Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 10-1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$, $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

Ответ: 1.

Решение. Приведём два решения задачи.

Первое Решение. Обозначим $a + b + c = \lambda$. Теорема Виета позволяет написать кубическое уравнение, зависящее от параметра λ, корнями которого является набор a, b, c, соответствующий данному λ:

$$t^3 - \lambda t^2 + 9t - (10 - \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t - 1)(t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda)) = 0.$$

Отсюда видно, при любом λ есть корень $t = 1$, то есть значение $x = 1$ подходит. Осталось доказать, что нет других значений, являющихся корнями при любом λ (хотя это и так очевидно). В самом деле, $t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda) = 0$ означает $t = \dfrac{\lambda - 1 \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 39}}{2}$. Возьмем любую пару значений λ, при которой дискриминант принимает одно и то же положительное значение, например при $\lambda = 10$ и $\lambda = -12$ имеем $t \in \{0, 9\}$ и $t \in \{-11, -2\}$ – пересечений нет. Итак, ответ $x = 1$.

Второе решение. Вычтем из первого равенства второе, преобразовав, получим $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$. Отсюда следует, что одно из a, b, c равно единице. Другие x не подходят, так как тройки $(a, b, c) = (4, 1, 1)$ и $(a, b, c) = (0, 9, 1)$ удовлетворяют условию. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
$+$	20	Полное решение
$+.$	18	Не доказано, почему нет других , кроме 1, или есть незначительная ошибка в доказательстве.
$+/-$	16	Значительные ошибки в доказательстве (несколько переходов с делением на, возможно, нулевые, непонимание условия (при наличии необходимых для доказательства вычислений)).
$-/+$	10	Рассмотрены два частных случая, которые показывают, что может быть равно только 1. Но доказательства того, что $=1$, нет.
$-.$	6	Найден только один случай $(1,1,4)$ или $(0,1,9)$ и утверждается, что $\in \{1,4\}$ или $\in \{0,1,9\}$.
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ.

Задача 10-2. Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошёл с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны).

Ответ: Сколько угодно.

Решение. Каждый ученик выполняет перестановку: если он кого-то недолюбливает, то перестановку, меняющую его имя и имя того, кого он недолюбливает; иначе перестановка тривиальна. Другими словами, никакие два имени не станут одинаковыми после прохождения любого из учеников. И для каждого имени в результате есть имя, которое привело бы к такому результату. Раз это утверждение верно для любого отдельного ученика, это же требование верно и для последовательности учеников. Таким образом, зная, какое имя должно прийти в итоге и кто кого недолюбливает, для каждого ученика известна выполняемая им перестановка. Таким образом, для каждого ученика можно по результату перестановки, который он должен получить, найти, какое имя должно было ему прийти. Таким образом, в обратном направлении по цепочке восстанавливается, какое имя следует написать изначально. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	16	Незначительные пробелы в доказательстве
+/2	10	Доказательство того, что передача конверта – перестановка, и неправильный ответ.
−.	6	Незначительные продвижения
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-3. Гриша нарисовал на плоскости выпуклый 100-угольник и провел все его диагонали, и, о чудо, ни в какой точке кроме вершин 100-угольника не пересеклось больше двух отрезков. Сколькими способами Гриша может обвести маркером часть имеющихся на рисунке линий, чтобы получить треугольник (не обязательно состоящий из целых диагоналей и, быть может, содержащий внутри себя не обведенные линии)?

Ответ: $\binom{100}{3}+4\binom{100}{4}+5\binom{100}{5}+\binom{100}{6}$.

Решение. Найдём концы диагоналей, обведённые Гришей. Каждая диагональ имеет два конца, но некоторые концы могут совпадать, но не более двух в одной точке. Таким образом, мы получим от 3 до 6 вершин стоугольника. Найдём соответствующее количество треугольников.

Для трёх вершин количество треугольников равно количеству способов выбрать три различные вершины $\binom{100}{3}$.

Для четырёх вершин пара соседних является стороной треугольника (другие две не совпадают, а лишь их содержат). Таким образом, количество равно $4\binom{100}{4}$.

Для пяти вершин нужно выбрать пять вершин и среди них одну, которая является вершиной треугольника. Таким образом, количество равно $5\binom{100}{5}$.

Для шестиугольника способ единственный после выбора шести вершин, то есть $\binom{100}{6}$.

Итого, в сумме получаем $\binom{100}{3}+4\binom{100}{4}+5\binom{100}{5}+\binom{100}{6}$. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение (в т. ч. для n-угольника)
+.	15	Незначительные пробелы в решении (в т. ч. не доказано, что можно сопоставлять треугольники и n-угольники)
+/−	10	Серьезные пробелы в доказательстве
−.	5	Идея о разделении треугольников на 4 типа
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-4. В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

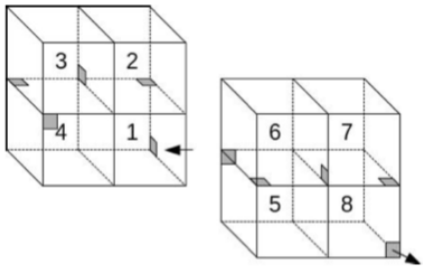
В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

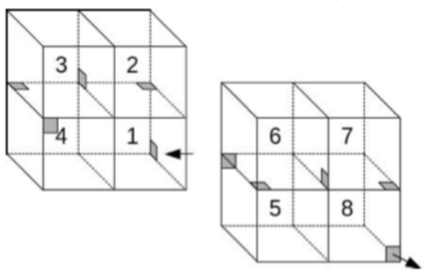
Замечание. Для разных путей, дающих верный ответ в этой задаче, может получиться разное число коробок с прогрызенными противоположными стенками. Участникам, у которых число таких коробок окажется наибольшим, будут вручены памятные призы. (Это достижение не влияет на оценку работы и присвоение званий победителя и призера олимпиады.)

Ответ: $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$.

Решение. Условия задачи требуют, чтобы мышь прогрызла каждую коробку как минимум в двух местах: чтобы попасть в нее и чтобы покинуть её. Таким образом, число отверстий не меньше удвоенного числа коробок, то есть $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$. Построим путь мыши с таким числом отверстий, причем вовсе без коробок с прогрызенными противоположными стенками. Мы будем составлять его из следующих кусочков:



Данный рисунок изображает способ посетить все коробки размера 1 дм внутри одной коробки размера 2 дм, прогрызя заштрихованные места. Заметим, что каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Если теперь мы обойдём все коробки размера 2 дм в данной коробке размера 4 дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2 дм описанным способом, то получим обход коробки размера 4 дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. И так далее: если обойти все коробки размера 2^k дм в данной коробке размера 2^{k+1} дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2^k дм описанным способом, то получим обход коробки размера 2^{k+1} дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Чтобы в результате получить замкнутый путь внутри сундука, коробки размера 2^{n-1} можно обойти по следующей схеме:



Теперь, в какой бы коробке этого замкнутого пути ни завелась мышь, она сможет проследовать по этому пути, побывав ровно один раз в каждой коробке, вернувшись в изначальную, и сделав ровно по одному отверстию в двух соседних стенках каждой коробки. $\square$

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$+/-$	16	Верное решение с нестрогими рассуждениями
$-/+$	10	Верная оценка и идея индуктивного перехода, доказательства нет
$-.$	6	Верная оценка, дальнейших продвижений нет
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-5. Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трёхчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q. Назовём областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что замена переменной $x \to x + k$ при любом целом k не меняет области значений многочлена. Тогда, сделав замену $x \to x - \left[\frac{p}{2}\right]$ (квадратные скобки означают целую часть) можем считать, что любой многочлен имеет один из двух видов: $x^2 + q$ или $x^2 + x + q$.

Области значений любых двух многочленов разного вида пересекаются: в самом деле, значения многочленов $x^2 + q$ и $x^2 + x + q'$ совпадают при $x = q - q'$. Значит, многочлены разного вида брать нельзя.

Многочленов первого вида можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x) = x^2 + q$ и $f_2(x) = x^2 + q'$ не пересекаются, то $q - q' = 4k + 2$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. В самом деле, для нечетной разности свободных членов $q - q' = 2k + 1$ имеем $f_1(k) = f_2(k+1)$. Для делящейся на 4 разности свободных членов $q - q' = 4k$ имеем $f_1(k-1) = f_2(k+1)$. Но если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна не имеет вид $4k + 2$.

Многочленов второго вида тоже можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x) = x^2 + x + q$ и $f_2(x) = x^2 + x + q'$ не пересекаются, то $q - q' = 2k + 1$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. В самом деле, для четной разности свободных членов $q - q' = 2k$ имеем $f_1(k-1) = f_2(k)$. Опять же, если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна четна.

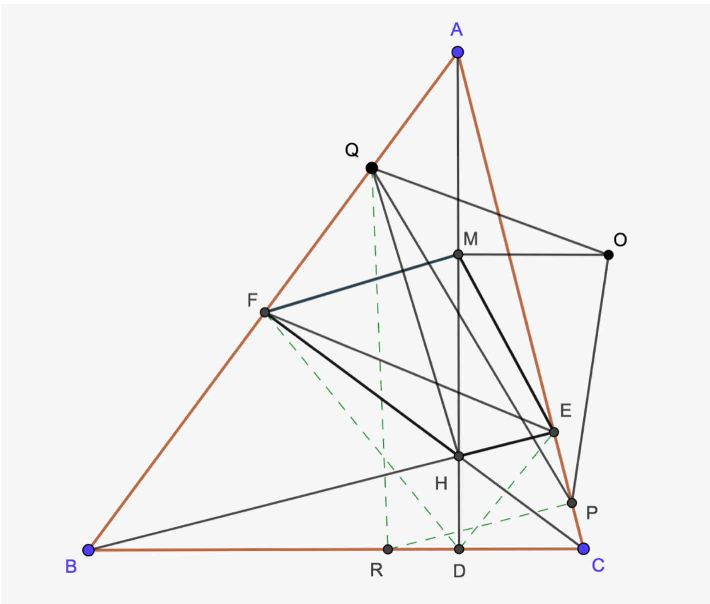
Итак, больше двух многочленов выбрать нельзя. Пример для двух: $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = x^2 + 2$. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Решение верно по модулю небольших неточностей
+/−	14	Есть доказательство того, что для каждого типа значений (x^2+q и x^2+x+q) можно взять не более двух трёхчленов
−/+	8	Полное решение, но только для случая x^2+q
−.	4	Пример двух трёхчленов, у которых области значений не пересекаются
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF; H — ортоцентр. Окружность с центром в точке O проходит через точки H и A, пересекая стороны AB и AC в точках Q и P, соответственно(точка O не лежит на сторонах AB и AC). Описанная окружность вокруг треугольника QOP касается стороны BC в точке R. Докажите, что $\frac{CR}{BR}=\frac{ED}{FD}$.

Решение. Пусть $\angle CAB = x, \angle ABC = y, \angle DCA = z$. Предположим, что точка Q находится между A и F, точка P находится между C и E. ($\angle FQH = \angle APH$). Приведём два решения задачи.

Первое решение.



Пусть точка M — середина HA, $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$. Следовательно, $AFHE$ — вписанный четырёхугольник с центром описанной окружности в точке M. Треугольники EFMи OQP равнобедренные; $\angle EMF = 2\angle CAB = 2x$; $\angle POQ = 2x$, отсюда $\triangle EFM$ подобен $\triangle QOP$.

Четырёхугольники $AEHF, AHPQ$ вписанные: $\angle EFH = \angle EAH = \angle PQH$; $\angle FEH = \angle FAH = \angle QPH$, откуда $\triangle HEF$ подобен $\triangle HPQ$.

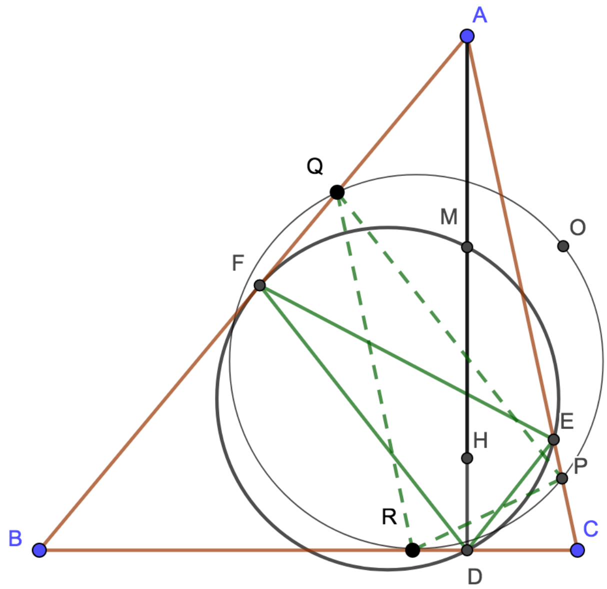
Докажем, что циклические четырёхугольники $EHFM$, $PQHO$ подобны:

Пусть $\angle QHP = \varphi$, то существует поворот с центром в точке H с углом поворота φ по часовой стрелке, отношением $\dfrac{QH}{FH}$. Этот поворот переводит $EHFM$ в $QOPH$.

Точке E, D, F, M лежат на окружности девяти точек треугольника ABC (поскольку четырёхугольники $ABDE, ACDF$ вписанные; $\angle FDB = \angle CAF = x$, $\angle EDC = \angle BAE = x$, $\angle EDF = 180 - 2x = 180 - \angle EMF$).

Пусть точка R_1 лежит между B и D так, что $\angle R_1HD = \varphi$, поэтому треугольники HQF и R_1HD подобны, поэтому четырёхугольники $DFME$ и R_1QOP также подобны.

Поскольку четырёхугольник $DFME$ вписанный, то R_1QOP также цикличен. Из этого следует, что точки R и R_1 совпадают. Треугольники DEF и RPQ подобны $\Rightarrow \dfrac{ED}{FD} = \dfrac{PR}{QR}$.



Рассмотрим два циклических четырёхугольника $ACDF$ и $ABDE$: $\angle BFD = \angle AFE = \angle ACB = z$, $\angle DFE = 180 - 2z$. Треугольники DEF

и RPQ подобны, $\angle RQP = 180 - 2z$. Поскольку CR — касательная к окружности треугольника PQR; $\angle CRP = \angle RQP = 180 - 2z$.

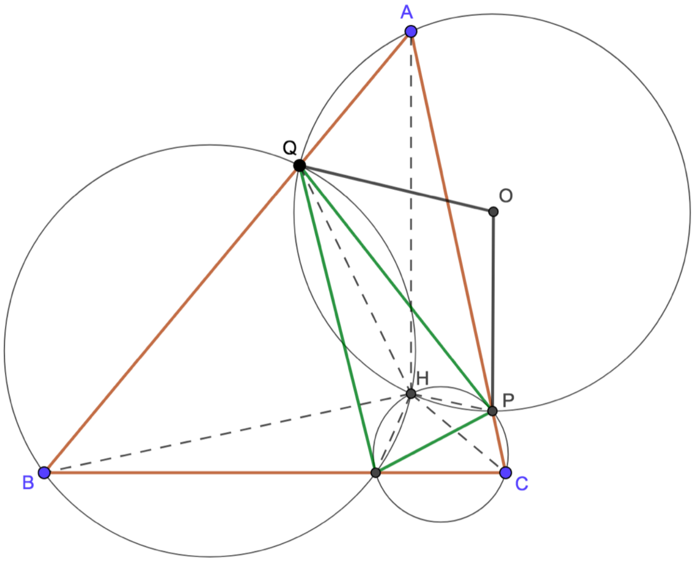
Таким образом, в треугольнике CPR имеем $\angle CPR = z$, $CR = PR$. Аналогично $BR = QR$:

$$\frac{ED}{FD} = \frac{PR}{QR} = \frac{CR}{BR}.$$

Второе решение.

Впишем треугольник BQH в окружность и эта окружность будет пересекать прямую BC в точке R_3 (точка R_3 не совпадает с точкой B).

Поскольку четырёхугольники $APHQ$ и $BQHR_3$ вписанные, то $\angle PHQ = 180 - \angle PAQ$ и $\angle QHR_3 = 180 - \angle QBR_3$. Так же подразумевается, что $\angle PHR_3 = 360 - \angle PHQ - \angle QHR_3 = 180 - \angle ACB$. Следовательно, $CPHR_3$ также вписанный. Мы только что установили частный случай теоремы Микеля.



Поскольку $BQHR_3$ и CR_3HP вписанные, получаем, что $\angle QR_3H = \angle QBH = 90 - \angle BAC$ и $\angle HR3P = \angle HCP = 90 - \angle BAC$. Следовательно, $\angle QR_3P = 180 - 2\angle BAC = 180 - 2x$. Аналогично имеем $\angle PQR = 180 - 2z$ и $\angle R_3PQ = 180 - 2y$. Как было показано в первом решении, треугольник DEF имеет такие же углы. Следовательно треугольник R_3PQ подобен треугольнику DEF. Заметим, что $\angle POQ + \angle PR_3Q = 2x + 180 - 2x = 180$, а это значит, что точка R_3 лежит на окружности треугольника $OPQ \Rightarrow R_3 = R$. Закончить доказательство как в первом решении. $\square$

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$-$	0	Решение полностью неверно