

**ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО
ЭТАПА
МАТЕМАТИКА**

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Найдите все тройки действительных чисел (x, y, z) , удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} x^3 y^3 z^3 = 1; \\ xy^5 z^3 = 2; \\ xy^3 z^5 = 3. \end{cases}$$

2. Дан треугольник ABC , $\angle B = 90^\circ$. На сторонах AC , BC выбраны точки E и D соответственно, такие, что $AE = EC$, $\angle ADB = \angle EDC$. Найти отношение $CD : BD$.

3. В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты (Э) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\begin{array}{ccccc} \text{Б} & \xleftrightarrow{\frac{2}{1}} & \text{К} & \quad \text{Э} & \xleftrightarrow{\frac{6}{1}} & \text{Б} & \quad \text{Э} & \xleftrightarrow{\frac{11}{1}} & \text{К} & \quad \$ & \xleftrightarrow{\frac{10}{1}} & \text{К} & \quad \$ & \xleftrightarrow{\frac{5}{1}} & \text{Б} \\ & \xleftarrow{\frac{1}{2}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{6}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{11}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{15}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{7}} & \end{array}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов или 5 бананов, а один кокос — на $\frac{1}{15}$ доллара, или на $\frac{1}{11}$ енота, или на $\frac{1}{2}$ банана. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \leftrightarrow \text{Э}$ в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

4. Даны три точки A, B, C , образующие треугольник с углами $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$. Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвертую точку D . С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура — выбираются две точки, проводится серединный перпендикуляр и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество различных точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

5. Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ — множество всех действительных чисел \mathbb{R} ,
- при любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение,
- при любом $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не менее двух решений.

6. а) Найти хотя бы два различных натуральных числа n , для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

б) Найти количество всех натуральных чисел n , для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.