



**Межрегиональная олимпиада школьников
«Высшая проба»**

2015-2016 учебный год

**МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО И
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПОВ ОЛИМПИАДЫ,
ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА**

**ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО
ЭТАПА
МАТЕМАТИКА**

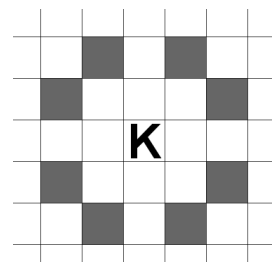
Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Эти же три числа являются тремя (не обязательно последовательными) членами некоторой геометрической прогрессии. Приведите пример трёх таких чисел.

2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C , пересекаются в точке B_1 . На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

3. Каждый ход шахматного коня — перемещение на одну клетку по горизонтали и две по вертикали, либо наоборот — одну по вертикали и две по горизонтали. (На рисунке справа конь, отмеченный буквой К, может за один ход переместиться в любую из затемнённых клеток.)



В произвольной клетке прямоугольной доски размером 2×2016 клеток стоит шахматный конь. Перемещаясь по описанному правилу (и не выходя при этом за края доски), он может из этой клетки попасть в некоторые другие клетки доски, но не во все. Какое наименьшее количество клеток нужно добавить к доске, чтобы конь мог из любой клетки доски попасть во все остальные? (Добавление клетки происходит так, чтобы она имела общую сторону с одной из уже имеющихся. Добавлять можно любое количество клеток, получившаяся при этом доска не обязательно должна иметь прямоугольную форму).

4. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x , является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

- а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

5. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c , и вычислил $x = \text{НОД}(a, b)$, $y = \text{НОД}(b, c)$, $z = \text{НОД}(c, a)$. Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

6, 8, 12, 18, 24

14, 20, 28, 44, 56

5, 15, 18, 27, 42

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x , одно из чисел во втором ряду равно y , одно из чисел в третьем ряду равно z , и попросил угадать числа x, y, z . Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z) .

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных строках и столбцах, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например $f(1) = 10$, $f(11) = 0$.

а) Что больше, $f(9)$ или $f(10)$?

б) Что больше, $f(5)$ или $f(6)$?