Условия и решения, вариант для разбора.

№1

На доске написана система из 12 различных уравнений с 6 неизвестными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Каждое уравнение имеет вид $x_i + x_j + x_k = 0$, где $i \neq j \neq k$ (сумма трех различных неизвестных равна нулю). Могло ли оказаться так, что у системы бесконечно много решений?

Решение. Могло. Пусть $x_1 = x_2 = 2t$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = -t$ (при произвольном действительном t). Тогда равны нулю $\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$ сумм, а именно:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$$

Комментарий: а для 13 такое уже невозможно.

Критерии.

– Попытка доказывать неверный ответ,

– Приводятся какие-то рассуждения о системах линейных уравнений, не содержащие явного указания системы требуемого вида, имеющей бесконечно число решений, или неявного доказательства ее существования,

± Приводится система требуемого вида, имеющая бесконечно много решений, но не написано доказательство того, что система имеет бесконечно много решений.

№2

Дан описанный четырехугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

Решение. Докажем, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают.

В самом деле, обозначим точки касания T_B и T_D соответственно. Тогда $|AT_B| = \frac{|AB|+|AC|-|BC|}{2}$ и $|AT_D| = \frac{|AD|+|AC|-|DC|}{2}$. Критерий описанности четырехугольника $|AB|+|CD| = |BC|+|AD|$, это равенство равносильно $|AT_B| = |AT_D|$.

Теперь легко видеть, что картинка однозначно задается радиусом вписанных окружностей треугольников ABC и ADC и расстояниями от точки касания до точек A и C. Значит картинка переходит в себя при симметрии относительно прямой AC, при этом точки B и D меняются местами. Но это означает, что BD перпендикулярна AC, итак ответ $90°$.

Критерии.

– задача решалась исходя из неверного понимания условия (например, что четырехугольник $ABCD$ вписанный вместо описанного),

– решен любой частный случай, например когда диагональ BD является биссектрисой угла четырехугольника,

∓ задача решена при дополнительном предположении, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, этот факт никак не обоснован,

+/2 доказано, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, нет вывода утверждения задачи из этого факта.

№3

Найдите все вещественные c, при которых сумма девятых степеней корней уравнения $x^2 - x + c = 0$ равна нулю, и сумма пятнадцатых степеней тоже равна нулю. Замечание: корни могут быть комплексными.

Первое решение. Обозначим корни через x_1 и x_2 и воспользуемся теоремой Виетта. Задача переформулируется так: известно что $x_1^{15} + x_2^{15} = x_1^9 + x_2^9 = 0$ и $x_1 + x_2 = 1$, найти $x_1 x_2$.

Для начала заметим, что $x_1 x_2 \neq 0$, поскольку в противном случае одно из x_1, x_2 равно нулю, тогда $x_1^9 + x_2^9 = 0$ влечет что и второе равно нулю, что противоречит $x_1 + x_2 \neq 0$.

Теперь посмотрим, что получится если сумму девятых степеней домножить на суммы шестых (ноль поскольку сумма девятых ноль) и вычесть сумму пятнадцатых (тоже ноль). $0 = (x_1^9 + x_2^9)(x_1^6 + x_2^6) - x_1^{15} + x_2^{15} = x_1^6 x_2^6 (x_1^3 + x_2^3) = c^6 (x_1^3 + x_2^3)$. Поскольку $c \neq 0$ имеем $x_1^3 + x_2^3 = 0$ **(!)**. С другой стороны $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\big((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\big) = 1 \cdot \big(1^2 - 3c\big)$ откуда $c = \frac{1}{3}$.

Второе решение. Так же как в первом решении докажем равенство (!), вместо последнего шага сделаем следующее. Заметим, что если x_1, x_2 – действительные корни, то одновременное выполнение (!) и $x_1 + x_2 \neq 0$ невозможно из-за монотонности куба.

Если x_1, x_2 не действительные то они сопряжены, тогда их кубы – тоже. Если сумма двух сопряженных чисел равна нулю, то их аргументы имеют вид $\frac{\pi}{2} + \pi k$, то есть до возведения в куб аргумент имел вид $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + \pi k)$, или эквивалентно $\frac{m\pi}{6} + n\pi$ где $m \in \{1, 3, 5\}$. Обозначив аргумент через r имеем для тех случаев соответственно $2\cos\frac{\pi}{6} r = 1$, $2\cos\frac{\pi}{2} r = 1$, $2\cos\frac{5\pi}{6} r = 1$. В первом случае $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, два других невозможны поскольку аргумент – неотрицательное число. Получаем $c = x_1 x_2 = r^2 = \frac{1}{3}$.

Критерии.

− правильный ответ без доказательства

∓ корректно выписана система полиномиальных уравнений на c, далее утверждается, что $c = \frac{1}{3}$ является ее корнем, доказательство того, что других корней нет, отсутствует или неверно,

+/2 в работе корректно доказано, что все возможные значения c принадлежат некоторому конечному множеству, элементы которого выписаны явно (не как корни системы уравнений), но множество содержит не только $\frac{1}{3}$, и все множество указано в качестве ответа,

± верное решение за исключением случая действительных корней,

+. верное решение, но отсутсвует проверка, что $\frac{1}{3}$ подходит (доказано только что числа, не равные $\frac{1}{3}$, не подходят). В случае, если в решении присутсвуют оба дефекта, упомянутые в критериях на ± и +. – ставится все равно ±.

№4

Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и QM пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки P, Q, M, N лежат на одной окружности.

Решение. Для этой задачи мы приведем нелюбимое геометрами счетное решение, но попробуем хотя бы счет сделать эстетичным. Начнем с обозначений. Пусть длина стороны квадрата ℓ. Продлим AH до пересечения с PQ (естественно, нам же ровно про эти два отрезка надо доказать, что они перпендикулярны), точку пересечения обозначим через R. Длины отрезков BP, PR, RQ и QD обозначим через x, y, z и t соответственно.

Мы ввели переменных слегка с запасом, задумаемся, какие соотношения на них мы знаем. Во-первых, записав теорему Пифагора для треугольника PCQ имеем: $(y+z)^2 = (\ell - x)^2 + \ell - t)^2 = 2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2$. Во-вторых, запишем теорему Чевы для треугольника APQ. Заметим что $AP = \sqrt{\ell^2 + x^2}$, поскольку BD – биссектриса треугольника ABP, она делит AP в отношении боковых сторон, то есть $AM = \frac{\ell}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2}$ и $MP = \frac{x}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2}$. Аналогично $AN = \frac{\ell}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}$ и $NQ = \frac{t}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}$. Таким образом, т. Чевы гласит:

$$|PR||QN||AM| = y\frac{t}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}\frac{\ell}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2} = z\frac{\ell}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}\frac{x}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2} = |RQ||NA||MP|$$

Сокращая одинаковые множители (все они не равны нулю, ибо все не меньнше $\ell > 0$) получаем $yt = zx$, мы позволим себе вольность записывать это соотношение как $\frac{y}{z} = \frac{x}{t}$, поскольку все переменные положительны из картинки.

Теперь поймем, как записывается условие задачи в терминах введенных переменных. С описанностью $PQNM$ все просто: эти четыре точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $|AP| \cdot |AM| = |AQ| \cdot |AN|$, пользуясь ранее выписанными длинами имеем $(\ell^2 + x^2)\frac{\ell}{\ell+x} = (\ell^2+t^2)\frac{\ell}{\ell+t}$ что равносильно $(x-t)\big(\ell^2 - (x+y)\ell - xt\big) = 0$.

Чуть сложнее с условием, что $AR \perp PQ$. Из него, очевидно, следует что $y^2 - z^2 = (\ell^2 + x^2) - (\ell^2 + t^2) = x^2 - t^2$ (для прямоугольных треугольников APR и AQR с общим катетом разность квадратов других катетов равна разности квадратов гипотенуз). Обратное тоже верно: запишем теорему косинусов для треугольников APR и AQR и вычтем равенства. Имеем: $(\ell^2 + x^2) - (\ell^2 + t^2) = y^2 - z^2 + |AR|^2 - |AR|^2 - 2y|AR|\cos\angle PRA + 2z|AR|\cos(180^\circ - \angle PRA)$. Значит равенство $x^2 - t^2 = y^2 - z^2$ влечет $2(y+z)|AR|\cos\angle PRA = 0$, но это и означает, что скалярное произведение отрезков AR и PQ равно нулю, то есть для алгебраиста они перпендикулярны. Для геометра – что отрезки перпендикулярны или один из них равен нулю, что невозможно в условиях задачи: $|PQ| = 0$ означает, что обе точки P и Q совпали с C, но они на сторонах квадрата а не в вершине. $|AR| = 0$ означает, что A лежит на PQ, что тоже противоречит тому, что точки взяты на сторонах а не на их продолжениях.

Итак, в задаче требуется доказать равносильность двух систем

$$\boxed{\begin{cases} (y+z)^2 = 2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2 \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{t} \\ (x-t)\big(\ell^2 - (x+y)\ell - xt\big) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+z)^2 = 2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2 \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{t} \\ y^2 - z^2 = x^2 - t^2 \end{cases}}$$

Этим и займемся, благо из трех уравнений два совпадают, надо что-то сделать с третьим. Левое оставим как есть, преобразуем правое.

Представим себе, что про переменные y и z нам сообщена их сумма и отношение: $y + z = a$ и $\frac{y}{z} = b$, как выразить $y^2 - z^2$ через a, b? Очевидно $z = a\frac{1}{b+1}$, $y = a\frac{b}{b+1}$, $y - z = a\frac{b-1}{b+1}$, $y^2 - z^2 = (y+z)(y-z) = a^2\frac{b-1}{b+1}$. Подставив a^2 и b из первого и второго уравнения системы соответственно, видим что третье уравнение переписалось в виде $\big(2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2\big)\frac{x-t}{x+t} = x^2 - t^2$, после преобразований получаем $(x-t)\big(2\ell^2 - 2(x+y)\ell - 2xt\big) = 0$ – то есть то же, что и в левой системе, с точностью до домножения на константу. Итак, системы действительно равносильны – задача решена.

Комментарий. То что третье уравнение оказывается приводимым означает, что есть два разных случая, когда точки P, Q, M, N лежат на одной окружности. Один (очевидный) – когда $x = t$, и картинка симметрична. Другой – когда $\ell^2 - (x+y)\ell - xt$, в более геометрических терминах: когда PQ виден из точки A под углом 45°.

Критерии.

$\mp$ Доказано что если $\angle PAQ = 45^\circ$, то точки P, Q, M, N лежат на одной окружности.

$\pm$ Доказано в одну сторону, при том что обращение рассуждений не тривиально.

№5

Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.

Для начала мы приведем ложное решение пятой задачи, с нетривиальной дырой. Желающим развить свою математическую культуру читателям предлагается в качестве полезного и непростого упражнения самостоятельно найти дыру в решении. Те кого интересует просто как решается задача №5 могут сразу читать настоящее решение ниже.

Ложное решение. Обозначим данные n чисел за $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Без ограничения общности будем считать, что $S \geq 0$. Если это не так, то будем доказывать утверждение задачи для чисел $y_i = -x_i$ с положительной суммой. Из него будет следовать утверждение исходной задачи.

Докажем, что среди данных чисел существует набор из подряд идущих, удовлетворяющих неравенству из условия. То есть найдутся такие натуральные s и t $(1 \leq s \leq t \leq n)$ что подмножество $x_s, x_{s+1}, \ldots, x_t$ – искомое.

Обозначим через m_1 первый индекс, для которого $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_1} \geq S/100$, через m_2 – первый индекс, для которого $x_1+x_2+\cdots+x_{m_2} \geq 2S/100$, и так далее: $x_1+x_2+\cdots+x_{m_i} \geq iS/100$ по всем i до 100. Рассмотрим также разности $a_i = x_1+x_2+\cdots+x_{m_i}-iS/100$. Заметим что m_{100} и a_{100} определены, поскольку по крайней мере для n выполняется неравенство $x_1+x_2+\cdots+x_n = S \geq iS/100$ для любого i. Формально доопределим: $m_0 = 0$ и $a_0 = 0$. Заметим теперь, что так как выбранные нами индексы были первыми для своего условия и так как все числа x_i по модулю не превосходят 1, то все a_i лежат на отрезке $[0;1]$. Чисел a_i всего 101 (для i от 0 до 100). Значит найдутся два индекса i и j, для которых $|a_i - a_j| \leq 1/100$. Без ограничения общности $j > i$. Тогда $|(x_1+x_2+\cdots+x_{m_i})-(x_1+x_2+\cdots+x_{m_j})-iS/100+jS/100| \leq 1/100$ или $|x_{m_i}+x_{m_i+1}+\cdots+x_{m_j}-(j-i)S/100| \leq 1/100$. Тем самым, числа $x_{m_i+1}+\cdots+x_{m_j}$ — искомые.

Настоящее решение. Обозначим данные n чисел через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Без ограничения общности будем считать, что $S \geq 0$. Если это не так, то будем доказывать утверждение задачи для чисел $y_i = -x_i$ с положительной суммой. Из него будет следовать утверждение исходной задачи.

Докажем, что среди данных чисел существует набор из подряд идущих, удовлетворяющих неравенству из условия. То есть найдутся такие натуральные s и t $(1 \leq s \leq t \leq n)$ что подмножество $x_s, x_{s+1}, \ldots, x_t$ – искомое.

Обозначим через m_1 первый индекс, для которого $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_1} \geq S/100$, через m_2 – первый индекс, для которого $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_2} \geq 2S/100$, и так далее: $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} \geq iS/100$ по всем i от 1 до 99. Рассмотрим также разности $a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} - iS/100$. Заметим что m_i и a_i определены, поскольку по крайней мере для n выполняется неравенство $x_1+x_2+\cdots+x_n = S \geq iS/100$ для любого i. Формально доопределим: $m_0 = 0$ и $a_0 = 0$. Заметим теперь, что так как выбранные нами индексы были первыми для своего условия и так как все числа x_i по модулю не превосходят 1, то все a_i лежат на отрезке $[0;1]$.

Предположим, все a_i лежат на отрезке $[0;1-1/100]$. Тогда, так как чисел a_i всего 100 (для i от 0 до 99), найдутся два индекса i и j, для которых $|a_i - a_j| \leq 1/100$. Без ограничения общности $j > i$. Тогда $m_j \geq m_i$ по определению чисел m_i. Получаем: $|(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_j}) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i}) + jS/k - iS/k| \leq 1/k$ или $|x_{m_i} + x_{m_i+1} + \cdots + x_{m_j} - (j-i)S/k| \leq 1/k$. Заметим, что можно взять $n = j - i$, поскольку $j - i > 0$ и $j - i \leq j < 100$. Тем самым, числа $x_{m_i}, x_{m_i+1} + \cdots + x_{m_j}$ — искомые.

Пусть теперь для некоторого i разность a_i попала на полуинтервал $(1-1/100, 1]$. Докажем, что в этом случае подмножество $x_1, \ldots, x_{m_i-1}$ — искомое. Для этого достаточно показать, что

$$iS/k - 1/k < x_1 + \cdots + x_{m_i-1} \leq iS/100.$$

Второе неравенство следует из определения m_i, ведь m_i – это первый индекс для которого сумма стала не меньше $iS/100$. Первое неравенство равносильно следующему: $x_1+\cdots+x_{m_i-1}-iS/k > -1/100$. Но $x_1 + \cdots + x_{m_i-1} - iS/k = a_i - x_{m_i}$, и это больше $-1/100$, так как $a_m > 1 - 1/100$ и $x_m \leq 1$.

Критерии.

– Рассуждения, какой должна быть сумма выбранного подмножества, без указаний, как выбрать подмножество с такой суммой или почему это возможно сделать.

– Решение задачи в частном случае (например, если $|S| \leq 2$ или для конкретного набора чисел).

– Доказательство более слабого утверждения, например построение требуемого подмножества для $1 \leq n \leq 100$ (либо $0 \leq n < 100$) вместо требующегося в задаче $1 \leq n < 100$; за исключением более слабого утверждения, оприсанного в критерии на $\mp$.

$\mp$ Доказано более слабое утверждение: что в условиях задачи можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{99}$. Это гипотетический критерий, ни одной работы, удовлетворяющей ему, не обнаружено.

№6

В правильном тетраэдре с ребром, равным 8, отмечены 25 различных точек: 4 вершины и 21 произвольная точка внутри тетраэдра. Никакие 4 отмеченные точки не лежат в одной плоскости. Докажите, что найдется тетраэдр с вершинами в отмеченных точках, объем которого меньше единицы.

Решение. Объем тетраэдра с ребром 8 есть $128\sqrt{2}/3$, поскольку этот тетраэдр получается если взять не соединенные ребром вершины куба с ребром $4\sqrt{2}$. Заметим, что $128\sqrt{2}/3 < 64$, значит если удастся тетраэдр разрезать на 64 тетраэдра с вершинами в отмеченных точках, то один из тетраэдров разбиения будет иметь объем меньше 1.

Докажем, что если внутри тетраэдра выбраны k точек, так что если добавить к ним 4 вершины тетраэдра, то среди полученных $k+4$ точек никакие 4 не лежат в одной плоскости, тогда тетраэдр можно разрезать на $3k+1$ тетраэдр с вершинами в выбранных точках.

Индукция по k. При $k = 0$ считаем что тетраэдр разбит на один тетраэдр – самого себя. Пусть для k доказано, докажем для $k+1$. Возьмем любые k из внутренних точек, по предположению индукции разобьем тетраэдр. Теперь добавим последнюю точку, и посмотрим, внутрь какого тетраэдра разбиения она попала. Этот тетраэдр разобьем на четыре, каждый из которых образован новой точкой и гранью разбиваемого тетраэдра. Разбитый тетраэдр заменим в разбиении четырьмя новыми, число тетраэдров в разбиении выросло на 3 (4 добавили 1 убрали).

Итак, при $k = 21$ имеем разбиение на 64 тетраэдра, что и требовалось.

Критерии.

$\mp$ идея разбивать на непересекающиеся тетраэдры и пользоваться принципом Дирихле, но отсутствует реализация (например, в корне неправильное число тетраэдров в разбиении, не 64 или 63, либо не доказано, почему можно разбить на столько тетраэдров, либо объем тетраэдра не посчитан или посчитан неверно, что не позволяет довести решение),

$+.$ вычислительная ошибка не влияющая на общий план решения при безупречной канве решения.

№7

Даны m подмножеств n-элементного множества: $A_1, \ldots, A_m$. Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \cdots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

а) Докажите это неравенство при $m = 3$.

б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.

Решение. Посчитаем левую часть иным образом. Для каждого элемента множества из n элементов посчитаем, в какое количество пересечений троек $A_i \cap A_j \cap A_k$ он входит, и просуммируем эти количества по всем элементам. Легко видеть, что если элемент входит в a_i множеств, то он входит ровно в a_i^3 пересечений троек множеств (в качестве первого множества тройки годятся a_i множеств, в качестве второй и третьей — тоже a_i). Таким образом, левая часть это $n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)$. Теперь заметим, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = |A_1| + \cdots + |A_m|$, так как обе суммы подсчитывают двумя способами одну и ту же величину: количество пар (множество; элемент множества). Итого, надо доказать:

$$n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству между средним кубическим и средним арифметическим:

$$\sqrt[3]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Замечание. Это одна из лемм (Lemma 6) в статье: https://arxiv.org/pdf/1808.08363.pdf.

Критерии.

Обратите внимание! Любой положительный знак по задаче 7б автоматически дублируется в задачу 7а, кроме случая, когда по 7а написан отдельный текст, получающий более высокую оценку, чем текст за 7б. Если в вашей работе дублирование не произошло – это техническая ошибка, на которую следует подать апелляцию.

$-$ решение основано на неправильной формуле включения-исключения,

$-.$

$\mp$ в пункте а) вводятся переменные и явным образом выписываются полиномиальные неравенства, для которых предъявляется работоспособный план доказательства, который не реализован (возможно из-за арифметической ошибки),

$+/2$

$\pm$ сведено к неравенству между средним кубическим и средним арифметическим,

$+.$ арифметическая ошибка при идеальной канве решения, если оно не является чисто вычислительным.