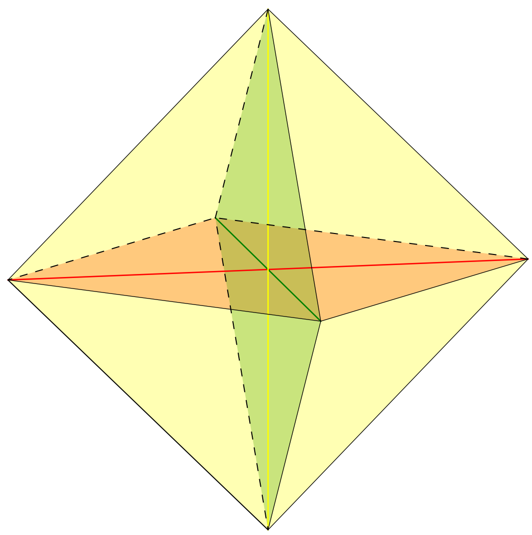
Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

10-1 В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

Решение.

Рассмотрим октаэдр (см. рисунок). Пусть каждый человек соответствует вершине октаэдра.



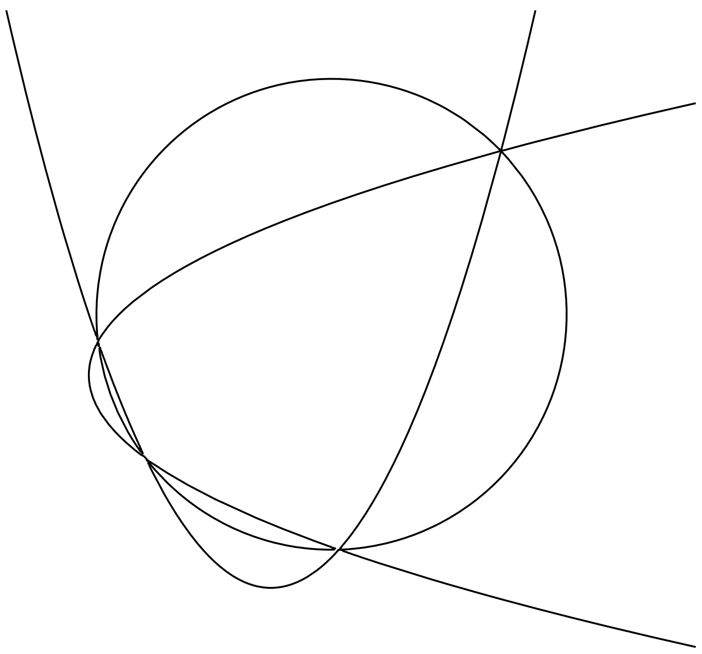
В качестве троек, ходивших вместе в поход, возьмём грани, а также ещё 6, получамых следующим образом. Рассмотрим три координатных плоскости. Каждая из них пересекает октаэдр по квадрату (закрашены разными цветами). В каждом таком квадрате возьмём две тройки, чтобы полученные треугольники вместе образовывали квадрат, и три прямых, разделяющих треугольники в парах, лежали на трёх различных координатных прямых. (Отрезки, разделяющие треугольники, в квадратах проведены соответствующими цветами.) Легко видеть, что такой набор троек не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: нет.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведён верный контрпример	$+$	20
Присутствует идея построения цикла для 5 человек и добавления шестого	$\pm$	15
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-2 Парабола $x = y^2$ пересекается с некоторой окружностью в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на параболе, задаваемой уравнением вида $y = ax^2 + bx + c$.

Решение. Уравнение окружности в имеет вид $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ для некоторых чисел a, b, c. Поскольку точки пересечения окружности и и параболы $x = y^2$ удовлетворяют двум уравнениям, они удовлетворяют также любой их комбинации. В частности, $(x^2+y^2+ax+by+c)+(x-y^2) = x^2+(a+1)x+c+by$. Это уравнение задаёт параболу требуемого вида.



Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено доказательство в общем случае	+	20
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

10-3 Тройка целых чисел (x, y, z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

Решение.

Число z единственным образом раскладывает в произведение простых: $z = \pm p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$. Возьмём любое простое число p и докажем, что степень его вхождения в z делится на 3. Понятно, что из этого следует, что z является кубом целого числа.

Пусть $\nu_p(n)$ равно k, если n делится на p^k и не делится на p^{k+1} (будем считать, что $\nu_p(0) = \infty$). Сгруппируем слагаемые:

$$x^3 + z(x^2 - y^2) = z^2(2x + y).$$

Понятно, что если z делится на p, то и x делится на p, но тогда y не делится на p, так как наибольший делитель x, y, z равен 1. Рассмотрим остаток от деления $\nu_p(z)$ на 3.

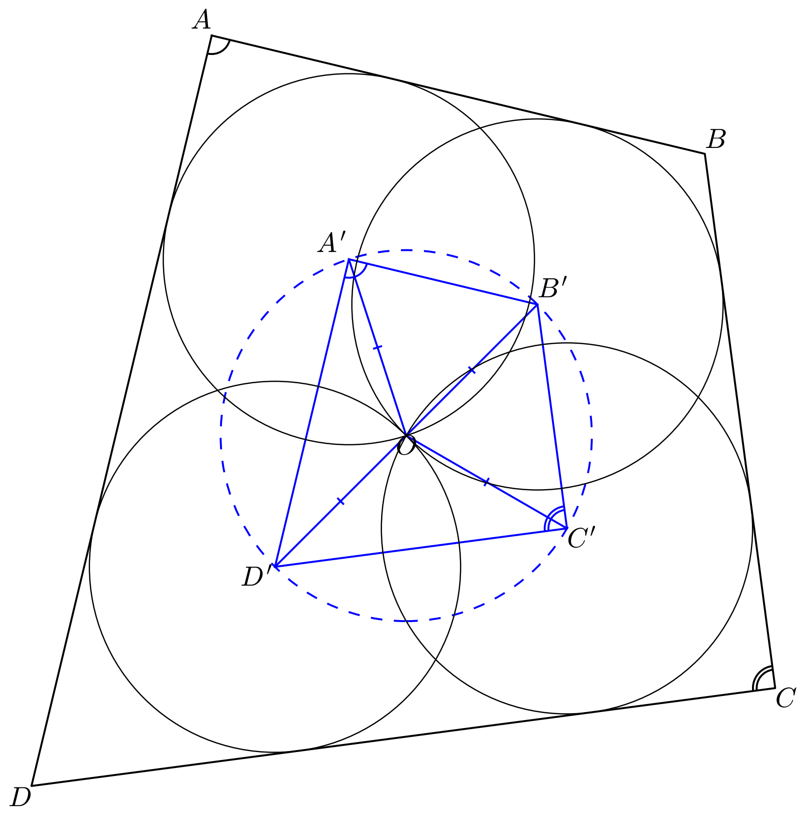
Допустим, остаток равен 1, то есть $\nu_p(z) = 3k + 1$. Тогда z^2 делится на p^{6k+2}, а степень p, на которую делится x^3, делится на 3. Таким образом, два слагаемых в левой части и правая часть делятся на попарно разные степени p, так как остатки этих степеней по модулю 3 различны (так как $x^2 - y^2$ и $2x + y$ не делятся на p). Тогда равенство не может быть выполнено. В случае $\nu_p(z) \equiv 2 \mod (3)$ аналогично равенство не может быть выполнено. Значит, остаётся только случай, где $\nu_p(z)$ делится на 3.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Рассмотрена идея рассмотрения остатка вхождения произвольного простого по модулю 3, но не показано, почему в этом случае равенство невозможно	$\pm$	12
Рассмотрена идея разложения z на простые множители и исследования степеней простых	$-.$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-4 Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены четыре окружности одного радиуса так, что они имеют общую точку и каждая из них вписана в один из углов четырёхугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

Решение.

Обозначим точку пересечения окружностей через O, центры окружностей обозначим A', B', C', D'. Поскольку все четыре окружности имеют равный радиус, $OA' = OB' = OC' = OD'$. Таким образом, O является центром окружности, описанной вокруг $A'B'C'D'$. Значит, сумма противоположных углов в четырёхугольнике $A'B'C'D$ равна $180°$. Прямая AB является общей касательной к паре пересекающихся окружностей равного радиуса с центрами в A' и B', поэтому $AB \parallel A'B'$. Аналогично параллельны остальные соответвующие пары сторон. Значит, в четырёхугольнике $ABCD$ суммы противоположных углов также равны $180°$, так что он также является вписанным.



Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Доказано, центры окружностей образуют вписанный четырёхугольник	$\pm$	12
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-5 Числа $P_1, \ldots, P_n$ являются перестановкой набора чисел $\{1, \ldots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из $1, \ldots, n$, и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

Решение.

По неравенству о среднем арифметическом и среднем гармоническом имеем

$$\frac{1}{n_1}+\ldots+\frac{1}{n_k} \geqslant \frac{k^2}{n_1+\ldots+n_k}.$$

В нашем случае слагаемых $k=n-1$. Сумма в знаменателе содержит каждое из чисел $1,\ldots,n$ по два раза, кроме двух чисел, которые в ней участвуют по одному разу. Тогда эта сумма меньше $2(2+\ldots+n)=(n-1)(n+2)$. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{P_i+P_{i+1}} \geqslant \frac{(n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}(P_i+P_{i+1})} > \frac{n-1}{n+2}.$$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Неравенство полностью доказано	$+$	20
Доказано нестрогое неравенство	$+.$	17
Рассмотрена идея использования неравенства между средним арифметическим и среднем гармоническим	$\mp$	6
Неверный переход в доказательстве по индукции	$-$	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-6 Сторона BC правильного треугольника ABC разделена на 2016 равных частей точками $A_1,\ldots,A_{2015}$, стороны AC и AB — точками $B_1,\ldots,B_{2015}$ и $C_1,\ldots,C_{2015}$. Треугольник $A_iB_jC_k$ называется красным, если содержит центр ABC, и синим иначе. Каких треугольников больше, красных или синих?

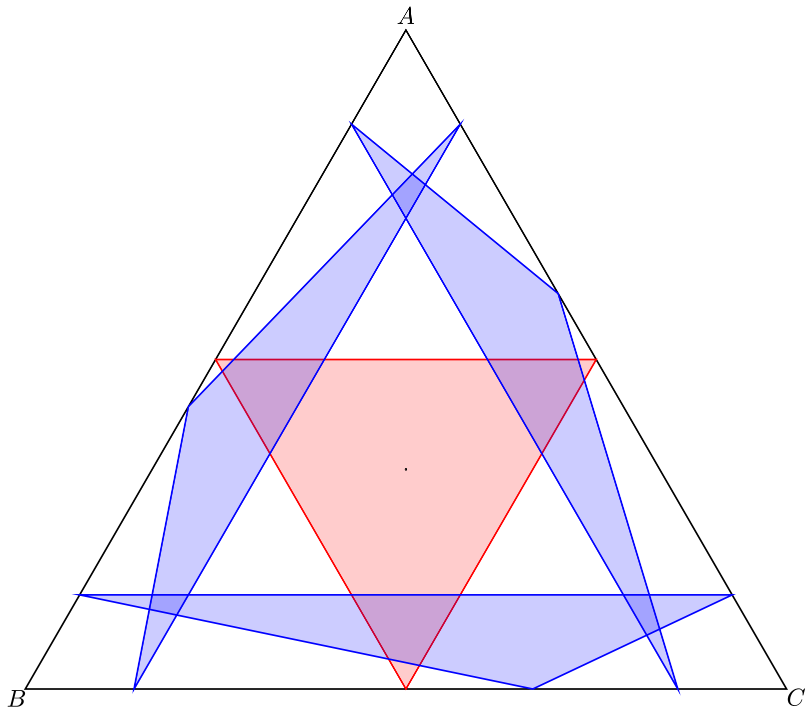
Решение.

Рассмотрим три условия:

- точки O и A по одну сторону от прямой B_jC_k,
- точки O и B по одну сторону от прямой A_iC_k,

- точки O и C по одну сторону от прямой A_iB_j.

  Если хотя бы одно изних выполнено, треугольник $A_iB_jC_k$ является синим. Если все три не выполнены, треугольник является красным. Понятно, что верно из трёх условий может быть максимум одно, и количества соответствующих синих треугольников равны. Поэтому мы будем рассматривать первое условие. Таким образом, если мы покажем, что треугольников, для которых выполнено первое условие, больше $1/6$ от общего числа, то мы докажем, что всего синих больше, чем красных.



Заметим, что первое условие не зависит от положения точки A_i, а зависит только от B_j и C_k. Для краткости обозначим $2016 = n + 1 = 6l$ (тогда на каждой стороне n точек, всего n^3 треугольников; каждая сторона разделена на $6l$ равных частей). Тогда нам надо доказать, что из $n^2 = 36l^2 - 12l + 1$ пар (B_j, C_k) более $1/6$ части (то есть строго более $6k^2 - 2k$) удовлетворяет условию.

Рассмотрим аффинную систему координат, в которой $A = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $B = (0, 1)$. Тогда в этой системе координат

$$B_j = \left(\frac{j}{n+1}, 0\right), \quad C_k = \left(0, \frac{k}{n+1}\right).$$

Уравнение прямой B_jC_k имеет вид

$$\frac{n+1}{j}x + \frac{n+1}{k}y = 1.$$

Чтобы точки A и O лежали с одной стороны от B_jC_k, линейная функция $\frac{n+1}{j}x + \frac{n+1}{k}y - 1$ в точках $(0, 0)$ и $(1/3, 1/3)$ должна быть одного знака, то есть отрицательна, то есть $\frac{n+1}{3}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{k}\right) < 1$.

Таким образом, нам требуется показать, что неравенство

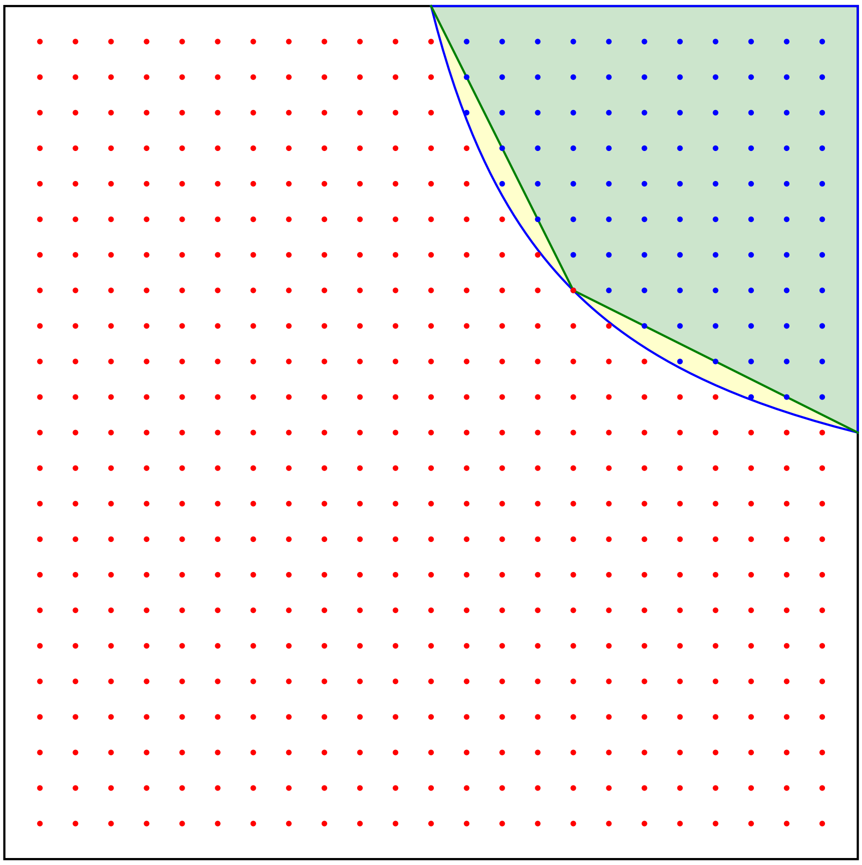
$$j + k < \frac{3}{n+1}jk$$

имеет решений более $n^2/6$ при $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, то есть более $6l^2 - 2l$. Таким образом, нам нужно показать, что строго внутри области с синей границей лежит не менее шестой части точек вида

$$\left(x = \frac{j}{n+1}, y = \frac{k}{n+1}\right)$$

для $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Основная идея состоит в том, что зелёная область составляет $1/6$ площади квадрата, поэтому вместе с жёлтой областью это уже строго больше $1/6$, так что при больших n всегда больше синих треугольников, чем красных. Однако эту идею проще реализовать при n, стремящемся к бесконечности, а нам требуется доказательство для $n = 2015$. Перейдём к строгому доказательству.



Строго внутри квадрата $[2/3,1]\times[2/3,1]$ лежит $(2l-1)^2$ синих точек. Внутри треугольника с вершинами $(2/3,2/3)$, $(1,1/2)$, $(1,2/3)$, скилючая вершину и точки прямой $x=1$, остаётся l^2+l+1 точки. Суммарно получаем $6l^2-2l-1$ точки, что меньше $6l^2-2l$, однако ещё есть точки строго внутри жёлтых областей, которых нам достаточно найти ещё хотя бы 2 штуки. Или в одной области хотя бы две точки. Возьмём тогда в левой жёлтой области точки $\left(\frac{13}{24},\frac{21}{24}\right)$ и $\left(\frac{7}{12},\frac{19}{24}\right)$ (2016 делится на 24, так что эти точки нам подходят).

Ответ: больше синих треугольников.

Приведём слегка другой метод завершения доказательства. Рассмотрим вершины зелёного четырёхугольника, а также 4 найденные дополнительные точки в жёлтых областях. По формуле Пика (или «счётом по клеточкам», что на самом деле почти одно и то же) можно получить, что площадь их общей выпуклой оболочки равна $\frac{1}{6}+\frac{5}{576}$.

При растяжении картинки в $24l$ раз (2016 делится на 24, то есть этот случай нам подходит) многоугольник имеет 8 целых вершин, на его сторах лежит $18(l-1)$ вершин, строго внутри N целых точек. Однако синие треугольники дают также $6l-2$ целых точек границы многоугольника. Тогда вычисление площади по формуле Пика даёт равенство

$$N = 149l^2 - 9l - 6.$$

Тогда нам остаётся доказать, что

$$\frac{149l^2 - 3l - 8}{576l^2} > \frac{1}{6},$$

что равносильно $5l^2 - 3l - 8 > 0$. Квадратное уравнение имеет корни $\frac{3 \pm \sqrt{71}}{10} < 2$. Но $2016 > 24$ (поэтому $l \geqslant 2$), поэтому неравенство выполнено.

Замечание. На самом деле красных треугольников больше для $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, количества равны при $n = 6$ и 12. При всех остальных n синих треугольников больше.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Приведено решение, содержащее незначительные неточности (даже если они влияют на ответ)	$+.$	18
Решение сведено к решению неравенства от двух переменных в натуральных числах, оценка частично произведена или рассматривается аргумент площади более 1/6	$\pm$	12
Показано, что синие бывают трёх видов, в каждом их доля зависит только от двух точек	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	