Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

7-1 Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

Ответ: 9.

Решение. Число делится на 6, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4 делится на 2, если и только если его последняя цифра чётная, то есть 2 или 4. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3. В нашей ситуации такое возможно, для следующих наборов цифр:

$$\{1, 2\}, \text{ или } \{1, 2, 3\}, \text{ или } \{2, 4\}, \text{ или } \{2, 3, 4\}$$

имеем 2 варианта в первом случае, 2 варианта во втором и 4 в последнем третьем случае. Итого 9 вариантов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Верно обоснованный перебор, но в ответе упущено число.	±	15
Только ответ.	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

7-2 На плоскости есть набор из 2018 точек, никакие 3 не лежат на одной прямой. Рассмотрим все замкнутые ломанные, проходящие через все точки набора. Сколько точек самопересечения может иметь ломанная минимальной длины?

Ответ: 0.

Решение. Обозначим через V рассматриваемый набор из 2018 точек. Покажем, что замкнутая ломаная минимальной длины (если она существует) не имеет самопересечений. Заметим, что доказательство существования в данной задаче не требуется, но его можно доказать, см. конец решения.

Предположим противное: пусть $L = A_1 \ldots A_k$ — замкнутая ломаная минимальной длины (среди всех ломаных, проходящих через точки набора V), имеющая точку самопересечения. Здесь $A_1, \ldots, A_k$ — вершины ломаной L, включая все точки набора V (подразобьём ломаную так чтобы каждая точка набора V стала вершиной; считаем, что соседние вершины не совпадают). Покажем, что можно преобразовать L в другую ломанную M меньшей длины, проходящей через точки набора. Положим $A_0 = A_k$, $A_{k+1} = A_1$.

Пусть O — точка самопересечения ломаной L. Рассмотрим два случая.

Случай 1): O не вершина. Тогда это точка пересечения ребер AjA_{j+1} и A_mA_{m+1}. Пусть $j < m$, тогда $j+1 < m$. Рассмотрим ломаную

$$M = A_{m+2} \ldots A_kA_1 \ldots A_jA_mA_{m-1} \ldots A_{j+1}A_{m+1},$$

полученную из ломаной L заменой пересекающихся диагоналей A_jA_{j+1} и A_mA_{m+1} выпуклого четырёхугольника $A_{m+1}A_jA_mA_{j+1}$ на его противоположные стороны A_jA_m, $A_{j+1}A_{m+1}$. Сумма противоположных сторон меньше суммы диагоналей, по неравенству треугольника. Значит, ломаная M имеет длину меньше, чем L.

Случай 2): $O = A_j$ — вершина. Тем самым, $O = A_j = A_m$, $|m-j| \geqslant 2$. Точки A_{j-1}, A_j, A_{j+1} лежат на одной прямой, так что A_j разделяет A_{j-1} и A_{j+1} , в силу минимальности: иначе можно было бы заменить участок $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ ломаной на ребро $A_{j-1}A_{j+1}$ и получить ломаную меньшей длины с теми же вершинами. Аналогичное утверждение справедливо с заменой индекса j на m. Рассмотрим ломаную

$$M = A_{m+2}...A_kA_1...A_{j-1}A_jA_{m-1}A_{m-2}...A_{j+1}A_{m+1}$$

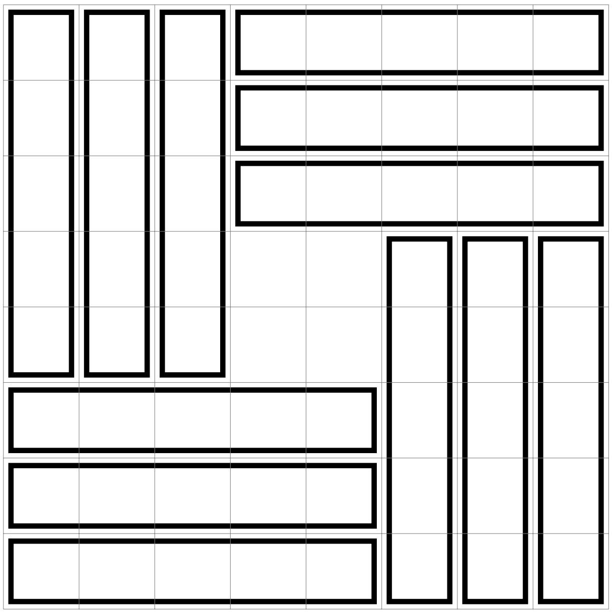
, полученную из ломаной L заменой объединения участков $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ и $A_{m-1}A_mA_{m+1}$ на объединение ломаной $A_{j-1}A_jA_{m-1}$ и ребра $A_{j+1}A_{m+1}$. При этом длина ломаной уменьшилась, как и в предыдущем случае, так как в выпуклом четырёхугольнике $A_{j-1}A_{m-1}A_{j+1}A_{m+1}$ и точкой $O = A_j$ пересечения диагоналей сумма длин диагоналей не больше суммы длин $|A_{j-1}A_j| + |A_jA_m| + |A_{j+1}A_{m+1}|$ по неравенству треугольника. Исключительный случай, когда все вершины $A_{j\pm1}, A_{m\pm1}, A_j, A_m$ лежат на одной прямой, рассматривается аналогично. Полученое противоречие доказывает отсутствие самопересечений у ломаной минимальной длины. Ломаная минимальной длины действительно существует. А именно, можно считать, что все вершины рассматриваемых ломаных являются точками набора: иначе если есть вершина вне набора, то можно заменить примыкающие к ней два ребра одним, не увеличив длину. Тем самым, достаточно показать, что в рассматриваемом классе ломаных имеется ломаная минимальной длины. Выберем произвольную допустимую ломаную, обозначим через D её длину. Рассмотрим все допустимые ломаные длины не больше D. Их длины — всевозможные суммы попарных расстояний между точками набора V, не превосходящие D, их конечное число. А на конечном множестве минимум достигается.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-3 Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

Ответ: 12

Решение Заметим, что больше 12 фигурок из 5 клеток в каждой поместить на клетчатую бумагу в которой всего $8 \times 8 = 64$ клетки заведомо не удастся (т. к. $64 = 12 \times 5 + 4$). Поэтому остается подыскать пример из 12 полосок. Вот он:



Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Пример без оценки.	$+.$	17
Оценка без примера с верным ответом.	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-4 Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

Ответ: $50°$.

Решение. Поскольку $\angle ABE = \angle ADE$, четырёхугольник $ABDE$ вписанный. Поскольку BCD равнобедренный с $\angle BDC = 80°$, в нём $\angle CBD = \angle BCD = 50°$. Значит, $\angle EBD = 190° - \angle ABE - \angle CBD = 50°$. Поскольку $ABDE$ вписанный, $\angle EAD = \angle EBD = 50°$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Показано, что $\angle EBD = 50^\circ$, найдено равенство углов $\angle BAD = \angle BED$.	$\mp$	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-5 В стране из 2018 городов каждая пара городов соединена одной дорогой. Власти решили присвоить каждой трассе статус «федеральной» или «социальной», и для этой цели выпустили метки «Ф» и «С» суммарным числом, равным числу дорог. Однако рабочие расставили метки неправильно: на некоторых трассах могло оказаться по одной метке обоих видов, а на некоторых могло не оказаться ни одной. (Случай, когда на каждой дороге — ровно по одной метке, также считается возможным.) Каково максимально возможное число дорог с меткой «федеральная», если для любой такой дороги на каждой, не имеющей с ней общих концов, есть метка «социальная»?

Ответ: 2017.

Решение. Будем называть дорогу федеральной, если она имеет метку «Ф», даже если она при этом имеет метку «С».

Если есть две федеральные дороги без общих концов (пусть это дороги А–Б и В–Г), то федеральных дорог не более 6 (потому что все дороги, кроме дорог между городами А, Б, В, Г, обязательно имеют метку «С», а число меток равно числу дорог).

Если любые две федеральные дороги имеют общий конец, то рассмотрим две из них: А–Б и Б–В. Тогда либо есть ещё только одна федеральная дорога А–В (в таком случае федеральных дорог больше нет, т. е. их всего 3), либо все федеральные дороги имеют своим концом город Б (в таком случае федеральных дорог не более 2017).

Случай с 2017 федеральными дорогами возможен (все дороги из одного города имеют метку «Ф», все остальные дороги – метку

«С»).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Из того, что любые две федеральные дороги имеют общий конец, делается вывод, что они все имеют общий конец, то есть упущен треугольник, в остальном решение верно.	$+.$	18
Только верный пример.	$\mp$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-6 Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

Ответ: 15620.

Решение. Заметим, что после каждого перезакапывания число монет делится на 5. Пусть археолог нашёл n, монет, тогда $n = 5a$.

Значит, шестой пират нашёл $6a+1$, что также делится на 5, то есть $a \equiv 4 \mod (5)$. Значит, $a = 5b-1$, то есть $6a+1 = 5(6b-1)$.

Пятый нашёл $6(6b-1)+1 = 6^2b-5$. При этом 6^2b-5 делится на 5, откуда b делится на 5, то есть $b = 5c$, $6^2b-5 = 5(6c^2-1)$.

Продолжая таким образом, получаем, что второй нашёл $6(6^4e-1)+1 = 6^5e-5$. При этом e делится на 5, то есть $e = 5f$, $6^5e-5 = 5(6^5f-1)$.

Первый пират нашёл 6^6f-5, но это уже не имеет значения.

Таким образом, $b=5c=\ldots=5^4 f$. Тогда $n=5a=5(5b-1)=5^6 f-5$. Поскольку $f\geqslant 1$, $b\geqslant 5^6-5=15620$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Есть правильная идея рассмотрения последовательных делимостей и роста степеней пятёрки.	$-.$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	