равно H, радиус кривизны верхней границы пузыря равен R, коэффициент преломления воды $n = 4/3$. Размеры жука малы по сравнению с расстоянием h от него до верхней границы пузыря.

1. Пренебрегите тем, что верхняя поверхность пузыря не плоская, а изогнутая. На какой глубине тогда увидит жука наблюдатель, находящийся над водой?
2. Примите во внимание кривизну верхней поверхности пузыря и получите полный ответ.

Решение. Если предмет находится за плоской пластиной толщиной H и имеющей показатель преломления n, то его мнимое изображение смещается на расстояние

$$\delta H = \frac{n-1}{n} H$$

к наблюдателю. Иными словами, кажется, что пластина имеет толщину

$$H' = \frac{H}{n}.$$

Действительно, рассмотрим луч, вышедший от предмета (жука), который прошёл через пластину, упав на неё под малым углом α. Луч выйдет из пластины под тем же углом. Если бы пластины не было, расстояние до предмета L было бы пропорционально расстоянию от луча до вертикали x, $x = \alpha L$. Однако когда луч проходил внутри пластины, он был направлен под углом α/n к вертикали, т.е. удалился от неё на $\alpha H/n$. Приходим к написанным выше ответам.

Теперь учтём то, что верхняя поверхность пузыря имеет радиус кривизны равный R. В этом случае прохождение луча от жука к наблюдателю можно представить как прохождение им оптической системы, состоящей из последовательно составленных вогнуто-плоской линзы и плоской пластины толщиной H. Фокусной расстояние линзы получаем по формуле линзы

$$F = -\frac{R}{n-1}.$$

Знак минус означает, что речь идёт о вогнутой линзе. Мнимое изображение жука после прохождения лучами линзы будет находиться на расстоянии h', которое определяется уравнением

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} = \frac{1}{F}, \qquad h' = \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{n-1}{R}}$$

В результате получаем, что полное расстояние от мнимого изображения жука до поверхности (кажущаяся глубина погружения жука) равна

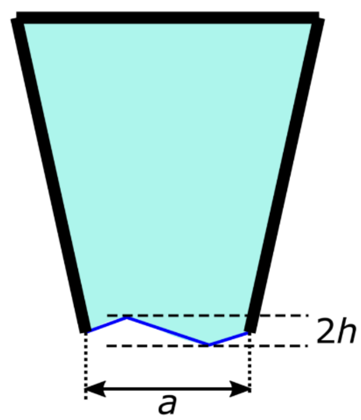
$$\frac{H}{n} + \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{n-1}{R}} = \frac{3H}{4} + \frac{3Rh}{3R+h}.$$

Разбалловка.

Построено мнимое изображения для лучей, проходящих через пластину	4 балла
Правильно установлена видимая толщина плоского слоя воды (вопрос 1)	4 балла
Написана правильное выражение для фокусного расстояния плосковогнутой линзы	4 балла
Установлено положение мнимого изображения за линзой	4 балла
Выписан окончательный ответ (сказано о том, что оптическая система составная)	4 балла

Задача 5. Задача-оценка.

Условие (Парфеньев Владимир Михайлович) (20 баллов). Если перевернуть стакан, до краёв наполненный водой, то она из него вытечет. Если же перевернуть открытый флакон с глазными каплями, то жидкость вытекать не будет. Оцените размер отверстия во флаконе, при котором вода будет из него вытекать. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м.



Решение. Поскольку флакон имеет только одно отверстие, то вытекание воды из флакона может происходить только следующим образом: Поверхность воды в области отверстия начинает изгибаться так, что полное количество жидкости не изменяется. Часть поверхности уходит вниз, приводя к образованию капли; другая же часть поверхности уходит вверх, что приведёт к образованию пузырька. Когда капля отделится от поверхности, тогда пузырёк полностью уйдёт в жидкость и начнёт всплывать, двигаясь ко дну флакона.

Для оценки, возможен ли такой сценарий, достаточно рассмотреть начальную стадию зарождения пары капля-пузырёк. На начальной стадии поверхность жидкости является слабо искривлённой, так что её амплитуда искривления h мала по сравнению с размером отверстия a, $h \ll a$. При искривлением поверхности связано изменение энергии жидкости, которое состоит из двух вкладов. Первый вклад ΔE_g есть изменение потенциальной энергии в поле силы тяжести.

Смотря на рисунок, можно сделать вывод, что элемент жидкости объёмом порядка a^2h переместился вниз на высоту порядка h, так что

$$\Delta E_g \sim -\rho g \cdot a^2 h \cdot h = -\rho g a^2 h^2.$$

Второй вклад ΔE_σсвязан с увеличением поверхностной энергии вследствие увеличения площади поверхности воды при искривлении поверхности. Для того, чтобы оценить величину изменения поверхности, приблизим поверхность ломаной линией, как это показано на рисунке. Теперь оценка свелась к тому, что нам нужно вычислить отличие гипотенузы l прямоугольного треугольника от его длинной стороны a, если короткая сторона равна h:

$$l - a = \sqrt{a^2 + h^2} - a \approx \frac{h^2}{2a}.$$

Поэтому изменение поверхностной энергии оценивается как

$$\Delta E_\sigma \sim \sigma(l-a)a \sim \sigma h^2$$

Для того, чтобы процесс образования пары капля-пузырик был энергетически разрешён, надо, чтобы изменение энергии системы на начальном этапе было отрицательным,

$$\Delta E_g + \Delta E_\sigma \sim -\rho g a^2 h^2 + \sigma h^2 < 0,$$

то есть когда

$$\rho g a^2 > \sigma, \qquad a > \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sim 2.5 \text{ мм}. \qquad (1)$$

Задача может быть решена также методом размерности. К физике рассматриваемого процесса образования пары капли-пузырёк имеют отношение поверхностное натяжение жидкости, её массовая плотность и ускорение свободного падения. Размерности этих величин суть

$$[\sigma] = \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2} = \frac{\text{г}}{\text{с}^2}, \qquad [\rho] = \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \qquad [g] = \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Из этих величин надо собрать величину размерности длины. Исключение граммов требует выбора комбинации σ/ρ, а исключение времени требует деления выписанной комбинации на g. В результате снова приходим к ответу (1).

Разбалловка.

Задача решена методом размерности (дано обоснование выбора играющих роль физических параметров)	20 баллов
Записано выражение для лапласовского давления	4 балла
Записано выражения для гравитационной силы, действующей на зарождающуюся каплю	4 балла

Записано выражения для силы, действующей на зарождающуюся каплю со стороны поверхностного натяжения	4 балла
Записано выражения для энергии поверхностного натяжения искривлённой поверхности	4 балла
Записано выражения для гравитационной энергии зарождающейся капли	4 балла
Из сравнения сил (энергий) получен окончательный ответ	20 баллов