Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

8-1 Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

Ответ: 9.

Решение. Число делится на 6, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4 делится на 2, если и только если его последняя цифра чётная, то есть 2 или 4. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3. В нашей ситуации такое возможно, для следующих наборов цифр:

$$\{1, 2\}, \text{ или } \{1, 2, 3\}, \text{ или } \{2, 4\}, \text{ или } \{2, 3, 4\}$$

имеем 2 варианта в первом случае, 2 варианта во втором и 4 в последнем третьем случае. Итого 9 вариантов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Верно обоснованный перебор, но в ответе упущено число.	±	15
Только ответ.	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

8-2 Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y$.

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что

$$13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y=(2x-y)^2+(3x-z)^2+y \qquad (1)$$

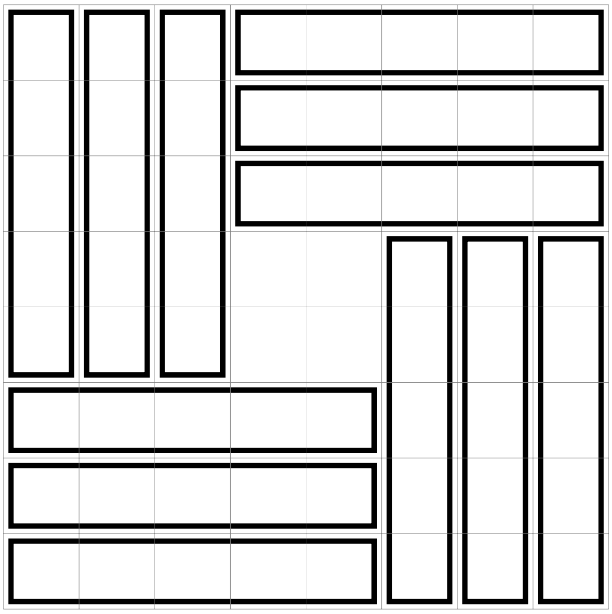
Поскольку квадрат целого числа всегда неотрицательное число, он достигает минимума, когда равен 0. Натуральное число y не меньше 1. Если же $y=1$, то число $(2x-y)$ — нечётное и его квадрат также не меньше 1. Поэтому выражение (1) не меньше 2 для любых натуральных x, y, z. Значение 2 может быть достигнуто несколькими способами, например, $x=1,y=2,z=3$ или $x=1,y=1,z=3$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Оценка без примера.	$\pm$	10
Только пример.	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-3 Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

Ответ: 12

Решение Заметим, что больше 12 фигурок из 5 клеток в каждой поместить на клетчатую бумагу в которой всего $8\times8=64$ клетки заведомо не удастся (т. к. $64=12\times5+4$). Поэтому остается подыскать пример из 12 полосок. Вот он:



Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Пример без оценки.	$+.$	17
Оценка без примера с верным ответом.	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-4 Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

Ответ: 50°.

Решение. Поскольку $\angle ABE = \angle ADE$, четырёхугольник $ABDE$ вписанный. Поскольку BCD равнобедренный с $\angle BDC = 80^\circ$, в нём $\angle CBD = \angle BCD = 50^\circ$. Значит, $\angle EBD = 190^\circ - \angle ABE - \angle CBD = 50^\circ$. Поскольку $ABDE$ вписанный, $\angle EAD = \angle EBD = 50^\circ$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Показано, что $\angle EBD = 50^\circ$, найдено равенство углов $\angle BAD = \angle BED$.	$\mp$	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-5 В стране из 2018 городов каждая пара городов соединена одной дорогой. Власти решили присвоить каждой трассе статус «федеральной» или «социальной», и для этой цели выпустили метки «Ф» и «С» суммарным числом, равным числу дорог. Однако рабочие расставили метки неправильно: на некоторых трассах могло оказаться по одной метке обоих видов, а на некоторых могло не оказаться ни одной. (Случай, когда на каждой дороге — ровно по одной метке, также считается возможным.) Каково максимально возможное число дорог с меткой «федеральная», если для любой такой дороги на каждой, не имеющей с ней общих концов, есть метка «социальная»?

Ответ: 2017.

Решение. Будем называть дорогу федеральной, если она имеет метку «Ф», даже если она при этом имеет метку «С».

Если есть две федеральные дороги без общих концов (пусть это дороги А–Б и В–Г), то федеральных дорог не более 6 (потому что все дороги, кроме дорог между городами А, Б, В, Г, обязательно имеют метку «С», а число меток равно числу дорог).

Если любые две федеральные дороги имеют общий конец, то рассмотрим две из них: А–Б и Б–В. Тогда либо есть ещё только одна федеральная дорога А–В (в таком случае федеральных дорог больше нет, т. е. их всего 3), либо все федеральные дороги имеют своим концом город Б (в таком случае федеральных дорог не более 2017).

Случай с 2017 федеральными дорогами возможен (все дороги из одного города имеют метку «Ф», все остальные дороги – метку

«С»).

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Из того, что любые две федеральные дороги имеют общий конец, делается вывод, что они все имеют общий конец, то есть упущен треугольник, в остальном решение верно.	$+.$	18
Только верный пример.	$\mp$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-6 Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

Ответ: 15620.

Решение. Заметим, что после каждого перезакапывания число монет делится на 5. Пусть археолог нашёл n, монет, тогда $n=5a$.

Значит, шестой пират нашёл $6a+1$, что также делится на 5, то есть $a\equiv 4 \mod (5)$. Значит, $a=5b-1$, то есть $6a+1=5(6b-1)$.

Пятый нашёл $6(6b-1)+1=6^2b-5$. При этом 6^2b-5 делится на 5, откуда b делится на 5, то есть $b=5c$, $6^2b-5=5(6c^2-1)$.

Продолжая таким образом, получаем, что второй нашёл $6(6^4e-1)+1=6^5e-5$. При этом e делится на 5, то есть $e=5f$, $6^5e-5=5(6^5f-1)$.

Первый пират нашёл 6^6f-5, но это уже не имеет значения.

Таким образом, $b = 5c = \ldots = 5^4 f$. Тогда $n = 5a = 5(5b-1) = 5^6 f - 5$. Поскольку $f \geqslant 1$, $b \geqslant 5^6 - 5 = 15620$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	+	20
Есть правильная идея рассмотрения последовательных делимостей и роста степеней пятёрки.	−.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	