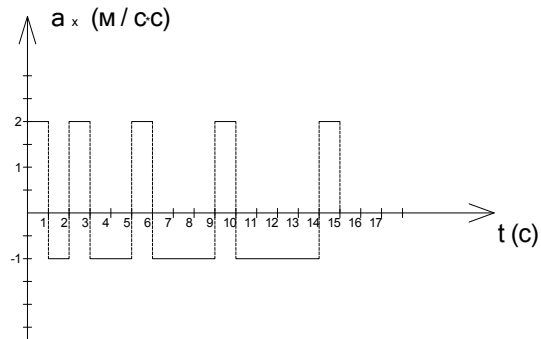


## 11 КЛАСС

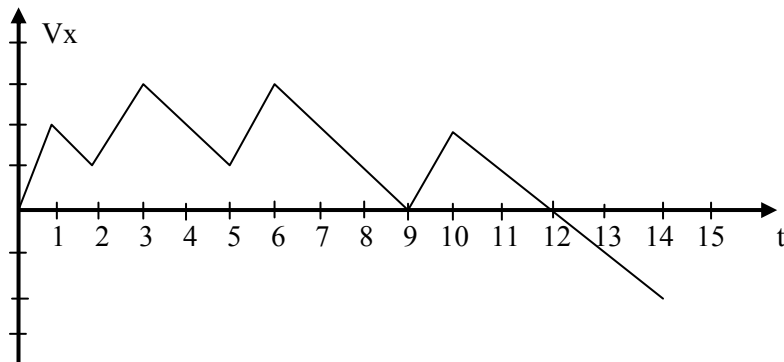
Задача 1. Материальная точка движется вдоль оси  $x$  с ускорением, изменяющимся во времени так, как показано на рисунке. Начальная скорость равна нулю. Через какое время точка окажется на максимальном расстоянии от начального положения и чему равно это расстояние?



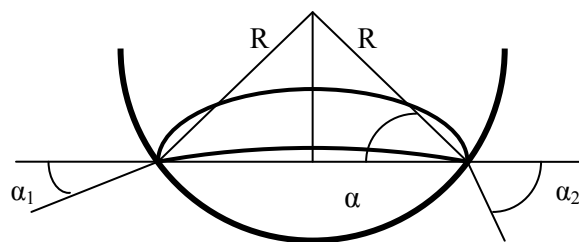
Для решения задачи необходимо построить график  $V_x(t)$

По графику видно, что скорость изменяет свой знак через 12с, следовательно, именно в этот момент материальная точка окажется на максимальном расстоянии от начальной точки.

Вычисляя площадь фигуры, ограниченной графиком скорости, получим, что максимальное расстояние равно 18м.



Задача 2. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени между двумя ударами при движении в одну сторону всегда равен  $T_1$ , а при движении обратно  $T_2 \neq T_1$ . Найти радиус лунки.



Дано:  
 $T_1$   
 $T_2 \neq T_1$

Решение:

Будем считать, что в точке удара шарика о лунку радиус лунки образует с горизонтом угол  $\alpha$ , первый раз шарик отлетает от лунки под углом  $\alpha_1$  к горизонту, а второй – под углом  $\alpha_2$ .

R-?

Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, вычисляется по формуле:

$$l = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Столкновение шарика со стенками лунки является упругим, поэтому начальные скорости шарика в обоих случаях одинаковы, дальности полета тоже равны, поэтому:

$$\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2 \Rightarrow \alpha = \pi/4$$

Из треугольника OAB имеем:

$$R = \frac{l}{2 \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Время полета шарика и дальность его полета могут быть так же вычислены по формулам:

$$T_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha_1}{g} \quad \text{и} \quad l = v_0 \cos \alpha_1 T_1$$

Аналогичные уравнения можно записать и для угла  $\alpha_2$ .

Используя основное тригонометрическое тождество, получим:

$$\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2$$

Выражая  $\sin \alpha_1$  и  $\cos \alpha_1$  из уравнений для времени и дальности полета и проделав аналогичные вычисления для второго угла, получим:

$$\frac{g^2 T_1^2}{4} + \frac{l^2}{T_1^2} = \frac{g^2 T_2^2}{4} + \frac{l^2}{T_2^2} \Rightarrow$$

$$l = \frac{g}{2} T_1 T_2 \Rightarrow R = \frac{g T_1 T_2}{2\sqrt{2}}$$

Задача 3. Шарик, подвешенный на невесомой пружине, совершает колебания с периодом  $T=3,0$  с. Каким станет период колебаний, если снизу к шарика поднести горизонтальную плиту, с которой шарик будет периодически упруго сталкиваться? Расстояние от положения равновесия шарика до плиты равно половине амплитуды.

Дано:  
 $T=3,0$  с.  
 $x=\frac{A}{2}$

$T_0=?$

Решение:

Пусть сначала шарик совершает колебания по закону:

$$x = A \sin \omega t$$

Время  $t_1$ , за которое шарик проходит от положения равновесия до точки, где поместили плиту, получим из уравнения:

$$\frac{A}{2} = A \sin \omega t_1 \Rightarrow \sin \omega t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{6}$$

Зная, что период колебаний маятника связан с циклической частотой колебаний соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

получим

$$t_1 = \frac{T}{12}$$

Период колебаний маятника после поднесения плиты будет равен:

$$T_0 = T/2 + 2t_1 \Rightarrow T_0 = \frac{2T}{3}$$

Подставляя численные значения, получим:  $T_0=2,0$  с.

Задача 4. Лыжники скатываются со склона горы с углом  $\alpha$ , переходящего в закругление радиусом  $R$ . На каком минимальном расстоянии от места закругления склона должна располагаться стартовая площадка лыжников, чтобы они, достигнув закругления, начали свободный полет? Коэффициент трения между лыжами и снегом  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ . Начальная скорость лыжников равна нулю.

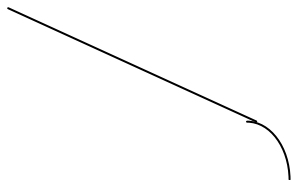
Дано:  
 $\alpha$   
 $R$   
 $\mu < \operatorname{tg} \alpha$   
 $L=?$

Решение:

Для того, чтобы в начале закругления лыжник начал свободный полет, нужно, чтобы в этой точке сила реакции опоры стала равна 0 и на лыжника в момент попадания на закругление действовала только сила тяжести.

Из второго закона Ньютона в проекции на ось, направленную к центру окружности, получим скорость лыжника в этой точке:

$$v^2 = Rg \cos \alpha$$



Далее используем закон сохранения полной механической энергии:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{тр}},$$

где  $E_2$ - полная механическая энергия тела на вершине горы,  $E_1$ - полная механическая энергия в момент перехода на закругление,  $A_{\text{тр}}$  - работа силы трения при прохождении спуска.

Получаем: 
$$mgh - \frac{mv^2}{2} = \mu mgL \cos \alpha$$

$h$ -высота спуска,  $L$ -его длина, поэтому:  $h = L \sin \alpha$ . Решая полученные уравнения, получаем:

$$L = \frac{R}{2(\operatorname{tg} \alpha - \mu)}$$

Задача 5. С одним молем гелия проводят циклический процесс, состоящий из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает  $Q_1=1000$  Дж в виде тепла, при изотермическом расширении еще  $Q_2=500$  Дж. Минимальная температура в процессе составляет  $T=300$ К. Найти максимальную температуру газа и КПД цикла.

Дано:

$$Q_1=1000 \text{ Дж}$$

$$Q_2=500 \text{ Дж}$$

$$T=300\text{К}$$

$T_{\max}$ -?

Решение:

По первому закону термодинамики, тепло, переданное газу, идет на совершение газом механической работы и на изменение его внутренней энергии. При изохорном процессе газ работы не совершает, поэтому все переданное газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии (нагревание), поэтому:

$$Q_1 = \frac{3}{2} \nu R (T_{\max} - T) \Rightarrow T_{\max} = \frac{2Q_1}{3R} + T$$

КПД цикла равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_1 + Q_2}$$

где  $A$  - работа газа за цикл,  $Q_1 + Q_2$  - тепло, переданное газу за цикл.

Пусть  $A_2$  - работа газа при изотермическом расширении при  $T_{\max}$ ,  $A_1$  - работа газа при изотермическом расширении при  $T$  (изменение объема в обоих случаях одинаково), тогда

$$A = A_2 - A_1$$

Для работы газа при изотермическом процессе имеем:

$$A_2 = \nu R T_{\max} \ln \frac{V_2}{V_1} \quad A_1 = \nu R T \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{T_{\max}}{T}$$

По первому закону термодинамики, учитывая, что при изотермическом расширении внутренняя энергия газа не изменяется, получим:

$$A_2 = Q_2 \Rightarrow A = A_2 - A_1 = A_2 - A_2 \frac{T}{T_{\max}} = Q_2 \left( 1 - \frac{T}{T_{\max}} \right) \text{ и}$$

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \left( 1 - \frac{T}{T_{\max}} \right)$$

Подставляя числовые значения, имеем:

$$T_{\max} = 380 \text{ К}$$

$$\eta = 7 \%$$

Задача 6. В вакууме находятся три тонкие концентрические металлические сферы радиусами  $R$ ,  $2R$  и  $4R$ . Первая и третья сферы не заряжены, а второй сообщен заряд  $q$ . Найти потенциал второй сферы после соединения первой и третьей тонким изолированным проводом через небольшое отверстие во второй сфере.

Дано:

$R$   
 $2R$   
 $3R$   
 $q$

Решение:

Потенциалы двух сфер, соединенных проводником, должны быть одинаковы, поэтому после соединения произойдет перераспределение зарядов и заряд внутренней сферы станет  $q_1$ , заряд внешней сферы  $q_3$ .

Так как сферы 1 и 3 были сначала не заряжены, то  
 $q_1 + q_3 = 0$ .

$\varphi$ -?

По принципу суперпозиции полей потенциал любой точки является суммой потенциалов, создаваемых каждой сферой в этой точке

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

Потенциал внутри равномерно заряженной сферы равен:

$$\varphi = k \frac{q}{R_c}, \text{ где } R_c - \text{ радиус сферы}$$

Потенциал снаружи такой сферы:

$$\varphi = k \frac{q}{r}, \text{ где } r - \text{ расстояние до центра сферы.}$$

Приравнявая потенциалы внешней и внутренней сфер, получим:

$$\frac{kq_1}{R} + \frac{kq}{2R} + \frac{kq_3}{4R} = \frac{kq_1}{4R} + \frac{kq}{4R} + \frac{kq_3}{4R} \Rightarrow q_1 = -\frac{q}{3} \text{ и соответственно, } q_3 = \frac{q}{3}$$

Тогда потенциал средней сферы равен:

$$\varphi = \frac{kq}{2R} - \frac{kq}{6R} + \frac{kq}{12R} = \frac{5kq}{12R} = \frac{5q}{48\pi\epsilon_0 R}$$

Задача 7. Кольцо из медной проволоки помещено в поперечное магнитное поле с индукцией  $B=0,10$  Тл. При повороте кольца на угол  $\varphi = 90^\circ$  вокруг диаметра, по нему прошел заряд  $q=1,0$  Кл. Найти массу кольца. Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м, плотность  $D=8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Дано:

$B=0,10$  Тл  
 $\varphi = 90^\circ$   
 $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м  
 $D=8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>  
 $q=1,0$  Кл

Решение:

При повороте кольца на угол  $\varphi = 90^\circ$  вокруг диаметра, в кольце по закону электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}$  и протекает индукционный ток:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \text{ где } R - \text{ сопротивление проводника}$$

$m$ -?

По закону Фарадея:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} = \frac{BS}{R\Delta t}, \text{ где } S - \text{ площадь кольца}$$

Сопротивление проводника:

$$R = \rho \frac{l}{s}, \quad S = \pi r^2, \quad l = 2\pi r$$

$l$ -длина проводника,  $s$ -площадь поперечного сечения проволоки,  $r$ -радиус кольца.

Заряд, протекший по кольцу:

$$q = I\Delta t = \frac{BS}{R} = \frac{B\pi r^2 s}{\rho 2\pi r} = \frac{Brs}{2\rho}$$

Масса кольца равна:

$$m = DV = Dsl = Ds2\pi r \quad V - \text{объем проволоки}$$

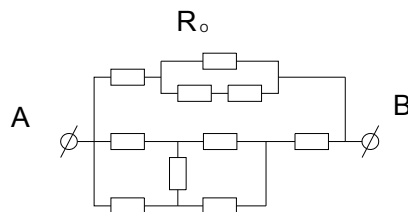
используя два последних уравнения, получаем:

$$m = \frac{4\pi Dq\rho}{B}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$m = 20 \text{ г.}$$

Задача 8. Соединили 10 плавких предохранителей так, как показано на рисунке. Отдельный предохранитель перегорает, если ток через него превышает  $I_0 = 12 \text{ А}$ . Найти силу тока, при превышении которой точки А и В будут изолированы друг от друга.



Дано:  
 $I_0 = 12 \text{ А}$   
 $N = 10$

Решение:

Заметим, что в нижней части схемы есть сопротивление, которое включено между точками с одинаковым потенциалом, поэтому ток через это сопротивление всегда равен 0, и следовательно, его можно не учитывать.

Таким образом, эквивалентная схема содержит две параллельные цепочки с сопротивлением  $5/3 R$  и  $2 R$  и токами  $I_1$  и  $I_2$ .

Точки А и В будут изолированы друг от друга при перегорании первого предохранителя в верхней части цепи.

Для этого ток через это сопротивление должен быть равен  $I_0$ , то есть  $I_1 = I_0$

Так как верхняя и нижняя часть соединены параллельно, получим:

$$5/3 I_1 = 2 I_2 \Rightarrow I_2 = 5/6 I_0$$

$$I=I_1+I_2=11I_0/6.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$I=22 \text{ А.}$$

Задача 9. Электрон влетает в область пространства, где созданы однородные электрическое и магнитное поля, силовые линии которых параллельны друг другу. В начальный момент времени скорость электрона перпендикулярна силовым линиям. Магнитная индукция  $B=1,0\text{Тл}$ . Найти напряженность электрического поля, если после  $n=40$  витков спирали электрон сместился на расстояние  $L=1,8\text{см}$ .

Дано:

$$B=1,0\text{Тл}$$

$$n=40$$

$$L=1,8\text{см}$$

$$q=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m=9 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$E=?$$

Решение:

Электрон будет двигаться вдоль силовых линий по спирали, радиус которой и период обращения электрона определяется величиной магнитной индукции. Используя второй закон Ньютона, получим:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

$q$ - заряд электрона,  $m$ - масса электрона,  $v$ - скорость движения по окружности,  $R$ -радиус окружности (спирали).

Период вращения:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Расстояние, на которое сместится электрон за  $n$  витков, можно вычислить по формуле:

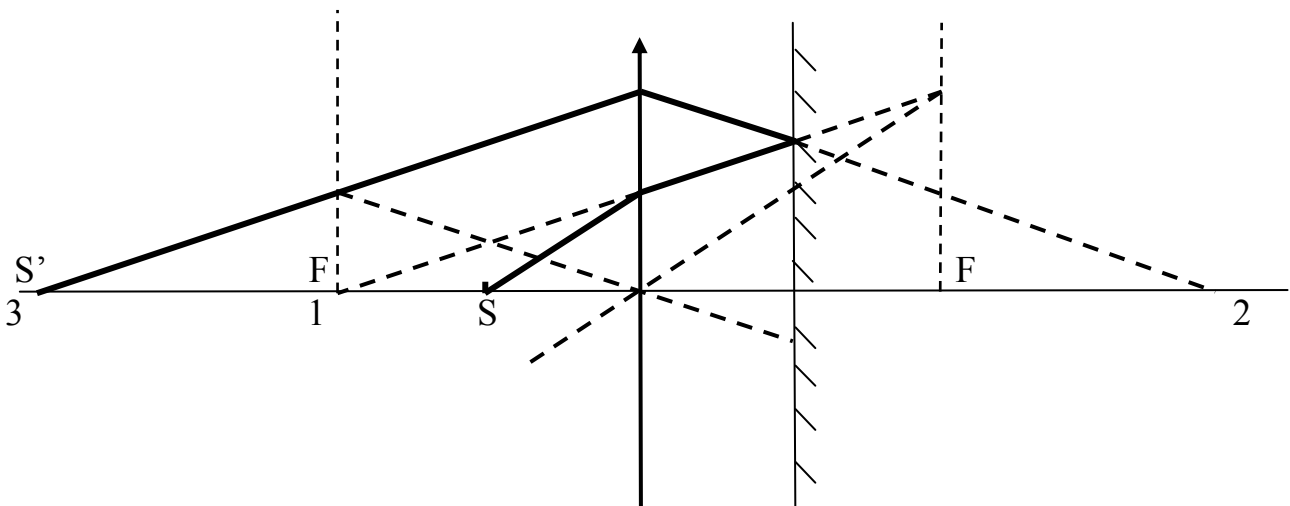
$$L = \frac{at^2}{2} = \frac{qEn^2T^2}{2m}, \text{ где } a = \frac{qE}{m}, \text{ а } t = nT = \frac{2\pi nm}{qB} \Rightarrow$$

$$E = \frac{qLB^2}{2mn^2\pi^2}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$E=10^5 \text{ В/м}$$

Задача 10. Слева от линзы с фокусным расстоянием  $F=50\text{см}$ , на расстоянии  $a=25\text{см}$  от нее, расположена светящаяся точка. Справа на таком же расстоянии расположено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы окажется изображение точки в этой системе?



Дано:  
 $F=50\text{см}$   
 $a=25\text{см}$

Решение:

Используя формулу тонкой линзы, учитывая, что  $a = \frac{F}{2}$  получим, что в отсутствие зеркала, линза дала бы мнимое изображение 1 точки, совпадающее с передним фокусом линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \Rightarrow f = -\frac{1}{F} = -50\text{см}$$

L-?

Это изображение 1 является предметом для зеркала, которое в отсутствие линзы дало бы мнимое изображение 2.

Это изображение 2 будет расположено на расстоянии 75см от зеркала и на расстоянии 1м от линзы.

Изображение 2 будет, в свою очередь, источником для линзы и так как оно оказывается на расстоянии  $2F$  от линзы, то и его действительное изображение окажется на расстоянии  $L=2F=1\text{м}$  слева от линзы.