

11 КЛАСС

Время выполнения: 240 мин

Задача 1.

Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x}} + 2\right)(5x^2 - 14x + 8) = 0.$$

Задача 2.

Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней и $4a + c < 2b$. Какой знак имеет число c ?

Задача 3.

Решите в целых числах уравнение

$$x^2 = y^2 - 2y + 9.$$

Задача 4.

Можно ли внутри равнобедренного треугольника с боковым ребром 5 см и основанием 6 см разместить квадрат площадью $5,9 \text{ см}^2$?

Задача 5.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ ($AB = 4$, $AD = 3$, $AA' = 12$). Найдите наименьшую возможную площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ AC' .

Задача 6.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 2x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 2y^2 + 2y \end{cases}$$

Задача 7.Найдите, при каких значениях a уравнение

$$ax^2 + (a+1)x + 5a - 1 = 0$$

имеет только целые корни.

Задача 8.

Выпишем все буквы русского алфавита без «Ё» и «Й», но с добавлением пробела «_». Каждой букве соответствует десятичный порядковый номер – её код.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Приведём лишь часть таблицы, где буквам соответствуют двоичные пятизначные коды:

А	Б	В	Г	...	Э	Ю	Я
00001	00010	00011	00100	...	11101	11110	11111

Главная проблема столь простого способа передачи информации заключается в защите передаваемых данных. Один из способов защиты информации – это ввод ключа, или кодового слова, который складывают с кодом сообщения перед его посылкой по каналу связи. Сложение производится в двоичной системе счисления по правилам: $0+0=0$ $1+0=1$ $1+0=1$ $1+1=0$ (такая операция называется сложением по модулю два: обратите внимание, что при сложении единиц в старший разряд ничего не добавляется).

Приведём пример. Пусть дана строка: **БУДУ ДОМА**, кодовое слово: **КЛЮЧ**

Б	У	Д	У	_	Д	О	М	А
00010	10011	00101	10011	00000	00101	01110	01100	00001
01010	01011	11110	10111	01010	01011	11110	10111	01010
К	Л	Ю	Ч	К	Л	Ю	Ч	К
01000	11000	11011	00100	01010	01110	10000	11011	01011
З	Ш	Ь	Г	К	О	Р	Ы	Л

Результат кодирования: **ЗШЬГКОРЫЛ**

Без кодового слова восстановить исходное сообщение невозможно. С другой стороны, алгоритм расшифровки очень прост – достаточно снова прибавить к сообщению ключ по тем же правилам:

З	Ш	Ь	Г	К	О	Р	Ь	Л
01000	11000	11011	00100	01010	01110	10000	11011	01011
К	Л	Ю	Ч	К	Л	Ю	Ч	К
01010	01011	11110	10111	01010	01011	11110	10111	01010
00010	10011	00101	10011	00000	00101	01110	01100	00001
Б	У	Д	У	_	Д	О	М	А

Задания:

Предположим, что у нас есть исходное сообщение

ВСТРЕЧА_В_КАФЕ

и результат кодирования (длина ключа не известна)

БУБСМЦГААРЛ_ЦЦ

1. Определите ключ, которым было зашифровано сообщение.

2. Декодируйте сообщение, зашифрованное тем же ключом:

МВРНГРЧТБУАУТЦ

Задача 9.

Система счисления Майя является комбинацией пятеричной и двадцатеричной систем счисления. Первые четыре цифры обозначаются соответствующим количеством точек. Далее каждая очередная пятерка обозначается горизонтальной чертой. В системе счисления Майя нашлось место и для цифры ноль – она обозначается символом, похожим на глаз. На рисунке 1 приведены цифры Майя.

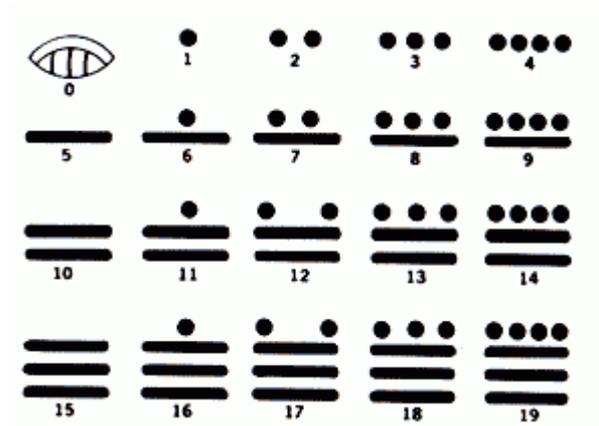


Рис. 1 – Цифры Майя



Так у Майя изображалась число 20. При представлении числа цифры писались не слева направо, как привычно для нас, а сверху вниз (т.е. цифра старшего разряда находилась на «вершине»). Логично предположить, что «вес» разряда получается из «веса» предыдущего разряда домножением на 20, но в этой цепочке есть исключение: вместо $20 \times 20 = 400$ для следующего разряда берется $20 \times 18 = 360$, поэтому и «веса» следующих разрядов не являются степенью 20: 1; 20; 360; 7 200; 144 000; 2 880 000 и т.д. (Существуют разные гипотезы о причинах такого нарушения).

Приведем еще несколько примеров (рис. 2):

$$19 \times 360 + 13 \times 20 + 13 = 7113_{10}$$

$$10 \times 360 + 0 \times 20 + 7 = 3607_{10}$$

$$2 \times 7200 + 0 \times 360 + 6 \times 20 + 5 = 14525_{10}$$

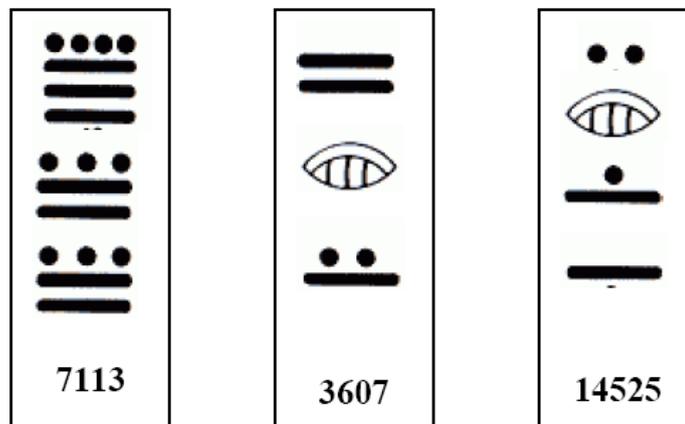


Рис. 2 – Примеры

Задания:

1. Число $288\,725_{10}$ отобразите в системе Майя.
2. Какое десятичное число записано на рис. 3?



Рис. 3

3. Напишите программу, которая будет переводить целые числа из диапазона от 0 до 10 000 000 в систему Майя. При выводе для отображения точек можно использовать точки или звездочки, для изображения горизонтальных линий – тире или знаки подчеркивания, для нуля – обычную цифру ноль. Между цифрами добавлять пустые строки. Например:

Вход:	Выход:
3607	----

	0
	**

Обязательно укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.

Задача 10. На вход машины «Буквоешка» подается цепочка символов, состоящая только из латинских букв «a» и «b». Первое, что делает «Буквоешка», – дописывает в начало строки символ «Z». Далее к строке применяются правила замены подстрок:

- (1) Zaa → Z
- (2) Zbb → Z
- (3) Zab → Za
- (4) Zba → Za
- (5) Zb → Z
- (6) Za → *Yes
- (7) Z → *No

Каждый раз список правил просматривается на предмет применимости, начиная с 1-го. Применение правил останавливается, если в результате применения правила появляется * (она в итоговую строку не включается).

Задания:

1. Что получится на выходе машины, если входная последовательность имеет вид:
 - 1.1) «bbbabbbaaaaa»
 - 1.2) «abbbaaaabb»
2. Напишите последовательность номеров правил, которые применяются при обработке строк:
 - 2.1) «bbbabbbaaaaa»
 - 2.2) «abbbaaaabb»
3. Какую функцию обработки строки реализует приведенный алгоритм?

Современные информационные технологии

4. Реализуйте алгоритм в виде программы. На вход программы поступает строка длиной не более 250 символов, на выходе – результирующая строка. Проверку корректности самой строки проводить не требуется.

Укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.