Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

10-1 Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y$.

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что

$$13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y=(2x-y)^2+(3x-z)^2+y \qquad (1)$$

Поскольку квадрат целого числа всегда неотрицательное число, он достигает минимума, когда равен 0. Натуральное число y не меньше 1. Если же $y=1$, то число $(2x-y)$ — нечётное и его квадрат также не меньше 1. Поэтому выражение (1) не меньше 2 для любых натуральных x, y, z. Значение 2 может быть достигнуто несколькими способами, например, $x=1, y=2, z=3$ или $x=1, y=1, z=3$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Несущественные неточности в рассуждении.	$+.$	19
Оценка без примера.	$\pm$	10
Только пример.	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-2 Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k>0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k-1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

Решение. Докажем, что дорасставить требуемым образом фонари можно.

Разделим синие фонари на два вида — освещённые другими и нет. Пусть неосвещённые имеют координаты $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Все x-координаты различны, так как иначе бы какой-то из фонарей освещал бы какой-то другой. Тогда можно считать, что $x_1 < \ldots < x_n$. Тогда $y_1 > \ldots > y_n$, так как иначе бы какой-то из этих фонарей освещал бы какой-то другой.

Расставим красные фонари в точки $(x_1, y_2), (x_2, y_3), \ldots, (x_{n-1}, y_n)$, а также во все точки, где стоят освещённые другими синими фонарями синие фонари.

Рассмотрим производную точку плоскости. Если она не освещалась ни одним синим фонарём, то не будет освещаться ни одним красным. Если она освещается хотя бы одним синим, то освещается хотя бы одним синим, который не освещается другими синими. Тогда для выбранной точки

- количество синих, освещённых другими синими и освещающих данную точку, сохранится;
- количество синих, не освещённых другими синими и освещающих данную точку, уменьшится на 1.

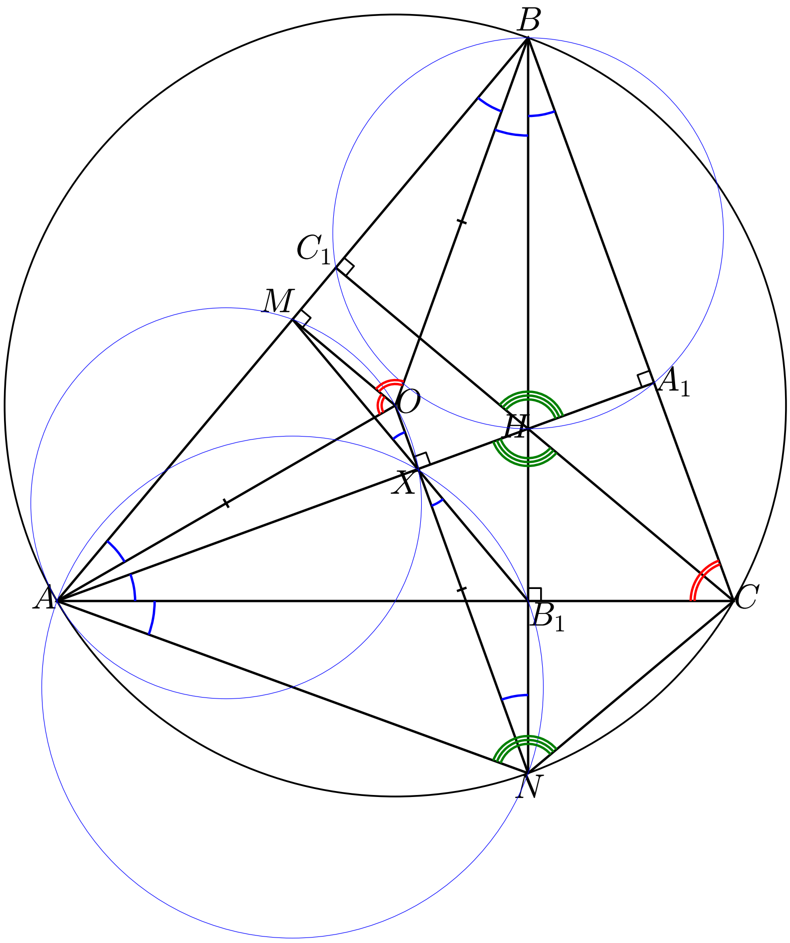
Таким образом, найденная нами расстановка является требуемой. *На самом деле данная расстановка является единственной.*

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности.	$+.$	19
Приведён правильный алгоритм расстановки, но не доказано, почему он работает.	$\pm$	17
Присутствует идея деления синих на освещённые и нет.	$\mp$	3
Рассмотрено несколько (>1) частных случаев, для которых решение построено.	$-.$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-3 Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку дано равенство углов $\angle OBN = \angle NBC$, имеет место один из двух случаев:

- они равны как ориентированные углы, то есть N и C по разные стороны от OB,
- они противоположны как ориентированные углы, то есть N и C по одну сторону от OB. Тогда O лежит на BC, откуда угол $\angle A$ прямой. В этом случае $A = B' = N$, и пересечение прямых AA', MB', ON тривиально. Далее этот случай мы рассматривать не будем.

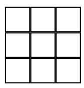
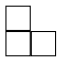
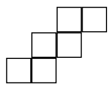


Имеем $\angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = \angle CBN = \angle NBO =: \alpha$. Поскольку O — центр окружности, $\angle AOB = 2\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$, аналогично $\angle ONB = \alpha$ (равнобедренный треугольник $\triangle OBN$). Как легко убедиться, H и N симметричны относительно AC ($HN \perp AC$ и $\angle ANC = 180^\circ - \angle B = \angle A_1HC_1 = \angle AHC$, так как BA_1HC_1 вписанный), так что $\angle CAN = \alpha$. Обозначим через X точку пересечения ON и AA_1. Докажем, что через неё проходит также и MB_1. Поскольку $\angle XAB_1 = \angle XNB_1$, четырёхугольник AXB_1N вписанный, а тогда $\angle AXN$ прямой и $\angle NXB_1 = \alpha$. Поскольку $\angle AMO = \angle AXO = 90^\circ$, четырёхугольник $AMOX$ вписанный, а тогда $\angle MAO = \angle MXO = \alpha$. Это означает, что точки M, X, B_1 лежат на одной прямой.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
В доказательстве упущен нетривиальный существенный факт.	$\pm$	14
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-4 Прямоугольник 13×9 составлен из трёх типов фигурок:

Тип A Тип B Тип C

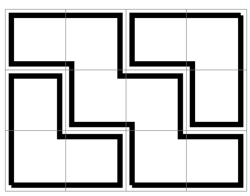
, , 

(сторона клетки равна 1). Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? При выкладывании прямоугольника фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.

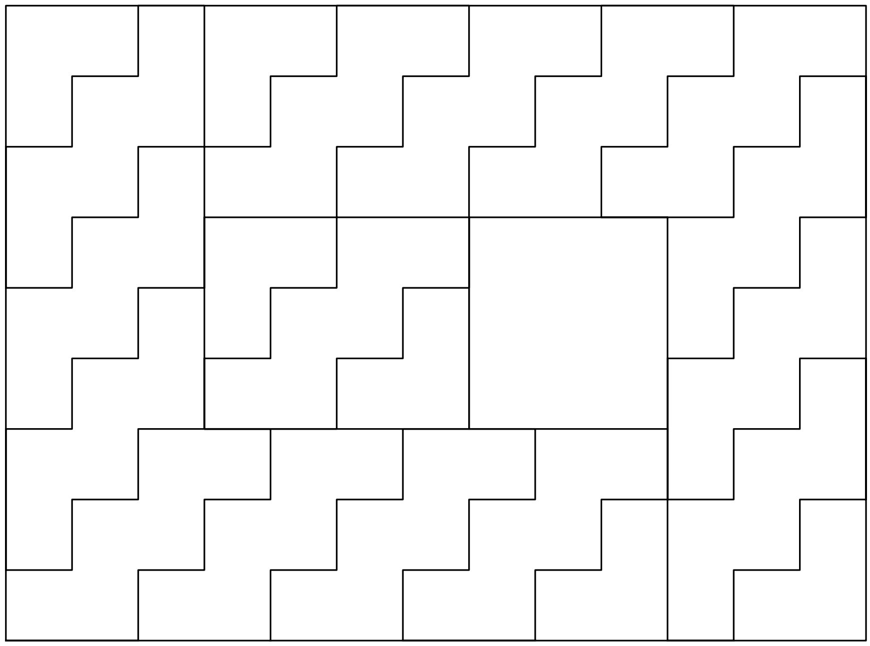
Ответ: 6.

Решение.

Построим пример с 6-ю фигурками типа B. Сначала из двух фигурок типа B и одной фигурки типа C смастерим прямоугольник 3×4, поставив фигурки типа B в противоположные углы:



Впрочем, правильных разрезаний достаточно много, например, разрезание на рисунке ниже.



Далее прямоугольник 9×13 можно разрезать параллельной сеткой на 3 прямоугольника 3×4 (в каждом по 2 фигурки типа B) и $3 * 3 = 9$ квадратов 3×3.

Докажем, что меньше 6 фигурок типа B использовать не получиться. Раскрасим столбцы прямоугольника 13×9 в три цвета: белый, синий и красный, параллельно стороне 13. Красных и синих клеток будет одинаковое количество, а вот белых клеток будет на 9 больше. Фигурки типа A и типа C имеют всегда одинаковое количество клеток каждого цвета. Фигурка типа B может иметь на две клетки одного цвета больше, чем любого другого цвета. Поэтому, замощениями фигурками прямоугольника 13×9 должно быть использовано не менее, чем $[9/2] = 5$ фигурок типа B. Покажем, что и 5 фигурок типа B будет недостаточно. Действительно, ведь если бы это было так, то среди 15 клеток покрытых фигурками типа B имелось бы одинаковое количество клеток синего и красного цвета и на 9 клеток больше белого цвета, такое возможно, если белых клеток будет 11, а синих и красных по 2. Но в таком случае одна из 5 фигурок типа B должна быть покрашена целиком в белый цвет, чего невозможно.

10-5 Из натурального числа n разрешается получить либо число $n^2 + 2n$, либо число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

Ответ: числа вида $2019^{2^n 3^k}-1$ для неотрицательных целых k и n.

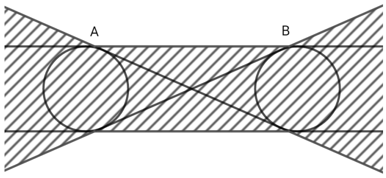
Решение. Сделаем замену $k=n+1$ и будем считать, что мы преобразуем число k, которое может принимать значения натуральных чисел, кроме единицы. Замена $n \mapsto n^2+2n$ для k соответствует замене $f_1\colon k=n+1 \mapsto n^2+2n+1=k^2$. Вторая замена соответствует $f_2\colon k \mapsto k^3$. Заметим, что для любого k верно $f_1(f_2(k))=f_2(f_1(k))$. Таким образом, если мы применяем несколько раз операции f_1 и f_2 к числу k, неважен порядок, а важно только количество операций.

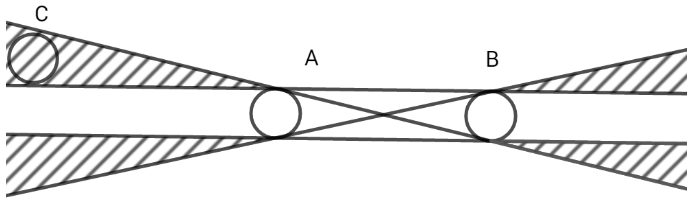
Допустим, числа k_1 и k_2 эквивалентны. Тогда применением операций к одному и другому числам несколько раз можно получить одно и то же число, то есть $k_1^{2^{l_1}3^{m_1}}=k_2^{2^{l_2}3^{m_2}}$. Таким образом, все натуральные числа, эквивалентные заданному k, имеют вид $k^{2^{q_1}3^{q_2}}$ для рациональных q_1, q_2. Соответственно, для $n=2018$ все совместимые с ним числа будут иметь вид $2019^{2^{q_1}3^{q_2}}-1$. Число $2019=3\cdot 673$ не является степенью натурального числа выше первой. Таким образом, рациональные числа q_1 и q_2 должны быть целыми, для любых целых q_1 и q_2 мы получаем совместимые с 2018.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Допущены мелкие неточности. Или не сказано, почему 2018 не получается с помощью данных операций из других чисел	$+.$	19
Верно указано, какие числа можно получить из 2018, но не доказано, что других совместимых нет.	$\mp$	4
Присутствует идея замены $k = n+1$ и далее итерирования операций возведения в степень.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-6 На плоскости задан конечный набор равных кругов. Известно, что для любых 4 кругов есть прямая, пересекающая некоторые 3 из них. Докажите, что существует 12 прямых, таких что каждый круг пересекается хотя бы с одной из них.

Решение. Начнем со следующего **наблюдения**: *если даны два непересекающихся круга одинакового радиуса, то всевозможные прямые, пересекающие оба круга, заметают область, заштрихованную на рисунке слева.* Эта область — объединение полосы между двумя внешними касательными к кругам и пары вертикальных углов между двумя внутренними касательными. Поэтому два данных круга A и B и некоторый третий круг C можно пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда C имеет общие точки с заштрихованной областью. Будем называть эту область *тенью* кругов A и B.





Перейдем к решению задачи. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1: любые 3 круга из заданного набора можно пересечь одной прямой. Тогда рассмотрим два круга A и B из набора, расстояние между центрами которых наибольшее. Если это расстояние меньше диаметра кругов, то прямая, проходящая через 2 общих точки граничных окружностей кругов A и B — искомая (любой круг C из набора обязан ее пересекать, иначе расстояние между центрами кругов A и C — либо B и C — окажется больше расстояния между центрами кругов A и B, что противоречило бы выбору кругов A и B). Поэтому будем считать, что расстояние между центрами кругов A и B больше диаметра, то есть эти круги не пересекаются.

Докажем, что тогда 4 общих касательных к A и B — искомые прямые, т.е. пересекают любой круг C из набора. Действительно, по предположению случая 1, круги A, B, C можно пересечь одной прямой. Тогда C должен пересекать тень A и B. Если бы C не пересекал ни одну из 4 общих касательных к A и B, то C целиком лежал бы в одном из 4 углов, заштрихованных на рисунке справа. Но тогда расстояние между центрами кругов A и C (либо B и C) было бы больше расстояния между центрами кругов A и B, так как центры трех кругов образуют тупоугольный треугольник. А это противоречило бы выбору кругов A и B. Значит, все круги набора можно пересечь 4 прямыми.

Случай 2: найдутся 3 круга из заданного набора, которые нельзя пересечь одной прямой. Тогда рассмотрим три таких круга A, B, C, центры которых образуют треугольник наибольшей площади. Докажем, что тогда 12 прямых — 4 общих касательных к A и B, 4 общих касательных к B и C, 4 общих касательных к C и A — искомые.

Предположим, что нашелся круг D из набора, не пересекающий ни одну из 12 касательных. По условию задачи, какие-то 3 из кругов A, B, C, D можно пересечь прямой. Пусть, без ограничения общности, это круги A, B, D. Тогда согласно наблюдению выше, D целиком лежит в одном из углов, заштрихованных на рисунке справа. Пусть, без ограничения общности, это "верхний" из углов, примыкающих к кругу A. С другой стороны, A, B, C нельзя пересечь прямой, значит, C целиком лежит вне тени A и B. Рассмотрим различные варианты расположения круга C.

Случай 2a: центры кругов C и D лежат в разных полуплоскостях относительно линии центров кругов A и B. Тогда центр круга A оказывается внутри треугольника с вершинами в центрах кругов B, C, D. При этом круги B, C, D также нельзя пересечь одной прямой: тень B и D расположена целиком "выше" нижней границы тени A и B, и не может пересечь круг C. Итак, мы получили 3 круга B, C, D, которые нельзя пересечь прямой, центры которых образуют треугольник большей площади, чем A, B, C. Это противоречит выбору кругов A, B, C.

Случай 2b: центры кругов C и D лежат в одной полуплоскости относительно линии центров кругов A и B, причем B и D лежат в одной полуплоскости относительно одной из общих внутренних касательных к B и C. Докажем, что в этом случае круги B, C, D нельзя пересечь прямой, а их центры снова образуют треугольник большей площади, чем A, B, C — тем самым снова придем к противоречию. Так как B и D лежат в одной полуплоскости относительно одной из общих внутренних касательных к B и C, то D не пересекает тень B и C, значит, B, C, D нельзя пересечь прямой. Треугольники с вершинами в центрах кругов A, B, C и B, C, D имеют общее основание BC, а высота больше у второго треугольника. Значит, последний имеет большую площадь. И в случае 2b мы пришли к противоречию.

Случай 2c: центры кругов C и D лежат в одной полуплоскости относительно линии центров кругов A и B, причем B и D лежат в разных полуплоскостях относительно обеих общих внутренних касательных к B и C. Докажем, что на этот раз круги A, C, D

нельзя пересечь прямой, и уже их центры образуют треугольник большей площади, чем A, B, C. Первое утверждение следует из того, что D лежит вне тени A и C. Для доказательства второго утверждения проведем внутренюю касательную к A и B, которая разделяет C и D, а также внутренюю касательную к B и C, которая разделяет D и A. Будем катить круги A и C по своим касательным в сторону круга D до тех пор, пока они не коснутся обеих проведенных прямых одновременно. Будем двигать D в сторону B, пока он также не коснется обеих проведенных прямых. Ясно, что в процессе движение площадь треугольника A, B, C увеличивается, а A, C, D — уменьшается. А в конечном положении эти площади становятся равными, из симметрии. Значит, в исходном расположении центры кругов A, C, D образуют треугольник большей площади, чем A, B, C.

Итак, во всех случаях 2a–2c мы пришли к противоречию. Значит, любой круг D из набора пересекает хотя бы одну из указанных 12 прямых.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	+	20
Разобран случай, когда любые три можно пересечь прямой.	−.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	