Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2015-2016 учебный год

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПОВ ОЛИМПИАДЫ, ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА МАТЕМАТИКА

1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

Ответ: $9 - 8765432 - 1$

2. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2+80xy+95y^2$ для некоторых целых чисел x и y. Строго обоснуйте ответ.

Решение: Поделим на 5. $4x^2 + 16xy + 19y^2$. По модулю 4 или 0 или 3. 3 может быть:$x = 2, y = -1$. Ответ – 15.
Критерии: $\mp$ – получен ответ без обоснования.

3. Болельщики Спартака говорят правду, когда Спартак выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики Динамо, Зенита и Локомотива. После двух матчей с участием этих четырех команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос "болеете ли вы за Спартак?" положительно ответили 200 человек, на вопрос "болеете ли вы за Динамо?" положительно ответили 300 человек, на вопрос "болеете ли вы за Зенит?" положительно ответили 500 человек, на вопрос "болеете ли вы за Локомотив?" положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?

Решение: Пусть за победившие команды болеют x и y человек, за проигравшие z и t. Тогда на вопросы про эти команды ответило $x+z+t, y+z+t, t, z$ человек соответственно. Значит, за Зенит болеет 0 человек, за Локомотив 100, за Спартак 300, а за Динамо 200 человек. Критерии: $\mp$ – правильный ответ без обоснования,
$\pm$ – арифметическая ошибка, или небольшие пробелы в обосновании.

4. Треугольник со сторонами 2, 3 и 3 разрезали на четыре подобных ему треугольника. Каковы могут быть коэффициенты подобия?

Ответ: 1/2 и 6/13, 4/13, 9/13, 6/13.
Решение: Заметим, что единственное расположение четырёх треугольников, так чтобы они были подобны большому (а, значит, и друг другу) – так чтобы у каждого треугольника разбиения одна вершина была вершиной треугольника и две другие на его сторонах, причем на каждой стороне большого треугольника отмечено по одной точке (A' на BC, B' на AC, C' на AC). Тогда есть ровно два варианта – $\angle CA'B' = \angle CAB$ и $\angle CA'B' = \angle CBA$. Остальные углы восстанавливаются однозначно. Оба варианта дают набор из четырёх подобных треугольников.
Критерии: $\mp$ – рассмотрен только первые вариант.

5. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a + b + ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

Ответ: $2^{99}(1+1)(1+1/2)\ldots(1+1/100)-1 = 2^{99}101-1$. Решение: Необходимо показать ассоциативность операции для трёх произвольных a, b, c, а затем провести вычисление, заметив, что на каждом шаге получается выражение вида $2^k(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{k-1})-1$.
Критерии: $\mp$ – ответ без доказательства независимости от порядка операций.

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек “вверх”, “вниз”, “влево” и “вправо”, причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх, а если это запрещено (слово начинается с “вниз”), то

убирает это первое “вниз”, ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он оказался “вверх”, “вправо”, “влево”. Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Решение: Разобьём слова, написанные на доске на 4 класса U, D, L, R согласно первой букве (будем маленькими буквами u, d, l, r обозначать число элементов в них, $u+d+l+r = 1000000$). Тогда в тетради ученика U будет написано $u+l+r$ слов, начинающихся на “вверх” (ибо к любому слову не из класса D он припишет “вверх”). Значит, если у него в тетради содержится N_u новых слов, то $u + l + r \leq u + N_u$. Написав три аналогичных неравенства и сложив их вместе, получим, что $3(u + d + l + r) \leq (u + d + l + r) + (N_u + N_d + N_l + N_r)$, то есть $N_u + N_d + N_l + N_r$ не меньше 2000000.

Перевод оценок в баллы в олимпиаде «Высшая проба» по математике в 2015/2016 учебном году

Оценка	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс						11 класс					
				1 задача	2 задача	3 задача	4 задача	5 задача	6 задача	1 задача	2 задача	3 задача	4 задача	5 задача	6 задача
+	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
+.	19	19	19	19	19	19	18	19	19	19	19	18	19	19	19
+ –	16	16	16	17	16	16	13	16	16	17	16	13	16	16	16
'+ 2	10	10	10	12	10	10	10	10	10	12	10	10	10	10	10
– +	5	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	7	5	8	5
–.	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1
–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2015-2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

Класс	**ПОБЕДИТЕЛИ**	**ПРИЗЕРЫ**	
	Дипломанты 1 степени	Дипломанты 2 степени	Дипломанты 3 степени
	Критерии определения	Критерии определения	Критерии определения
7	от 80 и выше	от 69 до 97	от 60 до 68
8	от 80 и выше	от 64 до 79	от 50 до 63
9	от 80 и выше	от 60 до 79	от 45 до 59
10	от 80 и выше	от 62 до 79	от 45 до 61
11	от 83 и выше	от 65 до 82	от 50 до 64