

## Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

**9-1**

Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

*Решение.* Будем представлять партию в виде ориентированного графа: партийцев — в виде вершин, а если партиец  $A$  доверяет партийцу  $B$ , то соединим вершину  $A$  с  $B$  ребром со стрелкой, направленной от  $A$  к  $B$ . Условие того, что никакие два партийца не доверяют друг другу, эквивалентно условию того, что никакие две вершины не соединены двумя противоположно направленными ориентированными рёбрами. Будем называть это *условием одного ребра*. Построим пример партии из 11 человек, удовлетворяющей условию задачи. Разместим 11 человек в вершинах правильного 11-угольника  $A_1 \dots A_{11}$ . Для каждой вершины  $A_i$  направим по ориентированному ребру из неё в каждую из пяти вершин, следующих за ней по часовой стрелке. Утверждается, что условие одного ребра выполнено. Действительно, для каждого ориентированного ребра, идущего от некоторой вершины  $A_i$  к  $A_j$ , имеется не более 4 вершин, следующих от  $A_i$  к  $A_j$  в направлении по часовой стрелке. А остальных вершин 11-угольника, отличных от  $A_i$ ,  $A_j$  и вышеупомянутых последовательных вершин между ними не меньше, чем  $11 - 6 = 5$ , и они идут последовательно от  $A_j$  к  $A_i$  по часовой стрелке «с другой стороны». Предположим противное: условие одного ребра не выполнено, то есть некоторая пара вершин  $A_i$  и  $A_j$  соединена двумя противоположно направленными рёбрами. Тогда в силу предыдущего, имеется два набора последовательных вершин, каждый из не более, чем 4 вершин: вершины одного набора идут от  $A_i$  к  $A_j$  по часовой стрелке, а вершины другого — от  $A_j$  к  $A_i$  по часовой стрелке. Следовательно, эти наборы не пересекаются, и вместе с

вершинами  $A_i$  и  $A_j$  (итого не более, чем  $4 + 4 + 2 = 10$  вершин) они покрывают все 11 вершин 11-угольника. Полученное противоречие доказывает, что условие одного ребра выполнено.

Докажем теперь, что для партии меньшего размера это не возможно. Пусть  $n$  — общее число членов партии, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда общее число ориентированных рёбер равно  $5n$ : по 5 рёбер, исходящих из каждой вершины. С другой стороны, общее число рёбер не превосходит множества пар различных вершин (условие одного ребра), которое, в свою очередь, равно  $C_n^2 = \frac{n-1}{2}n$ . Тем самым,  $5n \leq \frac{n-1}{2}n$ , а, значит,  $\frac{n-1}{2} \geq 5$ , то есть  $n \geq 11$ .

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено построение партии из 11 человек и доказано, что меньше нельзя	+	20
Приведено построение партии из 11 человек, но не доказано, что меньше нельзя	$\pm$	14
Доказано, что меньше 11 сделать нельзя, но пример не построен	+ / 2	12
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	- / 0	0
<i>Максимальный балл</i>		20

**9-2** Найти все натуральные числа  $n$  от 400 до 600 такие, что если перемножить все делители числа  $n$  (включая 1 и  $n$ ), получим число  $n^5$ .

*Решение.* Утверждается, что  $n$  удовлетворяет условию задачи, если и только если его разложение  $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$  на простые множители имеет вид либо  $n = p^9$ , либо  $n = p_1 p_2^4$ . Действительно, для каждого  $j = 1, \dots, k_1$  имеется  $(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)$  делителей числа  $n$ , содержащих  $p_1$  в степени  $j$  в разложении на простые множители: все эти делители имеют вид  $p_1^j p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$ ,  $m_i \in \{0, \dots, k_i\}$ . Следовательно, произведение всех делителей числа  $n$  содержит  $p_1$  в

степени  $(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)(1 + \dots + k_1) = \frac{1}{2}(k_1 + 1) \dots (k_s + 1)k_1$ .  
 Условие, что произведение всех делителей равно  $n^5$ , эквивалентно утверждению, что каждое  $p_j$  входит в их произведение в степени  $5k_j$ , и, тем самым, предыдущее выражение равно  $5k_1$ . Другими словами,  $\frac{1}{2}(k_1 + 1) \dots (k_s + 1) = 5$ . С другой стороны,  $k_j \geq 1$ . Отсюда следует, что  $s \leq 2$ . Пусть  $s = 2$ . Тогда одно из  $k_j$ , скажем,  $k_1$  равно 1, а тогда  $k_2 = 4$  (простота числа 5). В случае, когда  $s = 1$ ,  $k_1 = k$ , получаем уравнение  $\frac{1}{2}(k + 1) = 5$ , то есть  $k = 9$ . Итак, все числа  $n \neq 1$ , удовлетворяющие условию задачи, имеют разложение на простые множители вида либо  $n = p_1 p_2^4$ ,  $p_1 \neq p_2$ , либо  $n = p^9$ ;  $p_1, p_2, p > 1$ . Перечислим те из них, которые лежат между 400 и 600.

- Числа  $n = p_1 p_2^4$ . Имеем  $p_2^4 \leq 600/2 = 300$ , тем самым,  $p_2 \leq 4$ ,  $p_2 \in \{2, 3\}$ . Итак,  $16 \leq p_1 \leq 81$ . Следовательно,  $4 = [400/81] < p_1 \leq [600/16] = 37$ , а, значит,

$$p_1 \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}, \quad p_2 \in \{2, 3\}.$$

Выписывая всевозможные произведения  $n = p_1 p_2^4$ , лежащие в промежутке от 400 до 600, с вышеуказанными  $p_1$  и  $p_2$ , получаем

$$5 \times 3^4 = 405, \quad 7 \times 3^4 = 567, \quad 29 \times 2^4 = 464, \quad 31 \times 2^4 = 496, \quad 37 \times 2^4 = 592.$$

- Единственное  $n = p^9$ , лежащее между 400 и 600, есть  $512 = 2^9$ . Итого получаем список всех возможных чисел  $n$ :

$$n = 405, 464, 496, 512, 567, 592.$$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведён полный список с кратким (возможно, неполным) доказательством	+	20
Приведён полный список без доказательства	$\pm$	16
Приведено краткое доказательство, отмечен случай $n = p_1 p_2^4$ , но забыт случай $n = p^9$ (то есть 512)	+ / 2	12
Отмечен случай $n = p^9$ , но забыт случай $n = p_1 p_2^4$	$\mp$	8
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	- / 0	0
<i>Максимальный балл</i>		20

**9-3**

У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см), и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 17 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

*Решение.* При построении будем использовать следующие операции.

Шаг 1. Дан отрезок  $CD$  длины меньше 12 см. Построить серединный перпендикуляр к нему и найти его середину. Для этого проведем две пересекающиеся окружности  $S_1, S_2$  одинакового радиуса (например, 6 см) с центрами в точках  $C$  и  $D$ . Пусть  $EF$  — отрезок, соединяющий их точки пересечения. Отрезок  $EF$  и будет серединным перпендикуляром отрезка  $CD$ . В случае, когда расстояние между точками пересечения больше 10 см, мы не можем соединить их с помощью линейки. (При выборе

радиуса равным  $CD$  это расстояние чуть больше 10 см.) А тогда чуть уменьшим радиус и получим вторую пару окружностей, пересекающихся также в точках серединного перпендикуляра. В результате получим 4 точки пересечения, лежащие на одной прямой. Соединяя пары близких точек отрезками и продолжая проведенные отрезки очевидным образом (сдвигая линейку), мы проведем серединный перпендикуляр к отрезку  $CD$ . Далее выполним аналогичное построение с заменой точек  $C, D$  на  $E, F$  и получим серединный перпендикуляр к отрезку  $EF$ , совпадающий с  $CD$ . Пересечение построенных отрезков  $CD$  и  $EF$  и будет их общим центром.

Пусть  $A$  и  $B$  — рассматриваемые точки, находящиеся на расстоянии 17 см. Построим отрезок, соединяющий их.

Шаг 2. Построение правильного шестиугольника с центром в точке  $A$  и стороной 6 см. Проведем окружность с центром  $A$  максимального радиуса (6 см). Выберем точку  $Q$  на ней и проведем новую окружность того же радиуса с центром в точке  $Q$ . Отметим её точки пересечения  $P_1, P_2$  с исходной окружностью. Треугольники  $AQP_j, j = 1, 2$  правильные. Продолжая аналогичное построение новых окружностей с центрами в точках  $P_j$  и в новых точках пересечения с исходной окружностью получим правильный шестиугольник с центром в точке  $A$ . Соединим все его вершины с точкой  $A$  отрезками с помощью линейки. Получили его разбиение на равные правильные треугольники с общей вершиной  $A$ . Повторяя упомянутые построения с центрами в точках нового шестиугольника, построим примыкающие к нему равные ему правильные шестиугольники и разобьем их на равные правильные треугольники. В результате получим (невыпуклый) многоугольник, составленный из правильных треугольников, содержащий круг радиуса 12 см с центром в точке  $A$ . Продолжая аналогичное построение окружностей с центрами в вершинах нового многоугольника и соответствующих новых правильных шестиугольников и треугольников, получим многоугольник  $\Pi$ , разбитый на примыкающие друг к другу правильные треугольники со стороной 6 см, которые мы будем

называть *треугольниками разбиения*) и содержащий круг радиуса 18 см с центром в точке  $A$ . Тем самым,  $\Pi$  содержит точку  $B$ . Обозначим через  $T$  треугольник разбиения, содержащий точку  $B$ . Фиксируем вершину  $D$  треугольника  $T$ .

Проведём прямую  $AD$ . Это можно сделать с помощью циркуля и линейки. Заметим, что  $AD$  — это диагональ подходящего параллелограмма, разбитого на правильные треугольники со стороной 6 см. Поэтому её середина — это либо вершина, либо середина стороны треугольника разбиения. Длина диагонали  $AD$  не больше  $17 + 6 = 23$  см. Тем самым, длина её половины (с известными вершинами) меньше 12 см, и её можно построить, применяя шаг 1. Итак, мы провели отрезок  $AD$ .

Шаг 3: построение прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  и стороной  $BC$  меньше 6 см, с проведенными катетами  $AC$ ,  $BC$  и непроведенной гипотенузой  $AB$ . Для этого продолжим прямую  $AD$  с помощью линейки и опустим перпендикуляр на нее из точки  $A$  с помощью следующего построения.

**9-4** На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Доказать, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.

*Решение.* При решении задачи будем использовать *свойство уменьшения первого разряда*. Оно состоит в том, что при умножении двух цифр  $a$  и  $b$  получается либо однозначное число (цифра), либо двузначное, и в последнем случае первая цифра двузначного произведения меньше, чем минимальная из цифр  $a$ ,  $b$ . Действительно, двузначные числа  $a0 = 10 \times a$  и  $b0 = 10 \times b$  больше, чем  $ab$ , так как  $a, b < 9$ . Тем самым на каждом шаге либо получается на цифру меньше (первый случай), либо число цифр сохраняется, но минимальная из всех цифр, написанных на доске, не увеличивается.

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по числу  $n$

цифр, изначально написанных на доске.

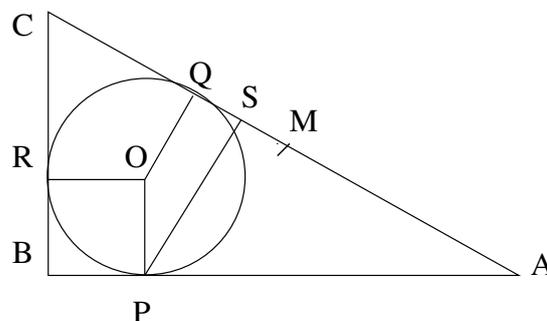
База индукции: при  $n = 1$  утверждение очевидно. Утверждение для  $n = 2$  следует из свойства уменьшения первого разряда, в силу которого через несколько шагов останется одна цифра.

Шаг индукции. Пусть утверждение доказано для  $n = k$ . Докажем его для  $n = k + 1$ . Пусть  $m$  — минимальная из цифр, написанных на доске. Достаточно показать, что через несколько шагов либо число цифр уменьшится, либо минимальная цифра уменьшится: появится цифра меньше  $m$ . Предположим противное. Тогда число цифр не уменьшается и в каждый момент есть цифра  $m$ , к которой очередной шаг задачи не применяется: каждый шаг не затрагивает хотя бы одну цифру  $m$ . В противном случае, если осталась одна или две цифры  $m$ , и к ней (соответственно, к ним обеим) применен шаг задачи, и при этом число цифр не уменьшается, то минимальная цифра уменьшится в силу свойства уменьшения первого разряда. Вышесказанное эквивалентно тому, что все шаги задачи применяются к меньшему набору цифр: ко всем, кроме одной из цифр  $m$ . А тогда по предположению индукции через несколько шагов на доске, кроме цифры  $m$ , останется одна цифра. Это сводит шаг индукции к случаю двух цифр, для которого утверждение задачи доказано. Шаг индукции доказан.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Замечено и доказано свойство уменьшения первого разряда, а также что при применении шага к произвольному набору минимальная цифра не увеличивается	$\pm$	12
Замечено и доказано одно из вышеупомянутых свойств	$\mp$	9
Замечено одно из двух вышеупомянутых свойств без доказательства	-	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	-/0	0
<i>Максимальный балл</i>		20

- 9-5** В треугольнике  $ABC$   $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ . Вписанная окружность касается стороны  $AB$  в точке  $P$ , а стороны  $AC$  — в точке  $Q$ ;  $M$  — середина стороны  $AC$ . Докажите, что  $PM = PQ$ .

*Решение*



Пусть  $O$  — центр вписанной окружности,  $r$  — её радиус, а  $R$  — точка её касания со стороной  $BC$ . Четырёхугольник  $PORB$  — квадрат, сторона которого равна радиусу  $r$ . Треугольник  $BCM$  равнобедренный:  $BM = CM$  (это верно для любого прямоугольного треугольника). А в нашем случае он даже равносторонний, так как  $\angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Имеем  $CB = CM$ . Кроме того,  $CR = CQ$ , так как  $Q$  и  $R$  — точки касания вписанной

окружности с лучами, выпущенными из точки  $C$ . Следовательно,  $MQ = BR = r$ . Пусть  $S$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на сторону  $AC$ . Имеем  $QS = OP/2 = r/2$ , так как  $QS$  есть ортогональная проекция отрезка  $OP$  на сторону  $AC$ , а угол между ними равен  $60^\circ$ . Напомним, что  $QM = r$ . Тем самым,  $S$  – середина отрезка  $QM$ . Итак, прямоугольные треугольники  $PSQ$  и  $PSM$  равны. Значит,  $PM = PQ$ .

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное доказательство	+	20
Доказано, что $QM$ равно радиусу вписанной окружности	$\mp$	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	-/0	0
<i>Максимальный балл</i>		20

**9-6** *Решение.* Перепишем равенство  $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$  из условия в виде  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$  и заменим согласно этому равенству каждое слагаемое в оцениваемой сумме:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{a_i} &= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1} + \dots + \frac{1}{a_{2017} - 1} - \frac{1}{a_{2018} - 1} = \\ &= 1 - \frac{1}{a_{2018} - 1} < 1. \end{aligned}$$

**9-6** Осталось заметить, что  $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n > (a_n - 1)^2$ , а, значит,

$$a_{n+1} - 1 > (a_n - 1)^2 > (a_{n-1} - 1)^4 > \dots > (a_2 - 1)^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}}.$$

Поэтому  $a_{2018} > 2^{2^{2016}} > 10^{2018} + 1$ , следовательно, оцениваемая величина  $1 - \frac{1}{a_{2018} - 1} > 1 - \frac{1}{10^{2018}}$ , что и требовалось.