

Математика 11 класс

(Этап длится 240 минут. Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 12 1. На доске написана система из 12 различных уравнений с 6 неизвестными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Каждое уравнение имеет вид $x_i + x_j + x_k = 0$, где $i \neq j \neq k$ (сумма трех различных неизвестных равна нулю). Могло ли оказаться так, что у системы бесконечно много решений?
- 15 2. Дан описанный четырехугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD .
- 18 3. Найдите все вещественные c , при которых сумма девярых степеней корней уравнения $x^2 - x + c = 0$ равна нулю, и сумма пятнадцатых степеней тоже равна нулю. Замечание: корни могут быть комплексными.
- 25 4. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и QM пересекаются в точке H . Докажите, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки P, Q, M, N лежат на одной окружности.
- 32 5. Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S . Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.
- 28 6. В правильном тетраэдре с ребром, равным 8, отмечены 25 различных точек: 4 вершины и 21 произвольная точка внутри тетраэдра. Никакие 4 отмеченные точки не лежат в одной плоскости. Докажите, что найдется тетраэдр с вершинами в отмеченных точках, объем которого меньше единицы.
7. Даны m подмножеств n -элементного множества: A_1, \dots, A_m . Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i . Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^m |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \dots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m , то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

- 15 а) Докажите это неравенство при $m = 3$.
- 25 б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m .