Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2015-2016 учебный год

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПОВ ОЛИМПИАДЫ, ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
МАТЕМАТИКА

Время выполнения заданий: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

Все решения и ответы должны быть обоснованы.

1. Дан куб, каждая грань которого – это клетчатое поле размером 2015 на 2015 клеток. В центре одной из граней стоит пешка. Данил и Максим передвигают пешку по клеткам куба. Данил может ходить только на соседнюю по стороне клетку (разрешается переходить на другую грань, если клетки соседние по стороне), а Максим может поставить пешку в любую клетку. Пешка красит за собой клетки. На закрашенную клетку пешку двигать нельзя. Изначальная клетка (центр грани) закрашена. Данил ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих?

2. Дан $\triangle ABC$, точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что три прямые, проходящие через эти точки и параллельные биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

3. В гномьем клане некоторые знакомы между собой. Каждый гном владеет некоторым количеством монет. Днём каждый гном узнаёт, сколько монет у каждого из его знакомых. Вечером он отдаёт по монете каждому из знакомых, кто днём был богаче него. Гном не может отдать больше, чем у него есть (например, нищий гном ничего не отдаёт). Если у гнома днём было меньше монет, чем количество знакомых богаче, чем он, то он сам решает, кому отдавать монеты. Докажите, что, начиная с какого-то дня, гномы прекратят передавать друг другу монеты.

4. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них $ab+a+b$, затем поступить так же с какими-то двумя из оставшихся, и так далее. Какое число может остаться последним?

5. На сколько частей могут делить плоскость 7 различных касательных к данной окружности? Приведите примеры для всех ответов и докажите, что других не существует.

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка – последовательности стрелочек «вверх», «вниз», «влево» и «вправо», причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку «вверх», а если это запрещено (то есть если слово начинается со стрелочки «вниз»), то убирает это первое «вниз». Ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают в начало соответственно стрелки «вниз», «влево» или «вправо», и вычёркивают первый символ, если он оказался «вверх», «вправо» или «влево». Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум 500000 слов не будет встречаться среди слов на доске.