Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

7-1 Дано равенство

$$(x-7)(x^2-28x+\ldots)=(x-11)(x^2-24x+\ldots).$$

Вместо многоточий стоят некоторые числа, выбранные так, что равенство верно при любом значении x. Найдите числа, стоящие вместо многоточий.

Решение.

Обе часть равенства — многочлены степени 3, обращающиеся в нуль при $x=7, 11$. Обозначим через Q квадратный трёхчлен во второй скобке в левой части. Он делится на $x-11$, в силу вышесказанного. Следовательно, разность $R(x)=Q(x)-x(x-11)$ есть многочлен степени 1, делящийся на $x-11$, а, значит, получающийся из него умножением на постоянный множитель. Старший коэффициент разности $R(x)$ равен $11-28=-17$. Следовательно, его свободный член равен $17\times 11=187$. Итак, вместо многоточия в левой части стоит число 187. Аналогично, квадратный трёхчлен во второй скобке в правой части делится на $x-7$. Вычитая из него $x(x-7)$, получим многочлен степени 1, который должен делиться на $x-7$. Его старший коэффициент равен $7-24=-17$. Значит, его свободный член равен $17\times 7=119$. Итак, на месте многоточия в правой части стоит число 119.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение	$+$	20
Правильный ответ с доказательством без второго либо оба примера без доказательства; верная идея про корни, но арифметическая ошибка в решении	$\pm$	15
Правильный ответ без доказательства без второго либо доказательство без примеров	$+/2$	12
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

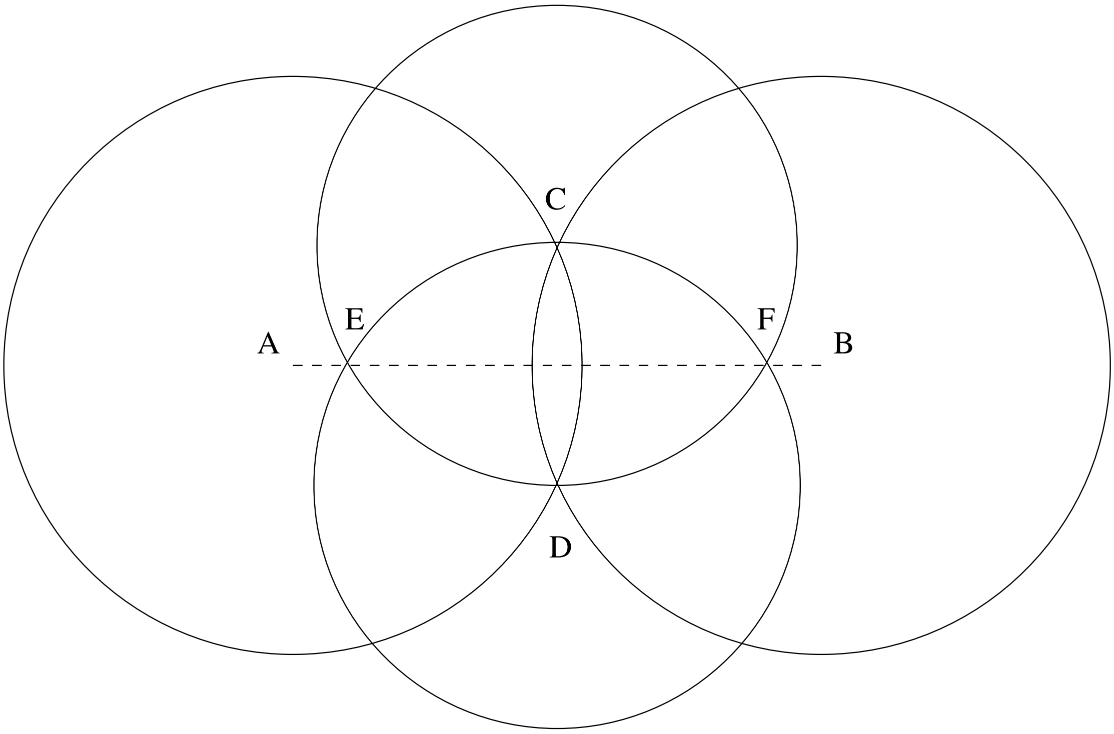
7-2 У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см), и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 11 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

В решении достаточно указать правильный способ построения. Доказывать его правильность не обязательно.

Решение.

Пусть A и B — рассматриваемые точки. Проведём окружности максимально возможного радиуса 6 см с центром в них. Отметим их точки пересечения C и D. Расстояние между ними будет не больше 6 см. Проведём окружность с центром в точке C через точку D и окружность с центром в точке D через точку C. Обозначим через E и F их точки пересечения. Они лежат на отрезке $[A, B]$ в силу симметрии, причём центральная симметрия отрезка $[A, B]$ меняет E и F местами. Таким образом, одна из них, скажем, E будет заведомо ближе к точке A, а точка F — к точке B, то есть $|AE| = |BF| < \frac{11}{2} = 5.5$. Соединим точки A и E отрезком. (Можно даже провести отрезок с началом A побольше, на всю линейку). Соединим также B и F отрезком. А теперь соединим точки E и F отрезком. Можно показать, что расстояние между ними меньше 10 см, так что это действительно возможно. А можно это и не использовать. А именно, можно провести более длинный отрезок с началом A вместо $[A, E]$ и соединить его конец с точкой B или F. См. рисунок.



Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное построение (в том числе без объяснений)	$+$	20
Сказано что решение начинается с предварительного построения точек C и D, но не сказано, как это продолжить	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-3 Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3.

Решение. Утверждается, что n удовлетворяет условию задачи, если и только если его разложение $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ на простые множители имеет вид либо $n = p^5$, либо $n = p_1 p_2^2$. Действительно, для каждого $j = 1, \ldots, k_1$ имеется $(k_2+1) \ldots (k_s+1)$ делителей числа n, содержащих p_1 в степени j в разложении на простые множители: все эти делители имеют вид $p_1^j p_2^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$, $m_i \in \{0, \ldots, k_i\}$. Следовательно, произведение всех делителей числа n содержит p_1 в степени $(k_2+1) \ldots (k_s+1)(1 + \ldots + k_1)$. Условие, что произведение всех делителей равно n^3, эквивалентно утверждению, что каждое p_j входит в их произведение в степени $3k_j$, и, тем самым, предыдущее произведение скобок равно $3k_1$. Следовательно, $(k_2+1) \ldots (k_s+1) \leqslant 3$. С другой стороны, $k_j \geqslant 1$. Отсюда следует, что либо $s = 2$, $k_2 \leqslant 2$ (из симметрии $k_1 \leqslant 2$), либо $s = 1$ и $n = p^k$, $p = p_1$, $k = k_1$. В первом случае должно выполняться равенство $(k_2+1)(1 + \cdots + k_1) = 3k_1$ и аналогичное равенство с переменой k_1 и k_2 местами. Это возможно только в том случае, когда $k_2 = 2$, $k_1 = 1$ (с точностью до перестановки). Во втором случае, когда $n = p^k$, все делители числа n суть $1, p, \ldots, p^k$, а их произведение равно p в степени $1 + \ldots + k$. По условию задачи последняя сумма должна быть равна $3k$: $1 + \cdots + k = 3k$. Для чисел $k = 1, 2, 3, 4$ это не верно, а для числа $k = 5$ верно. При $k > 5$ рассматриваемое равенство неверно:

$$1 + \ldots + k > k + (k-1) + (k-2) + 1 + 2 = 3(k-1) + 3 = 3k.$$

Значит, во втором случае $k = 5$. Итак, все числа n, удовлетворяющие условию задачи, имеют разложение на простые множители вида либо $n = p_1 p_2^2$, $p_1 \neq p_2$, либо $n = p^5$. Перечислим те из них, которые не превосходят 100.

- Числа $n = p_1 p_2^2 \leqslant 100$. Имеем $p_2 < 10$, тем самым $p_2 \in \{2, 3, 5, 7\}$. С другой стороны, $p_2^2 \geqslant 4$, а, значит, $p_1 \leqslant 25$. Следовательно, $p_1 \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$, $p_1 \neq p_2$. Выписывая всевозможные произведения $n = p_1 p_2^2$, не превосходящие 100, с вышеуказанными p_1

и p_2, получаем

$$2\times 3^2=18,\ 2\times 5^2=50,\ 2\times 7^2=98,\ 3\times 2^2=12,\ 3\times 5^2=75,$$
$$5\times 2^2=20,\ 5\times 3^2=45,\ 7\times 2^2=28,\ 7\times 3^2=63,\ 11\times 2^2=44,$$
$$11\times 3^2=99,\ 13\times 2^2=52,\ 17\times 2^2=68,\ 19\times 2^2=76,\ 23\times 2^2=92.$$

- Единственное $n=p^5$, не превосходящее 100, есть 32. Итого получаем список всех возможных чисел n:

$$n=12,\ 18,\ 20,\ 28,\ 32,\ 44,\ 45,\ 50,\ 52,\ 63,\ 68,\ 75,\ 76,\ 92,\ 98,\ 99.$$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведён полный список в кратким (возможно, неполным) доказательством	$+$	20
Приведён полный список без какого-либо доказательства	$\pm$	16
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

Критерии оценивания.

Приведен полный список с кратким (возможно, не полным) доказательством – полный балл 20.

Приведен полный список без какого-либо доказательства – 16.

Отмечены оба случая $n=p_1p_2^2$, $n=p^5$, но упущены какие-то числа. За каждое упущенное число снимать по 2 балла.

Приведено краткое доказательство, отмечен случай $n=p_1p_2^2$, но забыт случай $n=p^5$ (т.е., число 32) – 12.

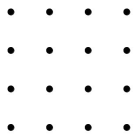
Отмечен случай $n=p^5$, но забыт случай $n=p_1p_2^2$ – 8 баллов.

7-4 На столе стоят три ящика с номерами 1, 2 и 3. В одном из них 1 красный, 1 синий и 1 зелёный шарик, в другом 1 красный и 1 зелёный, в третьем 1 синий шарик. При этом известно, что во всех трёх случаях номер ящика не совпадает с числом шариков внутри ящика. Как, вынув только один шарик, найти число шариков в каждом ящике?

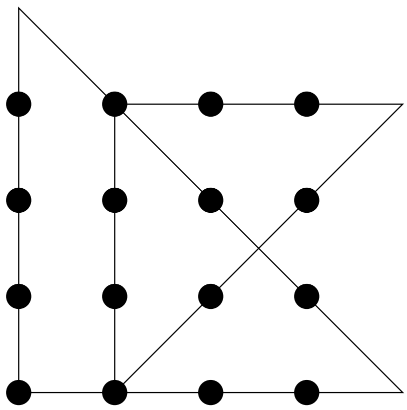
Решение. Вынем шарик из ящика номер 3. Из условия следует, в нём либо один шарик (и, следовательно, синий), либо два (следовательно, красный и зелёный). Какой из двух случаев имеет место, устанавливается однозначно по цвету вынутого шарика. В первом случае (один шарик в ящике номер 3) ящик номер 2 содержит три шарика (следовательно, красный, синий и зелёный). Действительно, он может содержать либо три шарика, либо один. Последний случай невозможен: предыдущий ящик номер 3 есть единственный ящик, содержащий один шарик. Следовательно, ящик номер 1 содержит два шарика: красный и зелёный. Во втором случае, когда в ящике номер 3 лежат два шарика, ящик номер 1 может содержать либо три шарика, либо два. Содержать два шарика он не может, как и выше. Тем самым, ящик номер 1 содержит три шарика: красный, синий и зелёный, а оставшийся ящик номер 2 — один синий шарик.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Предъявлена правильная стратегия	$+$	20
Сказано, что вынуть шар из яшика 3 и рассмотрен только один из двух случаев; неполностью обоснованный алгоритм	$\pm$	12
Сказано, что вынуть шар из яшика 3 и не сказано, что делать дальше	$\mp$	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-5 Дана квадратная решётка 4×4 точек (то есть решётка 3×3 с отмеченными 4×4 вершинами всех клеток). Какое минимальное число треугольников нужно нарисовать, чтобы каждая точка попала на границу одного из треугольников? Приведите пример с указанным Вами числом треугольников и докажите, почему меньше нельзя.



Решение. Два треугольника, границы которых покрывают все точки решетки, представлены на рисунке.



Докажем, что покрыть точки решетки границей одного треугольника нельзя. Действительно, предположим противное: пусть все точки решетки содержатся в границе одного треугольника. В каждом горизонтальном ряду лежат 4 точки, и каждая из них лежит на одной из трёх сторон треугольника. Следовательно, хотя бы одна сторона содержит две из них, и тем самым, параллельна горизонтальной прямой. Проводя это рассуждение для двух горизонтальных рядов точек решетки получаем, что треугольник имеет две стороны, параллельные горизонтальной прямой, и, тем самым, параллельные друг другу. Полученное противоречие доказывает невозможность покрыть точки решетки границей одного треугольника.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Построено покрытие границами двух треугольников и доказано, что нельзя покрыть границей одного	$+$	20
Построено покрытие границами двух треугольников, но доказательство, что границей одного нельзя, содержит недочёты	$\pm$	15
Построено покрытие границами двух треугольников, но не доказано, что нельзя покрыть границей одного	$\mp$	9
Построено покрытие границами трёх треугольников	$-.$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-6 Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

Решение. Представим партию в виде ориентированного графа: партийцев — в виде вершин, и если партиец A доверяет партийцу B, то соединим вершину A с B ребром со стрелкой, направленной от A к B. Условие того, что никакие два партийца не доверяют друг другу, эквивалентно условию того, что никакие две вершины не соединены двумя противоположно направленными ориентированными рёбрами. Будем называть это *условием одного ребра.* Построим пример партии из 11 человек, удовлетворяющей условию задачи. Разместим 11 человек в вершинах правильного 11-угольника $A_1 \ldots A_{11}$. Для каждой вершины A_i направим по ориентированному ребру из неё в каждую из пяти вершин, следующих за ней по часовой стрелке. Утверждается, что условие одного ребра выполнено. Действительно, для каждого ориентированного ребра, идущего от некоторой вершины A_i к A_j, имеется не более 4 вершин, следующих от A_i к A_j в направлении по часовой стрелке. А остальных вершин 11-угольника, отличных от A_i, A_j и вышеупомянутых последовательных вершин между ними, не меньше, чем $11-6=5$, и они идут последовательно от A_j к A_i по часовой стрелке «с другой стороны». Предположим противное: условие одного ребра не выполнено, то есть некоторая пара вершин A_i и A_j соединена двумя противоположно направленными рёбрами. Тогда в силу предыдущего имеется два набора последовательных вершин, каждый из не более, чем 4 вершин: вершины одного набора идут от A_i к A_j по часовой стрелке, а вершины другого — от A_j к A_i по часовой стрелке. Следовательно, эти наборы не пересекаются, и вместе с вершинами A_i и A_j (итого не более, чем $4+4+2=10$ вершин) они покрывают все 11 вершин 11-угольника. Полученное противоречие доказывает, что условие одного ребра выполнено.

Докажем теперь, что для партии меньшего размера это не возможно. Пусть n — общее число членов партии, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда общее число ориентированных рёбер равно $5n$: по 5 рёбер, исходящих из каждой вершины. С другой стороны, общее число рёбер не превосходит множества пар различных вершин (условие одного ребра), которое, в свою очередь, равно $C_n^2=\frac{n-1}{2}n$. Тем самым, $5n\leqslant\frac{n-1}{2}n$, а, значит, $\frac{n-1}{2}\geq 5$, то есть $n\geqslant 11$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено построение партии из 11 человек и доказано, что меньше нельзя	$+$	20
Приведено построение партии из 11 человек, но не доказано, что меньше нельзя	$\pm$	14
Доказано, что меньше 11 сделать нельзя, но пример не построен	$+/2$	12
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	