Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 9-1. Вычислите сумму $1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+9^2+10^2-\ldots+2017^2+2018^2$.

Ответ: 4074341.

Решение. Заметим, что при любом k верно равенство $k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4$. Поэтому вся сумма равна $1+504\cdot 4+2018^2=4074341$. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	16	Верное решение с арифметической ошибкой
−/+	8	Верная идея решения с абсолютно неверным подсчетом и ответом
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-2. Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошёл с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны).

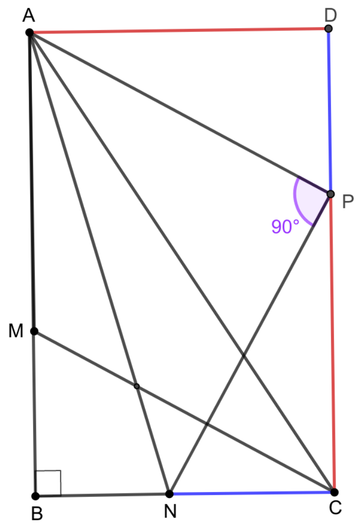
Ответ: Сколько угодно.

Решение. Каждый ученик выполняет перестановку: если он кого-то недолюбливает, то перестановку, меняющую его имя и имя того, кого он недолюбливает; иначе перестановка тривиальна. Другими словами, никакие два имени не станут одинаковыми после прохождения любого из учеников. И для каждого имени в результате есть имя, которое привело бы к такому результату. Раз это утверждение верно для любого отдельного ученика, это же требование верно и для последовательности учеников. Таким образом, зная, какое имя должно прийти в итоге и кто кого недолюбливает, для каждого ученика известна выполняемая им перестановка. Таким образом, для каждого ученика можно по результату перестановки, который он должен получить, найти, какое имя должно было ему прийти. Таким образом, в обратном направлении по цепочке восстанавливается, какое имя следует написать изначально. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+.	16	Незначительные пробелы в доказательстве
+/2	10	Доказательство того, что передача конверта – перестановка, и неправильный ответ.
−.	6	Незначительные продвижения
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-3. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой. На катете AB выбрана точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC выбрана точка N так, что $CN = MB$. Найдите острый угол между прямыми AN и CM.

Ответ: $45°$.



Решение. Достроим треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$ и выберем на его стороне CD точку P так, что AP параллельно CM. Тогда $PC = AD, DP = CN$, и прямоугольные треугольники ADP и CPN равны, причём $\angle DAP = \angle CPN$. Поэтому $\angle APD + \angle CPN = 90°$ и $\angle APN = 90°$, то есть APN — равнобедренный прямоугольный треугольник. Значит, $\angle PAN = 45°$ и, в силу параллельности прямых AP и CM, острый угол между прямыми AN и CM тоже составляет 45 градусов. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-4. Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

Ответ: $2n+6$ при $n \geq 2$, 6 при $n=1$.

Решение. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника — она является концом для двух или для трех сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы по $120°$.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трех сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами — которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника — она является концом для двух или для трех сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы по $120°$.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трех сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами — которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками.

Таким образом, мы получили изображение *мультиграфа* на плоскости. Для него верна *формула Эйлера* $F-E+V=2$, где F, E, V – коли-

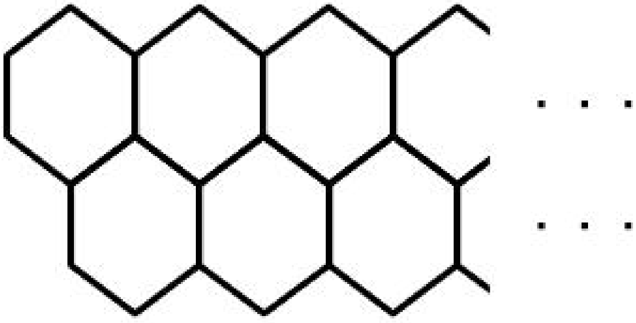


Рис. 1: Пример многоугольника, сделанного из шестиугольников.

чество граней, ребер и вершин соответственно. Поскольку все вершины имеют степень 3, $3V = 2E$. Кроме того $F = n + 1$, поскольку это все шестиугольники и внешняя грань. Из этих трех уравнений выводится $E = 3n - 3$. Пройдем по внешнему циклу. При этом мы шли по всем n шестиугольникам, значит при $n > 1$ не менее чем n раз меняли шестиугольник, по которому идем (внимание: этот утверждение не верно если $n = 1$: так и ходили по одному шестиугольнику, ни разу его не поменяв). Значит, во внешнем цикле не менее n ребер, значит в остальном графе не больше $2n - 3$ ребер. Каждое из них состоит ровно из одного отрезка, бывшего стороной для двух шестиугольников, поскольку внутри многоугольника не может быть точек, являющихся концами ровно для двух отрезков сторон. Значит, внутри не больше $4n - 6$ сторон шестиугольников, склеенных по парам, значит на границе лежит не менее $2n + 6$ сторон. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Незначительные ошибки в доказательстве
+/−	14	Серьезные пробелы в доказательстве (например, не доказано существование шестиугольника, касающегося других не более чем по 2 сторонам)
+/2	10	Имеется утверждение о том, что минимальный периметр для n и $n+1$ отличается на 2, но доказательство отсутствует. Пример есть
−/+	6	Есть пример на $2n+6$. Имеется утверждение о том, что минимальный периметр для n и $n+1$ отличается на 2, но доказательство отсутствует
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-5. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

Ответ: 12 (2, 3, 4, 6).

Решение. Имеет место один из двух случаев.

А) Пусть оба наименьших делителя p и q — простые числа. Тогда простым будет число $r = (n/p + n/q) - (p + q)$, и $pqr = (p + q)(n - pq)$. Поскольку числа $p + q$ и pq взаимно просты, получаем $r = p + q$, откуда $p = 2$ и $n = 4q$. Но тогда в силу выбора q получаем $q = 3$ и $n = 12$.

Б) Пусть наименьшие делители имеют вид p и p^2, где p простое. Этот случай разбирается аналогично. □

Замечание. Возможна ситуация, когда число имеет всего три собственных делителя. Тогда упомянутая в условии разность есть разность между наибольшим и наименьшим из собственных делителей. Но любое число с тремя собственными делителями есть степень простого p^4, а разность $p^3 - p$ простым числом быть не может.

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	16	Незначительные ошибки
+/2	10	Значительные пробелы в решении
−.	6	Есть идея, что $pnq = (p+q)(n-pq)$
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-6. В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

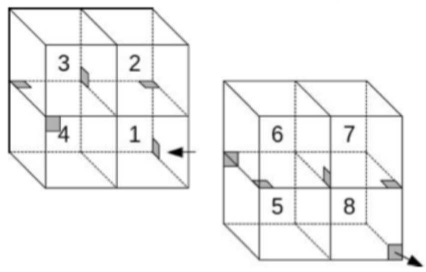
В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

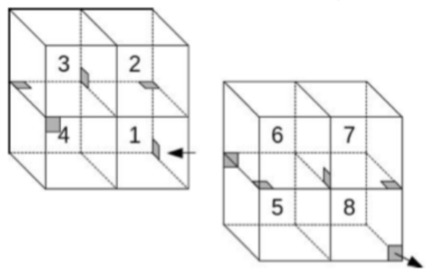
Замечание. Для разных путей, дающих верный ответ в этой задаче, может получиться разное число коробок с прогрызенными противоположными стенками. Участникам, у которых число таких коробок окажется наибольшим, будут вручены памятные призы. (Это достижение не влияет на оценку работы и присвоение званий победителя и призера олимпиады.)

Ответ: $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$.

Решение. Условия задачи требуют, чтобы мышь прогрызла каждую коробку как минимум в двух местах: чтобы попасть в нее и чтобы покинуть её. Таким образом, число отверстий не меньше удвоенного числа коробок, то есть $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$. Построим путь мыши с таким числом отверстий, причем вовсе без коробок с прогрызенными противоположными стенками. Мы будем составлять его из следующих кусочков:



Данный рисунок изображает способ посетить все коробки размера 1 дм внутри одной коробки размера 2 дм, прогрызя заштрихованные места. Заметим, что каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Если теперь мы обойдём все коробки размера 2 дм в данной коробке размера 4 дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2 дм описанным способом, то получим обход коробки размера 4 дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. И так далее: если обойти все коробки размера 2^k дм в данной коробке размера 2^{k+1} дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2^k дм описанным способом, то получим обход коробки размера 2^{k+1} дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Чтобы в результате получить замкнутый путь внутри сундука, коробки размера 2^{n-1} можно обойти по следующей схеме:



Теперь, в какой бы коробке этого замкнутого пути ни завелась мышь, она сможет проследовать по этому пути, побывав ровно один раз в каждой коробке, вернувшись в изначальную, и сделав ровно по одному отверстию в двух соседних стенках каждой коробки. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	16	Верное решение с нестрогими рассуждениями
−/+	10	Верная оценка и идея индуктивного перехода, доказательства нет
−.	6	Верная оценка, дальнейших продвижений нет
−	0	Решение полностью неверно/только ответ